Soluţiile problemelor propuse în nr. 2 / 2001

Clasele primare

P.14. *Scrieţi toate scăderile de tipul* $\overline{aa} - \overline{bb} = \overline{cc}$ *cu rezultatul mai mare ca* 50.
(*Clasa I*) **Gabriela Lozovanu, elevă, Iaşi**

Soluţie. Rezultatul $\overline{cc}$ poate fi: 55, 66, 77, 88. Distingem cazurile:

1) $\overline{bb} = 11$, când sunt posibile scăderile: $66 - 11 = 55$, $77 - 11 = 66$, $88 - 11 = 77$, $99 - 11 = 88$;

2) $\overline{bb} = 22$, când avem: $77 - 22 = 55$, $88 - 22 = 66$, $99 - 22 = 77$;

3) $\overline{bb} = 33$, când avem: $88 - 33 = 55$, $99 - 33 = 66$;

4) $\overline{bb} = 44$, când avem o singură scădere: $99 - 44 = 55$.

P.15. *Mama împarte nouă mere la cei trei copii ai săi. Câte mere poate primi fiecare dacă unul din ei a primit mai mult de trei mere şi mai puţin de şase?*
(*Clasa I*) **Maria Mursa, elevă, Iaşi**

Soluţie. Prin scrierea (a, b, c) vom înţelege că un copil a primit a mere, un altul b mere, iar ultimul c mere. Primul copil poate primi 4 mere sau 5 mere. Avem cazurile: $(4, 1, 4)$, $(4, 2, 3)$, $(5, 1, 3)$, $(5, 2, 2)$.

P.16. *Suma vârstelor a trei fraţi este cinci ani. Doi dintre ei sunt gemeni, iar cel mai mare are ochii negri. Câţi ani are fiecare dintre fraţi?*
(*Clasa a II-a*) **Teodora-Cerasela Grigoraş, elevă, Iaşi**

Soluţie. Deoarece fraţii gemeni sunt mai mici decât fratele cu ochi negri, singura soluţie este 1 an, 1 an, 3 ani.

P.17. *Despre numerele naturale* a *şi* b *ştim că:* $199 < a < 203$ *şi* $314 < b < 317$. *Să se afle toate valorile diferenţei* $b - a$.
(*Clasa a II-a*) **Ştefania Atodiresei, elevă, Iaşi**

Soluţie. Valorile lui a sunt 200, 201 sau 202, iar valorile lui b sunt 315 sau 316. Avem posibilităţile: $315 - 200 = 115$, $315 - 201 = 114$, $315 - 202 = 113$, $316 - 200 = 116$, $316 - 201 = 115$ şi $316 - 202 = 114$, de unde rezultă că $b - a$ poate lua valorile 113, 114, 115, 116.

P.18. *Într-o urnă sunt patru bile albe, şase bile roşii şi zece bile galbene. Care este cel mai mic număr de bile pe care trebuie să-l extragem din urnă astfel încât printre bilele extrase să avem cel puţin câte o bilă de fiecare culoare?*
(*Clasa a III-a*) **Roxana Tudorache, elevă, Iaşi**

Soluţie. Cel mai mic număr de bile pe care trebuie să-l extragem este 17. Acest număr se poate afla astfel: observăm că avem 10 bile albe sau roşii, 14 bile albe sau galbene şi 16 bile roşii sau galbene. Pentru a nu avea numai bile de două culori, trebuie să extragem un număr de bile mai mare decât fiecare din numerele 10, 14 şi 16. Cel mai mic număr cu această proprietate este 17.

P.19. *Ce oră arată ceasul meu acum, dacă de la ora* 12 *a trecut jumătate din timpul care a mai rămas până la sfârşitul zilei?*
(*Clasa a III-a*) **Înv. Rodica Agrici, Iaşi**

Soluţie. Timpul care a trecut de la ora 12 până în momentul citirii ceasului este o treime din perioada dintre ora 12 şi sfârşitul zilei, adică $(24-12):3=12:3=4$ ore. Ceasul arăta ora 16.

P.20. *Să se determine numărul natural* $A=\overline{xyzt}$ *ştiind că sunt îndeplinite condiţiile: a) suma cifrelor este* 20, *b) fiecare cifră este cu doi mai mare decât cea din faţa ei.*

(*Clasa a III-a*) **Înv. Elena Marchitan, Iaşi**

Soluţie. Deducem că $y=x+2$, $z=x+4$, $t=x+6$. Dacă înlăturăm din 20 suma $(2+4+6)$ obţinem de 4 ori cifra x. Deci $4\cdot x=20-(2+4+6)=20-12=8$ şi $x=8:4=2$. Numărul căutat este 2468.

P.21. *În curtea bunicii sunt* 81 *de păsări: raţe, gâşte şi găini. Ştiind că ele pot fi grupate astfel încât la o gâscă să corespundă trei găini, iar la două gâşte, o raţă, aflaţi câte păsări de fiecare fel are bunica în curte.*

(*Clasa a IV-a*) **Teodora-Cerasela Grigoraş, elevă, Iaşi**

Soluţie. Deoarece la două gâşte corespunde o raţă, iar la fiecare gâscă trei găini, putem să facem grupuri de câte o raţă, 2 gâşte şi 6 găini, ceea ce înseamnă 9 păsări de curte. În curte sunt $81:9=9$ (grupuri). Vom avea soluţia $9\cdot 1=9$ (raţe), $9\cdot 2=18$ (gâşte) şi $9\cdot 6=54$ (găini).

P.22. *Lungimea unui dreptunghi reprezintă* $\frac{3}{8}$ *din perimetrul său. Dacă adunăm* $\frac{1}{2}$ *din lăţime cu lungimea, obţinem* 105 *cm. Aflaţi dimensiunile şi perimetrul dreptunghiului.*

(*Clasa a IV-a*) **Înv. Maria Racu, Iaşi**

Soluţie. Suma lungimilor reprezintă $\frac{6}{8}$ din perimetru, iar suma lăţimilor reprezintă $\frac{2}{8}$ din perimetru. Înseamnă că o lungime reprezintă $\frac{3}{8}$ din perimetru şi o lăţime $\frac{1}{8}$ din perimetru. Cum jumătate din lăţime reprezintă $\frac{1}{16}$ din perimetru, iar fracţia $\frac{3}{8}$ este egală cu $\frac{6}{16}$, deducem că $\frac{7}{16}$ din perimetru reprezintă 105 cm, apoi $\frac{1}{16}$ din perimetru reprezintă $105:7=15$ (cm). Perimetrul este $16\cdot 15=240$ (cm). Lungimea este $240:8\cdot 3=30\cdot 3=90$ (cm), iar lăţimea este $240:8=30$ (cm).

P.23. *Dacă împărţim la patru fiecare termen al unui şir de numere, obţinem mai multe numere consecutive impare, cu suma ultimelor două, adică* 96, *mai mare cu* 16 *decât dublul sumei primelor două numere. Să se găsească al cincilea termen al şirului.*

(*Clasa a IV-a*) **Înv. Mihai Agrici, Iaşi**

Soluţie. Dublul sumei primelor două numere impare consecutive este $96-16=$ $=80$. Suma primelor două numere impare consecutive este $80:2=40$. Primul număr din şirul numerelor impare consecutive este $(40-2):2=38:2=19$. Al cincilea număr din şirul numerelor impare consecutive este $19+2+2+2+2=27$. Numărul căutat este $27\cdot 4=108$.

Clasa a V-a

V.21. *Arătaţi că numărul* $N=2^{n+1}\cdot 3^n+2^n\cdot 3^{n+1}+6\cdot 6^n$ *este divizibil cu* 11 *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$.

Dorina Carapanu, Iaşi

Soluţie. Calculând, avem $N = 2 \cdot 2^n \cdot 3^n + 2^n \cdot 3^n \cdot 3 + 6 \cdot 6^n = 2 \cdot 6^n + 3 \cdot 6^n + 6 \cdot 6^n = 6^n (2 + 3 + 6) = 6^n \cdot 11$, deci N se divide cu 11 oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

V.22. *Determinaţi mulţimea* $A = \{n; n \in \mathbb{N}, n^2 + n + 2 = 1 + 2 + 3 + \ldots + 2001\}$.

Maria Zălinescu, Iaşi

Soluţie. Deoarece $n^2 + n + 2 = n(n + 1) + 2$ este număr par pentru orice $n \in \mathbb{N}$, iar $1 + 2 + \ldots + 2001 = \dfrac{2001 \cdot 2002}{2} = 2001 \cdot 1001$ este impar, urmează că $A = \emptyset$.

V.23. *Să se afle ultima cifră a numărului* $S = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{2001}$.

Cristiana Artenie, elevă, Iaşi

Soluţia I. Se observă că $U(2^{4k+1} + 2^{4k+2} + 2^{4k+3} + 2^{4k+4}) = U(2 + 4 + 8 + 6) = 0$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$. Deoarece $S = 1 + (2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + (2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8) + \cdots + (2^{1997} + \ldots + 2^{2000}) + 2^{2001}$, rezultă că $U(S) = U(1 + 0 + 0 + \ldots + 0 + 2) = 3$.

Soluţia II. Avem $2S = 2 + 2^2 + \ldots + 2^{2002} = 2^{2002} - 1 + S$ şi atunci $S = 2^{2002} - 1$ iar $U(S) = 3$.

V.24. *Să se determine numerele* $\overline{abc}$ *pentru care* $a + b + c = abc$.

Paraschiva Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Mai general, vom determina numerele naturale a, b, c cu proprietatea $a + b + c = abc \quad (1)$.

Dacă cel puţin unul din cele trei numere este nul, atunci $abc = 0$, deci $a + b + c = 0$ şi atunci $a = b = c = 0$.

Fie $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ şi să presupunem că $a \leq b \leq c$. Împărţind prin c, (1) se scrie sub forma $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} + 1 = ab$ şi ţinând seama de presupunerea făcută rezultă că $1 < ab \leq 3$, adică $ab \in \{2, 3\}$. Dacă $ab = 2$, atunci $a = 1$ şi $b = 2$, iar din (1) avem că $3 + c = 2c$, deci $c = 3$. Dacă $ab = 3$, atunci $a = 1$ şi $b = 3$, iar din (1) obţinem $4 + c = 3c$, adică $c = 2 < b$, care nu convine. Rămâne că $(a, b, c) = (1, 2, 3)$ în mod necesar şi se verifică imediat că $1 + 2 + 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$. Prin urmare, tripletele căutate sunt $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$.

V.25. *Fie numărul* $a = 2001^{2001}$. *Notăm cu b suma cifrelor numărului a, apoi cu c suma cifrelor numărului b şi continuăm în acest mod până ajungem la un număr format cu o singură cifră. Care este acest din urmă număr?*

***

Soluţie. Deoarece $2001 \vdots 3$ numărul a se divide cu 9. Aceasta este echivalent cu faptul că suma cifrelor lui a se divide cu 9, altfel spus b se divide cu 9. Urmează $c \vdots 9$ şi, continuând raţionamentul, obţinem că numărul cu o singură cifră la care se ajunge se divide cu 9. Cum acesta este evident nenul, el este egal cu 9.

Clasa a VI-a

VI.21. *Fie date numerele distincte* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2n+1} \in \mathbb{Z}$, $n > 2$, *astfel încât* $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_{2n+1}| = n(n + 1)$. *Să se calculeze* $|a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2n+1}|$.

Cristiana Artenie, elevă, Iaşi

Soluţie. Considerând suma modulelor celor mai mici, în modul, $2n + 1$ numere întregi distincte, obţinem $0 + |1| + |-1| + |2| + |-2| + \ldots + |n| + |-n| =$

$= 2\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$. Rezultă atunci că $\{a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}\} = \{0, \pm 1, \ldots, \pm n\}$ şi deci $|a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n+1}| = 0$. Rezultatul are loc pentru $n \geq 1$.

VI.22. *Să se afle numerele $a, b \in \mathbb{N}$, ştiind că $5a - 3b = 72$ şi $(a, b) = 24$.*

Mihai Gârtan, Iaşi

Soluţie (dată de Boieriu Bianca, elevă, Braşov). Fie $a = 24m$, $b = 24n$, cu $m, n \in \mathbb{N}$, $(m, n) = 1$; atunci ecuaţia devine $5m - 3n = 3$ sau încă $5m = 3(n+1)$. Deducem că $m \vdots 3$, deci $m = 3t$ şi $n = 5t - 1$. Cum $n \in \mathbb{N}$, găsim $t \in \mathbb{N}^*$. Să determinăm t astfel încât $(m, n) = 1$. Fie $d \mid 3t$ şi $d \mid 5t - 1$; rezultă că $d \mid 5 \cdot 3t - 3(5t-1)$, deci $d \mid 3$, prin urmare m şi n sunt prime între ele sau se divid la 3. Cum $3 \mid 3t$, din $3 \mid 5t - 1$ găsim $t = 3k + 2$, $k \in \mathbb{N}$. Astfel, $(m, n) = 1$ dacă şi numai dacă $t = 3k$ sau $t = 3k + 1$. Găsim soluţiile $a = 24 \cdot 9k$, $b = 24(15k - 1)$, $k \in \mathbb{N}^*$ sau $a = 24(9k + 3)$, $b = 24(15k + 4)$, $k \in \mathbb{N}$.

VI.23. *a) Aflaţi $a, b \in \mathbb{N}^*$ cu proprietăţile: $ab = 24$ şi $[a, b] + (a, b) = 14$.*

b) Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$, $a \leq b$, cu proprietatea că $[a, b] + (a, b) = a + b$. Să se arate că $a \mid b$.

Cristiana Constanda, elevă, Iaşi

Soluţie. *a)* Deoarece $[a, b] \cdot (a, b) = a \cdot b = 24$ şi $[a, b] + (a, b) = 14$, rezultă că $[a, b] = 12$ şi $(a, b) = 2$. Atunci, $a = 2a'$, $b = 2b'$, cu $(a', b') = 1$ şi $a' \cdot b' = 6$, adică $(a', b') \in \{(1,6), (2,3), (3,2), (6,1)\}$, deci $(a, b) \in \{(2,12), (4,6), (6,4), (12,2)\}$ şi aceste perechi verifică ipotezele problemei.

b) Deoarece $[a, b] + (a, b) = a + b$ şi cum are loc şi $[a, b] \cdot (a, b) = ab$, rezultă că $[a, b] = a$ şi $(a, b) = b$ sau $[a, b] = b$ şi $(a, b) = a$. Condiţia $a \leq b$ impune $[a, b] = b$ şi $(a, b) = a$. Din acestea, deducem uşor că $a \mid b$.

VI. 24. *a) Fie suma $S = \frac{1}{39} + \frac{1}{40} + \ldots + \frac{1}{50}$. Să se arate că $\frac{6}{25} < S < \frac{4}{13}$;*

b) Dacă $S = \frac{a}{b}$, cu $a, b \in \mathbb{N}^*$, $(a, b) = 1$, să se arate că b este număr par, iar a se divide cu 89.

****

Soluţie. *a)* Observăm că suma are 12 termeni, cel mai mic termen este $\frac{1}{50}$, iar cel mai mare este $\frac{1}{39}$. Rezultă că $12 \cdot \frac{1}{50} < S < 12 \cdot \frac{1}{39}$, deci $\frac{6}{25} < S < \frac{4}{13}$.

b) Observăm că $\frac{a}{b} = \left(\frac{1}{39} + \frac{1}{50}\right) + \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{49}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{44} + \frac{1}{45}\right) = \frac{89}{39 \cdot 50} + \frac{89}{40 \cdot 49} + \ldots + \frac{89}{44 \cdot 45} = \frac{89k}{39 \cdot 40 \cdot \ldots \cdot 50}$. Această din urmă fracţie nu se simplifică prin 89, deoarece acest număr este prim, şi atunci $a \vdots 89$.

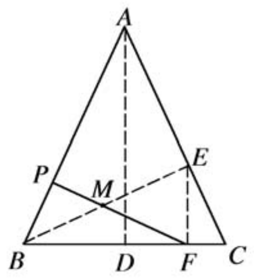
Pe de altă parte, $\frac{a}{b} = \left(\frac{1}{39} + \ldots + \frac{1}{47} + \frac{1}{49} + \frac{1}{50}\right) + \frac{1}{48} = \frac{m}{8n} + \frac{1}{48}$ cu n impar (din condiţia $(a, b) = 1$), deci $\frac{a}{b} = \frac{6m + n}{48n}$, numărătorul $6m + n$ fiind impar. Rezultă că fracţia $\frac{6m + n}{48n}$ nu se simplifică prin 2 şi atunci b este par (chiar multiplu de 8).

VI.25. *Fie ABC un triunghi isoscel ($AB = AC$). Notăm cu E proiecţia lui B pe AC şi cu F proiecţia lui E pe BC. Fie M mijlocul lui BE. Să se arate că*

$FM \perp AB$.

Constantin Cocea şi Dumitru Neagu, Iaşi

Soluţie. Notăm cu D proiecţia lui A pe BC şi fie $\{P\} = FM \cap AB$. Atunci AD este bisectoarea unghiului $\widehat{A}$: $m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{DAC}) = \alpha$. Cum FM este mediana corespunzătoare ipotenuzei în triunghiul dreptunghic FEB, rezultă că $FM = MB$, de unde $\widehat{MBF} = \widehat{MFB}$. Însă $m(\widehat{MBF}) = 90° - m(\widehat{C}) = m(\widehat{DAC}) = \alpha$, deci $m(\widehat{MFB}) = \alpha$. În concluzie, $m(\widehat{BPF}) = 180° - \left[m(\widehat{B}) + m(\widehat{MFB})\right] = 180° - \left[m(\widehat{B}) + \alpha\right] = 180° - 90° = 90°$, adică $FP \perp AB$.



Clasa a VII-a

VII.21. *Fie* $E(x) = \left(\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{3}{x-2}\right) \cdot \dfrac{x(x+4)+4}{x^2-16}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2, \pm 4\}$. *Dacă* $A = \{x \in \mathbb{N};\ x \text{ par şi } E(x) \in \mathbb{Z}\}$ *şi* $B = \{x \in \mathbb{N};\ x \text{ impar şi } E(x) \in \mathbb{N}\}$, *să se arate că mulţimea* $\left\{\dfrac{x}{y} \mid x \in A \text{ şi } y \in B\right\}$ *are un singur element.*

Dumitru-Dominic Bucescu, Iaşi

Soluţie. Calculând, obţinem că $E(x) = \dfrac{-2(x+2)}{(x-2)(x-4)}$. Fie $x = 2k \in A$; cum $E(x) = \dfrac{-(k+1)}{(k-1)(k-2)} \in \mathbb{Z}$ şi $k \in \mathbb{N}$, avem în mod necesar $(k-1)(k-2) \leq k+1$, de unde $k^2 - 4k + 1 \leq 0$, sau $(k-2)^2 \leq 3$, i.e. $|k-2| \leq \sqrt{3}$, deci $k \in \{0,1,2,3\}$, ceea ce implică $x \in \{0,2,4,6\}$. Însă $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2, \pm 4\}$, iar dintre numerele $E(0)$ şi $E(6)$ este întreg numai al doilea; rezultă că $A = \{6\}$. Fie acum $x = 2l+1 \in B$; deoarece $E(x) = \dfrac{-2(2l+3)}{(2l-1)(2l-3)} \in \mathbb{N}$, urmează că $\begin{cases} 2l-1 \mid 2l+3 \\ 2l-3 \mid 2l+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2l-1 \mid 4 \\ 2l-3 \mid 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l \in \{0,1\} \\ l \in \{0,1,2,3\} \end{cases}$. Obţinem ca posibile valori $x \in \{1,3\}$ şi, prin verificare, $B = \{3\}$. Concluzia este acum imediată.

VII. 22. *Să se arate că numărul* $A = 12 + 12^3 + 12^5 + ... + 12^{2001}$ *se divide prin* 1716.

Gabriel Popa, Iaşi

Soluţia I (dată de autor). Deoarece $1716 = 11 \cdot 12 \cdot 13$ cu factorii relativ primi şi este evident că $A \vdots 12$, rămâne să arătăm că $A \vdots 11$ şi $A \vdots 13$. Observăm că A este o sumă cu 1001 termeni, iar $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Atunci:

$$\begin{aligned} A - 1001 &= (12-1) + \left(12^3 - 1\right) + \left(12^5 - 1\right) + \ldots + \left(12^{2001} - 1\right) = M_{11} \\ A + 1001 &= (12+1) + \left(12^3 + 1\right) + \left(12^5 + 1\right) + \ldots + \left(12^{2001} + 1\right) = M_{13}, \end{aligned}$$

unde am folosit faptul că $12^{2k+1} - 1 = (12-1)\left(12^{2k} + \ldots + 12 + 1\right) = M_{11}$, iar $12^{2k+1} + 1 = (12+1)\left(12^{2k} - \ldots - 12 + 1\right) = M_{13}$.

Soluţia II (dată de eleva Ştefana Brănişteanu). Observăm că $1716 = 12 \cdot 143$ şi $12^2 = 143 + 1$. Avem:

$$A = 12\left(1 + 12^2 + 12^4 + \ldots + 12^{2000}\right) = 12\left[1 + (143+1) + (143+1)^2 + \right.$$

$$+\ldots+(143+1)^{1000}\Big] = 12\,[1+(143+1)+(M_{143}+1)+\ldots+(M_{143}+1)] =$$
$$= 12\,(1001+M_{143}) = 12\,(7\cdot 143+M_{143}) = 12\cdot M_{143} = M_{1716}.$$

VII.23. *Intr-un reper cartezian xOy se consideră punctele $A(-a,a)$, $B(b,a)$, $C(0,c)$ şi $D(0,a)$ cu $a>0$, $b>0$, $c>0$. Să se compare $CA+CB+CO$ cu $DA+DB+DC+DO$.*

Maria Zălinescu, Iaşi

Soluţie. Dacă $a>c$, atunci $DC+CO=DO$. Deoarece $DA+DC>CA$ şi $DB+DC>CB$, atunci $DA+DB+2DC>CA+CB$, deci $DA+DB+DC+ +(DC+CO)>CA+CB+CO$, adică $DA+DB+DC+DO>CA+CB+CO$. Dacă $a<c$, procedând analog, obţinem că $DA+DB+DC+DO<CA+CB+CO$. Dacă $a=c$, cele două sume sunt evident egale. Problema poate fi rezolvată şi utilizând formula distanţei între două puncte.

VII.24. *Să se arate că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ are loc inegalitatea*

$$(n+1)^{n-1}\le (n!)^2\le (n+1)^{n-1}\left(\frac{n+2}{3}\right)^n$$

(s-a notat $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$).

Ünige Bencze, Braşov

Soluţie. Autoarea foloseşte inegalitatea $H\le G\le A$ între mediile armonică, geometrică şi aritmetică, luând ca numere $a_k=k\,(k+1)$, $k=\overline{1,n}$, şi obţine inegalitatea dorită. Se pot obţine limitări mai "strânse" pentru $(n!)^2$.

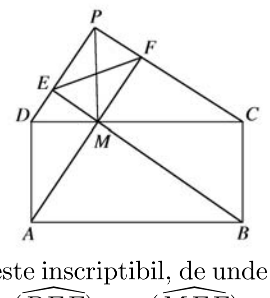
VII.25. *Fie $ABCD$ un dreptunghi, iar $M\in(CD)$ un punct oarecare. Perpendiculara din D pe BM intersectează perpendiculara din C pe AM în punctul P. Să se arate că $PM\perp CD$.*

Constantin Cocea, Iaşi

Soluţia I. Fie P' punctul în care perpendiculara din D pe MB taie perpendiculara în M pe CD, iar P'' punctul în care perpendiculara din C pe MA taie perpendiculara în M pe CD. Problema ar fi rezolvată dacă am arăta că $P'=P''$.

Însă $\triangle P'MD\sim\triangle MCB$, fiind ambele dreptunghice, iar $\widehat{P'DM}\equiv\widehat{MBC}$ ca unghiuri cu laturile respectiv perpendiculare; rezultă că $\dfrac{P'M}{MD}=\dfrac{MC}{CB}$. Analog, din $\triangle P''MC\sim\triangle MDA$ obţinem $\dfrac{P''M}{MC}=\dfrac{MD}{DA}$. De aici, $P'M\cdot CB=P''M\cdot DA$ şi fiindcă $CB=DA$, avem $P'M=P''M$; cum P', P'' se află în acelaşi semiplan faţă de CD, urmează că $P'=P''$.

Soluţia II (dată de Edgar Kern, Braşov). Fie $\{E\}=DP\cap BM$ şi $\{F\}= =CP\cap AM$. Din asemănările imediate $\triangle DEM\sim\triangle BCM$ şi $\triangle CFM\sim\triangle ADM$ rezultă că $\dfrac{EM}{CM}=\dfrac{DM}{BM}$, respectiv $\dfrac{FM}{DM}=\dfrac{CM}{AM}$; urmează de aici că $\dfrac{EM}{AM}=\dfrac{FM}{BM}$ şi atunci $\triangle EFM\sim\triangle AMB$. În consecinţă $\widehat{MEF}\equiv\widehat{MAB}$ şi cum $\widehat{MAB}\equiv\widehat{FMC}$ (corespondente),



avem $\widehat{MEF}\equiv\widehat{FMC}$. Pe de altă parte, patrulaterul $MFPE$ este inscriptibil, de unde $\widehat{PEF}\equiv\widehat{PMF}$. Obţinem astfel că $m(\widehat{PMF})+m(\widehat{FMC})=m(\widehat{PEF})+m(\widehat{MEF})= 90^\circ$, deci $PM\perp CD$.

Clasa a VIII-a

VIII.21. *Dacă* $f : \{0,1,2,\ldots,10\} \to \{0,1,2,\ldots,10\}$ *este dată prin* $f(x) = ax+b$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, *atunci* $f(5)=5$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Evident că $x_1 \neq x_2$ dacă şi numai dacă $f(x_1) \neq f(x_2)$ şi deci $\{f(0), f(1),\ldots,f(10)\} = \{0,1,\ldots,10\}$. Atunci $f(0)+f(1)+\ldots+f(10) = 1+2+\ldots+10$, adică $a(1+2+\ldots+10)+11b = 55$, de unde rezultă că $5a+b=5$, i.e. $f(5)=5$.

VIII.22. *Fie* $a>0$, $b>0$. *Arătaţi că*

$$\frac{1}{a^4}+\frac{1}{4a^3b}+\frac{1}{6a^2b^2}+\frac{1}{4ab^3}+\frac{1}{b^4} \geq \frac{128}{3(a+b)^4}$$

Lucian Tuţescu, Craiova

Soluţie. Avem că

$$\left(a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\right)\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{4a^3b}+\frac{1}{6a^2b^2}+\frac{1}{4ab^3}+\frac{1}{b^4}\right) =$$
$$= 5+\left(\frac{1}{4}+4+\frac{2}{3}+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{1}{6}+1+6\right)\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{4}+4\right)\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}\right)+\left(\frac{a^4}{b^4}+\frac{b^4}{a^4}\right) \geq \frac{128}{3},$$

deoarece $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2$, $\forall x,y>0$. Concluzia se obţine acum ţinând seama de faptul că $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$. Egalitatea este atinsă pentru $a=b$.

VIII.23. *Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia*

$$\frac{x^2}{|x+1|} = \frac{x-4}{x+1} + \left||x|-1\right|.$$

Mihai Crăciun, Paşcani

Soluţie. Explicităm modulele pe fiecare dintre intervalele $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $[0,1)$, $[1,\infty)$ şi rezolvăm ecuaţiile obţinute. În final, găsim două soluţii: -5 şi 5.

VIII.24. *Arătaţi că* $\alpha \in (0,1)$, *ştiind că numărul real* α *este o soluţie a ecuaţiei*

$$a_1x^{2k_1+1}+a_2x^{2k_2+1}+\ldots+a_nx^{2k_n+1} = b,$$

unde $a_1,a_2,\ldots,a_n,b \in (0,\infty)$; $k_1,k_2,\ldots,k_n \in \mathbb{N}$ *şi* $a_1+a_2+\ldots+a_n > b$ *(generalizare a problemei VIII.17 din nr.1/2001).*

Mihaela Negrea, Braşov

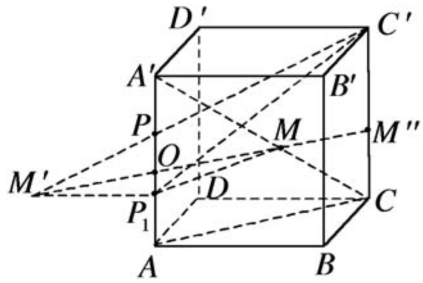
Soluţie. Dacă $\alpha \geq 1$, atunci $a_1\alpha^{2k_1+1}+\ldots+a_n\alpha^{2k_n+1}-b \geq a_1+\ldots+a_n-b > 0$, deci α nu poate fi soluţie a ecuaţiei date. Dacă $\alpha \leq 0$, atunci $a_1\alpha^{2k_1+1}+\ldots+a_n\alpha^{2k_n+1}-b \leq -b < 0$ şi din nou obţinem că α nu poate fi soluţie. Rezultă că $\alpha \in (0,1)$.

VIII.25. *Fie cubul* $ABCDA'B'C'D'$ *şi* $M \in [A'C]$ *cu proprietatea că* $\frac{MA'}{MC} = \frac{3}{2}$. *Să se determine un punct* $P \in [AA']$ *astfel încât suma* $PM+PC'$ *să fie minimă.*

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. Notăm cu M' simetricul lui M faţă de AA' şi fie $\{P\} = M'C' \cap AA'$. În acest caz, avem $PM+PC' = PM'+PC' = M'C'$. Dacă $P_1 \in [AA']$, $P_1 \neq P$, atunci $M'C' < M'P_1+P_1C' = MP_1+P_1C'$, deci P este punctul căutat. Să determinăm

PA'; pentru aceasta, fie $\{O\} = AA' \cap MM'$ şi $\{M''\} = CC' \cap MM'$. În $\triangle A'AC$ avem $MO \| AC$ şi atunci, conform teoremei fundamentale a asemănării, $\dfrac{OM}{AC} = \dfrac{A'O}{A'A}$, deci $OM = \dfrac{3AC}{5}$.



Analog, în $\triangle M'M''C'$ avem $OP \| C'M''$, deci $\dfrac{OP}{M''C'} = \dfrac{M'O}{M'M''}$, adică $OP \cdot M'M'' = = M''C' \cdot M'O$, de unde $OP \cdot \left(\dfrac{3AC}{5} + AC\right) = \dfrac{3AA'}{5} \cdot \dfrac{3AC}{5}$, prin urmare $OP = \dfrac{9}{40}AA'$. În final, $PA' = OA' - OP = \dfrac{3AA'}{5} - \dfrac{9AA'}{40} = \dfrac{3AA'}{8}$.

Clasa a IX-a

IX.21. *Să se stabilească care dintre afirmaţiile următoare:*
(i) $||\sin x| - |\sin y|| \leq |\sin (x - y)|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$;
(ii) $||\cos x| - |\cos y|| \leq |\cos (x - y)|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$;
(iii) $|\sin (x - y)| \leq |\sin x - \sin y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$;
(iv) $|\cos (x - y)| \leq |\cos x - \cos y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$
este adevărată şi care este falsă.

Gheorghe Costovici, Iaşi

Soluţie. Deoarece $\sin x = \sin (x - y + y) = \sin (x - y) \cos y + \cos (x - y) \sin y$, urmează că $|\sin x| \leq |\sin (x - y)| + |\sin y|$. Analog, $|\sin y| \leq |\sin (y - x)| + |\sin x|$ şi din aceste două relaţii obţinem că $-|\sin (x - y)| \leq |\sin x| - |\sin y| \leq |\sin (x - y)|$, ceea ce arată că (i) este adevărată.

Afirmaţia (ii) este falsă: pentru $x = \dfrac{\pi}{2}$ şi $y = 0$, obţinem contradicţia $1 \leq 0$. De asemenea, (iii) este falsă (putem lua $x = \dfrac{\pi}{2}$, $y = \dfrac{\pi}{4}$ şi obţinem $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, absurd), iar (iv) este tot falsă (considerând $x = y$, am avea $1 \leq 0$).

IX.22. *Să se arate că măcar una dintre ecuaţiile:* $ax^2 + 2\sqrt{3}bcx + bc(a + b + c) = 0$, $bx^2 + 2\sqrt{3}cax + ca(a + b + c) = 0$, $cx^2 + 2\sqrt{3}abx + ab(a + b + c) = 0$, *unde* $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, *admite rădăcini reale.*

Mihail Bencze, Braşov

Soluţie. Dacă, prin absurd, nici una dintre ecuaţii nu ar avea soluţiile reale, atunci toate ar avea discriminantul negativ, deci $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 < 0$. Însă $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 12\left[a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - abc(a + b + c)\right] = 6\left[(ab - ac)^2 + (ab - bc)^2 + (bc - ac)^2 \geq 0\right]$, de unde concluzia.

IX.23. *Fie* $a \in \mathbb{R}$ *şi o funcţie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ce satisface relaţia*

$$f(f(x + y) + y) = x + f(ay), \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

1° *Să se arate că* f *este injectivă.*
2° *Să se determine funcţiile* f *ce satisfac condiţia de mai sus.*

Dan Popescu, Suceava

Soluţie. 1° Luând $y = 0$ în relaţia din ipoteză, obţinem că $f(f(x)) = x + f(0)$,

$\forall x \in \mathbb{R}$. Dacă $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sunt astfel încât $f(x_1) = f(x_2)$, atunci $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$, deci $x_1 + f(0) = x_2 + f(0)$, adică $x_1 = x_2$; rezultă că f este injectivă.

$2°$ Deoarece $f(f(0)) = 0 + f(0) = f(0)$ şi f este injectivă, urmează că $f(0) = 0$ şi atunci $f(f(x)) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Pentru $x = 0$ în relaţia din ipoteză obţinem $f(f(y) + y) = f(ay)$, $\forall y \in \mathbb{R}$, deci $f(y) + y = ay$, $\forall y \in \mathbb{R}$, i.e. $f(y) = (a-1)y$, $\forall y \in \mathbb{R}$. Din aceasta şi din faptul că $\forall y \in \mathbb{R}$, $f(f(y)) = y$ deducem că $(a-1)^2 = 1$, adică $a \in \{0, 2\}$. Prin urmare, $f(x) = -x$, dacă $a = 0$; $f(x) = x$, dacă $a = 2$ şi ecuaţia funcţională nu are soluţii în rest.

IX.24. *a) Fie $x, y, z, t \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$ cu $x + y + z + t = 1$. Arătaţi că $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 \geq \frac{1}{16}$.*

b) Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \left(-\frac{2}{n}, \infty\right)$ cu $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$. Arătaţi că $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 \geq \frac{1}{n^2}$.

Mihai Bogdan Ion, elev, Craiova

Soluţie. Vom demonstra direct punctul *b*). Avem:

$$x_1 > -\frac{2}{n} \Leftrightarrow \frac{n}{2}x_1 + 1 > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{n}{2}x_1 + 1\right)\left(x_1 - \frac{1}{n}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{2}x_1^3 - \frac{3}{2n}x_1 + \frac{1}{n^2} \geq 0 \Leftrightarrow x_1^3 \geq \frac{3nx_1 - 2}{n^3},$$

cu egalitate pentru $x_1 = \frac{1}{n}$. Scriind inegalităţile analoage şi adunând cele n relaţii membru cu membru, obţinem concluzia; egalitatea are loc pentru $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{1}{n}$.

IX.25. *Fie ABC un triunghi oarecare şi punctele A_1, B_1, C_1 pe laturile (BC), (CA) şi respectiv (AB). Dreptele AA_1, BB_1 şi CC_1 intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în punctele A_2, B_2 şi respectiv C_2. Să se arate că*

$$\frac{AA_1}{A_1A_2} + \frac{BB_1}{B_1B_2} + \frac{CC_1}{C_1C_2} \geq \frac{2}{3}\frac{p^2}{Rr}.$$

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

Soluţia autorului. Utilizând relaţia lui Stewart şi puterea punctului, avem:

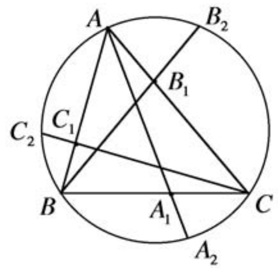
$$\frac{AA_1}{A_1A_2} = \frac{AA_1^2 \cdot BC}{AA_1 \cdot A_1A_2 \cdot BC} = \frac{AB^2 \cdot A_1C + AC^2 \cdot A_1B - A_1B \cdot A_1C \cdot BC}{A_1B \cdot A_1C \cdot BC} =$$

$= \frac{c^2}{ax} + \frac{b^2}{a(a-x)} - 1$, unde $x = A_1B$. Considerând în inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz $a_1 = \frac{c}{\sqrt{x}}$, $a_2 = \frac{b}{\sqrt{a-x}}$, $b_1 = \sqrt{x}$, $b_2 = \sqrt{a-x}$, obţinem:

$$\frac{AA_1}{A_1A_2} = \frac{1}{a}\left[\left(\frac{c}{\sqrt{x}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a-x}}\right)^2\right] - 1 \geq \frac{(b+c)^2}{a^2} - 1 = \frac{4p(p-a)}{a^2},$$

cu egalitate dacă $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$, i.e. $x = \frac{ac}{b+c}$, adică A_1 este piciorul bisectoarei din A.

Fără a restrânge generalitatea, presupunem $a \geq b \geq c$; atunci $p - a \leq p - b \leq p - c$ şi $\frac{1}{a^2} \leq \frac{1}{b^2} \leq \frac{1}{c^2}$. Aplicând inegalitatea lui Cebâşev, obţinem:



$$\frac{AA_1}{A_1A_2} + \frac{BB_1}{B_1B_2} + \frac{CC1}{C_1C_2} \geq 4p\left[\frac{p-a}{a^2} + \frac{p-b}{b^2} + \frac{p-c}{c^2}\right] \geq$$

$$\geq \frac{4p}{3}\left[\sum (p-a)\right]\left[\sum \frac{1}{a^2}\right] = \frac{4p^2}{3}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq$$

$$\geq \frac{4p^2}{3}\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}\right) = \frac{4p^2}{3} \cdot \frac{2p}{abc} = \frac{8p^3}{3 \cdot 4RS} = \frac{2p^2}{3Rr},$$

cu egalitate pentru $a = b = c$.

Inegalitatea demonstrată este mai tare decât inegalitatea cunoscută $\frac{AA_1}{A_1A_2} + \frac{BB_1}{B_1B_2} + \frac{CC_1}{C_1C_2} \geq 9$, deoarece $\frac{2p^2}{3Rr} = \frac{8p^3}{3abc} \geq \frac{8p^3}{3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3} = 8p^3 \cdot \frac{9}{8p^3} = 9$.

Clasa a X-a

X.21. *Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu $a_1 \in \mathbb{N}^*$ şi raţia $r = 19$. Să se cerceteze dacă, pornind de la şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ (unde b_n este suma cifrelor termenului a_n), putem permuta termenii acestuia încât să se obţină o progresie geometrică.*

Lucian-Georges Lăduncă, Iaşi

Soluţia I (dată de Gheorghe Iurea, Iaşi). Presupunem că $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică. Deoarece dintre numerele a_1, $a_1 + 19$, $a_1 + 38$ unul singur este divizibil cu 3, acestea conduc la trei numere din şirul (b_n): b_m, b_s, b_t, $m < s < t$, dintre care unul singur este divizibil cu 3.

Cum (b_n) este progresie geometrică avem: $b_s^{t-m} = b_t^{s-m} \cdot b_m^{t-s}$, egalitate imposibilă, deoarece un membru este divizibil cu 3, iar celălalt nu.

Soluţia II (dată de Ciprian Baghiu, Iaşi). Presupunem că (b_n) este o progresie geometrică de raţie q. Evident $q \in \mathbb{Q}_+^*$, şi fie $q = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}^*$, $(a, b) = 1$. Deoarece $b_1, b_1q, \ldots, b_1q^n, \ldots$ sunt numere naturale nenule şi $(a, b) = 1$, rezultă că $\frac{b_1}{b^n} \in \mathbb{N}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi atunci $b = 1$ iar $q = a \in \mathbb{N}^*$. Fie $q \neq 1$, deci $q \geq 2$; cum $2^{n-1} \geq n^2$ pentru $n \geq 7$ deducem că, pentru n suficient de mare, $b_1q^{n-1} \geq b_1 2^{n-1} \geq \geq b_1 n^r > a_1 + (n-1)r$, deci $b_n > a_n$. Contradicţie, întrucât pentru orice număr natural a_n, a_n depăşeşte suma cifrelor sale, adică $a_n \geq b_n$. Cazul $q = 1$ se analizează ca în soluţia III.

Soluţia III (în maniera autorului). Vom rezolva problema în cazul general în care $r \in \mathbb{N}^*$. Fie $a_1 = \overline{x_1x_2\ldots x_p}$ şi $r = \overline{y_1y_2\ldots y_k}$. Pentru n suficient de mare ($n > p$), $a_{10^n+1} = a_1 + 10^n r = \overline{y_1y_2\ldots y_k 0\ldots 0 x_1x_2\ldots x_p}$, deci $b_{10^n+1} = y_1 + \ldots + y_k + x_1 + \ldots + x_p$. Prin urmare, dacă $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică, atunci $q = 1$. Cum $b_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_p$ şi $b_{10^n+1} \neq b_1$ pentru n suficient de mare, rezultă că $q \neq 1$. În consecinţă, nu putem forma o progresie geometrică pornind de la şirul $(b_n)_{n\geq 1}$.

X.22. *Să se demonstreze că orice şir $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere reale care satisface* *relaţia* $\left|\dfrac{x_{m+1}x_n - x_{m+n}}{x_m x_n}\right| \le \dfrac{1}{m+n}$, $\forall m,n \in \mathbb{N}^*$, *este o progresie geometrică.*

Dan Popescu, Suceava

Soluţie. Pentru $m, n \in \mathbb{N}^*$ arbitrari, avem:

$$\left|\frac{x_{m+1}}{x_m} - \frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \left|\frac{x_{m+1}x_n - x_{m+n} + x_{m+n} + x_{n+1}x_m}{x_m x_n}\right| \le$$
$$\le \left|\frac{x_{m+1}x_n - x_{m+n}}{x_m x_n}\right| + \left|\frac{x_{n+1}x_m - x_{m+n}}{x_m x_n}\right| \le \frac{2}{m+n}.$$

Definim $y_n = \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ şi să dovedim că $y_n = q$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$; dacă ar exista $m, n \in \mathbb{N}^*$ cu $y_m \ne y_n$, atunci am avea $0 < a = |y_m - y_n| = |y_m - y_p + y_p - y_n| \le |y_m - y_p| + |y_p - y_n| \le \dfrac{2}{m+p} + \dfrac{2}{n+p} < \dfrac{4}{p}$, adică $p < \dfrac{4}{a}$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, deci $\mathbb{N}^*$ ar fi o mulţime majorată, absurd.

Notă. Înlocuind $x_n = x_1 q^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ în ipoteză, obţinem $\left|q\left(1 - \dfrac{1}{x_1}\right)\right| \le \dfrac{1}{m+n}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$, de unde $x_1 = 1$. Reciproc, dacă $(x_n)_{n\ge 1}$ este dat prin $x_n = q^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $(q \ne 0)$, condiţia din enunţ este verificată. Prin urmare, proprietatea din ipoteză caracterizează progrsiile geometrice cu $x_1 = 1$.

X.23. *Să se calculeze suma* $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)} C_n^k$.

Alina Crăciun, Paşcani

Soluţie. Deoarece $C_{n+2}^{k+2} = \dfrac{(n+2)(n+1)}{(k+2)(k+1)} C_n^k$, avem:

$$0 = (1-1)^{n+2} = \sum_{j=0}^{n+2} C_{n+2}^{j} (-1)^j = C_{n+2}^0 + C_{n+2}^1 (-1) + \sum_{j=2}^{n+2} C_{n+2}^{j} (-1)^j =$$
$$= 1 - (n+2) + \sum_{k=0}^{n} C_{n+2}^{k+2} (-1)^{k+2} = -(n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+2)(n+1)}{(k+2)(k+1)} C_n^k (-1)^k,$$

deci $n+1 = (n+2)(n+1) S_n$, de unde rezultă că $S_n = \dfrac{1}{n+2}$.

X.24. *Fie ecuaţia* $\dfrac{a^x}{\ln b} + \dfrac{b^x}{\ln a} = 0$, $0 < a < 1$, $b > 1$. *Să se arate că:*
(i) ecuaţia are o singură soluţie pe $\mathbb{R}$*,*
(ii) soluţia este negativă dacă şi numai dacă $ab > 1$.

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. (i) Ecuaţia dată se scrie echivalent $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = -\dfrac{\ln b}{\ln a}$. Cum $a \in (0,1)$ şi $b > 1$, atunci $-\dfrac{\ln b}{\ln a} > 0$, deci ecuaţia are o singură soluţie pe $\mathbb{R}$.

(ii) Deoarece $0 < \dfrac{a}{b} < 1$, pentru unica soluţie x, avem:

$$x < 0 \Leftrightarrow -\frac{\ln b}{\ln a} > 1 \Leftrightarrow \ln b + \ln a > 0 \Leftrightarrow \ln ab > 0 \Leftrightarrow ab > 1.$$

X.25. *Fie ABCD un tetraedru în care AB = CD şi BC = AD. Notăm cu*

A_1 punctul de pe sfera circumscrisă tetraedrului, diametral opus vârfului A. Să se demonstreze că $A_1C \perp BD$.

Constantin Cocea, Iaşi

Soluţie (dată de Mihaela Negrea, Braşov). Pentru fixarea ideilor, să presupunem că $BC \leq CD$; atunci $m(\widehat{BDC}) < 90°$. Din triunghiurile dreptunghice ADA_1 şi ABA_1 avem $A_1D = \sqrt{4R^2 - AD^2} = \sqrt{4R^2 - BC^2}$ şi $A_1B = \sqrt{4R^2 - AB^2} = \sqrt{4R^2 - CD^2}$; rezultă că $A_1B \leq A_1D$, deci $m(\widehat{BDA_1}) < 90°$. Dacă notăm cu T_1, T_2 proiecţiile pe BD ale punctelor C, respectiv A_1, urmează că $T_1, T_2 \in (DB$. Din teorema lui Pitagora generalizată obţinem:

$$DT_2 = \frac{BD^2 + A_1D^2 - A_1B^2}{2BD} = \frac{BD^2 + 4R^2 - BC^2 - \left(4R^2 - CD^2\right)}{2BD} = \frac{BD^2 + CD^2 - BC^2}{2BD} = DT_1,$$

deci $T_1 = T_2 = T$ şi $A_1T \perp BD$. Atunci $(A_1TC) \perp BD$, de unde $A_1C \perp BD$.

Clasa a XI-a

XI.21. *Să se rezolve sistemul de ecuaţii:*

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 0,\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \ldots,\ 2x_{2000} + x_{2001} - x_1 = 0,\ 2x_{2001} + x_1 - x_2 = 0.$$

Gabriel Popa, Iaşi

Soluţia I. Notăm $y_1 = 2x_1 - x_2, y_2 = 2x_2 - x_3, \ldots, y_{2001} = 2x_{2001} - x_1$; sistemul se rescrie:

$$y_1 + y_2 = 0,\ y_2 + y_3 = 0,\ \ldots,\ y_{2000} + y_{2001} = 0,\ y_{2001} + y_1 = 0.$$

Scăzând a doua ecuaţie din prima, a patra ecuaţie din a treia ş.a.m.d., obţinem $y_1 = y_3 = \ldots = y_{2001}$ şi folosind ultima ecuaţie deducem că $y_1 = 0$. Înlocuind, obţinem $y_n = 0, \forall n \in \{1, 2, \ldots, 2001\}$. De aici, $x_2 = 2x_1, x_3 = 2x_1, \ldots, x_{2001} = 2^{2000}x_1$ şi din ultima ecuaţie avem $2^{2001}x_1 - x_1 = 0$, deci $x_1 = 0$ şi atunci $x_2 = x_3 = \ldots = x_{2001} = 0$.

Soluţia II. Considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin relaţia de recurenţă $x_{n+2} = 2x_n + x_{n+1}, \forall n \geq 1$; termenul general al acestui şir este $x_n = A\cdot(-1)^n + B\cdot 2^n$, $n \geq 1$ unde A şi B se exprimă în funcţie de x_1 şi x_2 prin $A = \frac{1}{3}(x_2 - 2x_1)$, $B = \frac{1}{6}(x_1 + x_2)$. Înlocuind în ultimele două ecuaţii x_{2000} şi x_{2001}, se obţine un sistem în necunoscutele x_1 şi x_2, omogen cu determinantul nenul. Deci, $x_1 = x_2 = 0$ şi atunci $x_n = 0$, $\forall n \in \{1, 2, \ldots, 2001\}$.

Notă. Dacă am fi avut un număr par de necunoscute, sistemul obţinut în x_1 şi x_2 ar fi fost nedeterminat: $x_2 = -x_1$. Se obţine $x_1 = x_3 = \ldots = x_{2k-1} = \alpha$, $x_2 = x_4 = \ldots = x_{2k} = -\alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

XI.22. *Şirul (x_n) se defineşte prin relaţiile $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{1}{2}$ şi $x_{n+2} = x_{n+1}x_n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se afle expresia termenului general x_n şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.*

Adrian Corduneanu, Iaşi

Soluţie. Se verifică imediat prin inducţie că $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Notând $y_n = \ln x_n$, prin logaritmarea relaţiei date obţinem pentru $(y_n)_{n\geq 0}$ recurenţa $y_{n+2} = y_{n+1} + 2y_n$, cu $y_0 = \ln 1 = 0$, $y_1 = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$. De aici, $y_n = [(-1)^n - 2^n]\ln\sqrt[3]{2}$ şi deci

$x_n = e^{y_n} = \left(\sqrt[3]{2}\right)^{(-1)^n - 2^n}$; rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

XI.23. *Să se arate că nu există funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue şi neconstante astfel încât $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Z}$.*

Constantin Cocea, Iaşi

Soluţie. Fie $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ şi $(x_n)_n \subset \mathbb{Q}$, $x_n \to x_0$. Cum f continuă, avem că $f(x_n) \to f(x_0)$ şi deoarece $f(x_n) \in \mathbb{Z}$, obţinem că $f(x_0) \in \mathbb{Z}$, deci $f(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Z}$. Rezultă că $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{Z}$ şi cum f continuă, urmează că $f(\mathbb{R}) = \{c\}$, cu $c \in \mathbb{Z}$, adică f este constantă.

XI.24. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că există $(a_n)_n$ un şir fără limită astfel încât $(f(a_n))_n$ este convergent. Arătaţi că f nu este injectivă.*

Ovidiu Munteanu, student, Braşov

Soluţie. Cum f este continuă, $f(\mathbb{R})$ este un interval. Să presupunem prin absurd că f este injectivă. Folosind şi continuitatea, rezultă că f este strict monotonă şi atunci funcţia $f^{-1} : f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ este strict monotonă şi continuă.

Fie $l \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = l$. Dacă $l \in f(\mathbb{R})$, din continuitatea lui f^{-1} urmează că există $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} f^{-1}(f(a_n)) = f^{-1}(l)$, contrar ipotezei. Dacă $l \notin f(\mathbb{R})$, cum f^{-1} este strict monotonă, rezultă că există $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} f^{-1}(f(a_n))$ în $\overline{\mathbb{R}}$, contrar ipotezei.

XI.25. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivata sa având proprietatea că $\forall (x_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $(f'(x_n))_{n\geq 1}$ este convergent urmează că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent. Să se studieze monotonia funcţiei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $g = f' \circ f'$.*

Dumitru Gherman, Paşcani

Soluţie. Arătăm mai întâi că funcţia f' este injectivă. În caz contrar, există $a \neq b$ cu $f'(a) = f'(b)$; definim şirul $(x_n)_n$ prin $x_n = \begin{cases} a, & n \text{ impar} \\ b, & n \text{ par} \end{cases}$. Atunci, există $\lim\limits_{n\to\infty} f'(x_n) = f'(a) = f'(b)$, însă nu există limita şirului $(x_n)_n$, ceea ce ar contrazice ipoteza. Rămâne, deci, că f' este injectivă. Cum f' are proprietatea lui Darboux, rezultă că este strict monotonă. În consecinţă funcţia $g = f' \circ f'$ este strict crescătoare.

Clasa a XII-a

XII.21. *Să se determine funcţiile continue şi crescătoare $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ care satisfac condiţia*

$$\int_0^1 f(\sin x)\,dx + \int_0^1 f(\ln(1+x))\,dx = 1 + \int_0^1 f^2(x)\,dx,\ \forall x \in [0,1].$$

Dumitru Gherman, Paşcani

Soluţie. Pentru $x \in [0,1]$ avem $0 \leq \sin x \leq x \leq 1$ şi $0 \leq \ln(1+x) \leq x \leq 1$. Cum f este crescătoare, rezultă că $f(\sin x) \leq f(x)$ şi $f(\ln(1+x)) \leq f(x)$ de unde, prin integrare, obţinem $\int_0^1 f(\sin x)\,dx + \int_0^1 f(\ln(1+x))\,dx \leq 2\int_0^1 f(x)\,dx$, sau $1 + \int_0^1 f^2(x)\,dx - 2\int_0^1 f(x)\,dx \leq 0$, adică $\int_0^1 [f(x)-1]^2\,dx \leq 0$. Cum f este continuă, rezultă că $f(x) = 1$, $\forall x \in [0,1]$, funcţie care în mod evident satisface condiţia din ipoteză.

XII.22. *Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că există $L \geq 0$ astfel ca*

$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$, $\forall x, y \in [0,1]$. *Să se arate că*

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx - \left[\int_0^1 f(x)\,dx\right]^2 \leq \frac{L^2}{12}.$$

Dan Ştefan Marinescu, Hunedoara

Soluţie. Pentru $\forall x, y \in [0,1]$, avem:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y| \Leftrightarrow [f(x) - f(y)]^2 \leq L^2 (x-y)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f^2(x) - 2f(x)f(y) + f^2(y) \leq L^2\left(x^2 - 2xy + y^2\right).$$

Fixând $y \in [0,1]$ şi integrând în raport cu x pe intervalul $[0,1]$, obţinem:

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx - 2f(y)\int_0^1 f(x)\,dx + f^2(y) \leq L^2\left(\frac{1}{3} - y + y^2\right).$$

Integrând în raport cu y pe $[0,1]$, vom avea:

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx - 2\int_0^1 f(x)\,dx \int_0^1 f(y)\,dy + \int_0^1 f^2(y)\,dy \leq L^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right),$$

de unde $\int_0^1 f^2(x)\,dx - \left[\int_0^1 f(x)\,dx\right]^2 \leq \dfrac{L^2}{12}$.

XII.23. *a) Să se arate că $\hat{x} \in \mathbb{Z}_n$ este inversabil dacă şi numai dacă $\exists f \in \mathbb{Z}_n[X]$ astfel încât $f(\hat{0}) = \hat{0}$ şi $f(\hat{x}) = \hat{1}$.*

b) Să se arate că există $f \in \mathbb{Z}_n[X]$ astfel încât $f(\hat{0}) = \hat{0}$ şi $f(\hat{x}) = \hat{1}$, $\forall \hat{x} \in \mathbb{Z}_n$, $\hat{x}$ inversabil.

***

Soluţie. *a)* Fie $\widehat{x} \in U(\mathbb{Z}_n)$; definim $f \in \mathbb{Z}_n[X]$, $f(X) = \widehat{x}^{-1}X$, polinom care are proprietăţile că $f(\widehat{0}) = \widehat{0}$ şi $f(\widehat{x}) = \widehat{1}$. Reciproc, fie $\widehat{x} \in \mathbb{Z}_n$ şi $f \in \mathbb{Z}_n[X]$, $f(X) = \widehat{a}_0 X^m + \ldots + \widehat{a}_m$ astfel încât $f(\widehat{0}) = \widehat{0}$ şi $f(\widehat{x}) = \widehat{1}$. Atunci $\widehat{a}_m = \widehat{0}$ şi cum $f \neq \widehat{0}$, există $g \in \mathbb{Z}_n[X]$ cu $f(X) = X \cdot g(X)$. Pentru $\widehat{x}$, obţinem că $\widehat{x} g(\widehat{x}) = \widehat{1}$, adică $\widehat{x} \in U(\mathbb{Z}_n)$ şi $\widehat{x}^{-1} = g(\widehat{x})$.

b) Fie $U(\mathbb{Z}_n) = \{\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \ldots, \widehat{x}_k\}$; se ştie că $\widehat{x}_1 \widehat{x}_2 \cdots \widehat{x}_k = -\widehat{1}$. Atunci polinomul $f = (-1)^k \prod\limits_{i=1}^{k} (X - \widehat{x}_i) + \widehat{1}$ verifică toate condiţiile cerute.

XII.24. *Fie $(G, \cdot)$ un grup, $x, y \in G$ şi $m, n, k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x^{mn} = e$ şi $x^m y x^{-m} = y^k$, unde e este elementul neutru. Să se arate că $y^{k^n - 1} = e$ (generalizare a problemei XII.15 din nr. 2/2000).*

Mihaela Negrea şi Florin Popovici, Braşov

Soluţie. Avem:

$$y^{k^2} = \left(y^k\right)^k = \left(x^m y x^{-m}\right) \ldots \left(x^m y x^{-m}\right) = x^m y^k x^{-m} = x^m x^m y x^{-m} x^{-m} = x^{2m} y x^{-2m}.$$

Prin inducţie matematică se arată că $y^{k^j} = x^{jm} y x^{-jm}$, $\forall j \in \mathbb{N}^*$. Urmează că $y^{k^n} = x^{nm} y x^{-nm}$ şi folosind ipoteza obţinem $y^{k^n} = y$, de unde prin simplificare cu y rezultă concluzia.

XII.25. *Fie $(G, \cdot)$ un grup cu $n^2 - n + 1$ elemente astfel încât $f : G \to G$, $f(x) = x^n$ să fie endomorfism. Să se demonstreze că grupul G este abelian.*

Ovidiu Munteanu, student, Braşov

Soluţie. Avem $x^n y^n = (xy)^n = x(yx)^{n-1} y$, deci $x^{n-1} y^{n-1} = (yx)^{n-1}$. Atunci

$y^n x^n = (yx)^n = yx\,(yx)^{n-1} = yxx^{n-1}y^{n-1} = yx^n y^{n-1}$, de unde $x^n y^{n-1} = y^{n-1}x^n$. Astfel, rezultă că $x^{n(n-1)}y^{n(n-1)} = \left(x^{n-1}\right)^n (y^n)^{n-1} = (y^n)^{n-1}\left(x^{n-1}\right)^n = y^{n(n-1)} \times$ $\times x^{n(n-1)}$. Notând $m = \operatorname{ord} G$, avem că $m = n^2 - n + 1$, deci $n\,(n-1) = m-1$, adică $x^{m-1}y^{m-1} = y^{m-1}x^{m-1}$, ceea ce arată că $x^{-1}y^{-1} = y^{-1}x^{-1}$, $\forall x, y \in G$, şi atunci $xy = yx$, $\forall x, y \in G$.

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor din nr.2/2001

A. Nivel gimnazial

G1. *Trei elevi scriu câte un număr având* 2001 *cifre:* $A = \overline{a_{2001}a_{2000}\ldots a_2 a_1}$, $B = \overline{b_{2001}b_{2000}\ldots b_2 b_1}$, $C = \overline{c_{2001}c_{2000}\ldots c_2 c_1}$. *Să se arate că în scrierea acestor numere există trei poziţii* m, n *şi* p *astfel încât* $a_m = a_n = a_p$, $b_m = b_n = b_p$ *şi* $c_m = c_n = c_p$.

Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Să gândim cele trei numere scrise unele sub altele; citind pe verticală, obţinem astfel 2001 numere de câte trei cifre $\overline{a_k b_k c_k}$, $k = 1, 2, \ldots, 2001$. Aceste numere iau valori între 000 şi 999, aşadar 1000 de posibilităţi. Conform principiului cutiei, între cele 2001 numere sunt măcar trei egale: există m, n, p astfel încât $\overline{a_m b_m c_m} = \overline{a_n b_n c_n} = \overline{a_p b_p c_p}$, de unde concluzia.

G2. *Determinaţi* $m \in \mathbb{N}^*$ *maxim astfel încât* $\dfrac{1}{m}(a+3)(a+5)(a+7)(a+9)$ *să fie număr natural pentru orice* a *număr natural impar.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

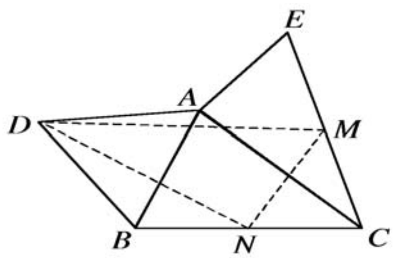
Soluţie. Cum $a = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, trebuie determinat numărul natural maxim m care divide $16\,(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Căutăm m de forma $16n$, cu $n \mid (k+2)(k+3)(k+4)(k+5)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Pentru $k = 0$ şi $k = 4$ obţinem că n este un divizor comun al numerelor $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ şi $6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$, deci $n \mid 2^3 \cdot 3$. Rezultă că valoarea maximă posibilă a lui n este 24. Pe de altă parte, produsul $(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)$ are patru factori consecutivi şi atunci se divide cu 3 şi cu 8, deci cu 24. Prin urmare, valoarea maximă căutată a lui m este $16 \cdot 24 = 384$.

G3. *Fie* ABC *un triunghi cu unghiul* A *ascuţit. Pe laturile* $[AB]$ *şi* $[AC]$ *se construiesc în exterior triunghiurile* ADB *echilateral, respectiv* AEC *dreptunghic cu* $m(\widehat{A}) = 90°$, $m(\widehat{E}) = 60°$. *Fie* M *şi* N *mijloacele segmentelor* $[CE]$, *respectiv* $[BC]$.

a) Arătaţi că $DM \equiv BE$;

b) Aflaţi măsurile unghiurilor $\triangle DMN$.

Adrian Zanoschi, Iaşi



Soluţie. *a*) Triunghiul AMC este isoscel, deci $m(\widehat{MAC}) = m(\widehat{ACM}) = 30°$. Atunci $m(\widehat{DAM}) = 60° + m(\widehat{A}) + 30° = 90° +$ $+ m(\widehat{A}) = m(\widehat{BAE})$. Dacă ţinem seama că $DA = BA$ şi $AM = AE$, urmează congruenţa triunghiurilor $\triangle ADM$ şi $\triangle ABE$ (L.U.L), deci $DM = BE$. *b*) $[MN]$ este linie mijlocie în $\triangle CBE$, deci $MN = \dfrac{BE}{2} = \dfrac{DM}{2}$ (1)

şi $\widehat{NMC} \equiv \widehat{BEC}$. Cum $\widehat{AMD} = \widehat{AEB}$ din congruenţa de triunghiuri dovedită la *a*), avem că $m(\widehat{AMD}) + m(\widehat{NMC}) = m(\widehat{AEM}) = 60°$, deci $m(\widehat{DMN}) = 120° - 60° = 60°$. Ţinând seama de (1), rezultă că $\triangle DMN$ este dreptunghic, cu unghiurile respectiv de $30°, 60°, 90°$.

G4. *Fie ABC un triunghi oarecare şi A_1, B_1, C_1 proiecţiile vârfurilor A, B şi respectiv C pe laturile opuse. Ce condiţii trebuie impuse triunghiului ABC pentru ca între $\triangle A_1B_1C_1$ şi $\triangle ABC$ să existe o asemănare?*

Paraschiva Bîrsan, Iaşi

Soluţie. În cazul în care $\triangle ABC$ este ascuţitunghic, între unghiurile sale şi cele ale triunghiului ortic există legăturile: $m(\widehat{A_1}) = 180° - 2m(\widehat{A})$, $m(\widehat{B_1}) = 180° - 2m(\widehat{B})$, $m(\widehat{C_1}) = 180° - 2m(\widehat{C})$. Între $\triangle ABC$ şi $\triangle A_1B_1C_1$ există şase posibile asemănări. Dacă, de exemplu, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, atunci $\widehat{A} \equiv \widehat{A_1}$, $\widehat{B} \equiv \widehat{B_1}$, $\widehat{C} \equiv \widehat{C_1}$, de unde $m(\widehat{A}) = 180° - 2m(\widehat{A})$ şi analoagele, deci $m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = 60°$. La aceeaşi concluzie se ajunge şi în celelalte cazuri.

Dacă $\triangle ABC$ este obtuzunghic cu $m(\widehat{A}) > 90°$, atunci $m(\widehat{A_1}) = 2m(\widehat{A}) - 180°$, $m(\widehat{B_1}) = 2m(\widehat{B})$, $m(\widehat{C_1}) = 2m(\widehat{C})$. Întrcât $A = A_1$ ar conduce la $m(\widehat{A}) = 2m(\widehat{A}) - 180° \Leftrightarrow m(\widehat{A}) = 180°$ şi analog $B = B_1 \Leftrightarrow m(\widehat{B}) = 0°$, $C = C_1 \Leftrightarrow m(\widehat{C}) = 0°$, situaţii inacceptabile, rămâne în esenţă de studiat subcazul: $\triangle ABC \sim \triangle B_1C_1A_1$. Obţinem $m(\widehat{A}) = 2m(\widehat{B})$, $m(\widehat{B}) = 2m(\widehat{C})$, $m(\widehat{C}) = 2m(\widehat{A}) - 180°$, deci $m(\widehat{C}) = \dfrac{180°}{7}$, $m(\widehat{B}) = 2m(\widehat{C})$, $m(\widehat{A}) = 4m(\widehat{C})$.

În concluzie, numai triunghiurile echilaterale şi cele cu unghiurile $\dfrac{\pi}{7}, \dfrac{2\pi}{7}$ şi $\dfrac{4\pi}{7}$ sunt asemenea cu propriile triunghiuri ortice.

G5. *Fiind dat triunghiul ABC, să se determine mulţimea punctelor P din spaţiu care satisfac condiţia $PA^2 + PB^2 = 2PC^2 + CA^2 + CB^2$.*

Dan Popescu, Suceava

Soluţie. Evident, C este punct al mulţimii căutate. Fie $P \neq C$ un punct al locului geometric definit în enunţ şi fie $\alpha = m(\widehat{PCM})$, unde M este mijlocul segmentului $[AB]$. Din teorema medianei, $PM^2 = \dfrac{1}{2}\left(PA^2 + PB^2\right) - \dfrac{1}{4}AB^2$ şi $CM^2 = \dfrac{1}{2}\left(CA^2 + CB^2\right) - \dfrac{1}{4}AB^2$. Însă conform teoremei cosinusului aplicată în $\triangle PCM$, avem $PM^2 = PC^2 + CM^2 - 2PC \cdot CM \cdot \cos\alpha$. De aici, prin înlocuire şi folosind ipoteza, obţinem că $PC \cdot CM \cdot \cos\alpha = 0$, deci P aparţine planului π ce conţine punctul C şi este perpendicular pe CM. Se verifică faptul că orice punct al planului π satisface condiţia din ipoteză.

B. Nivel liceal

L1. *Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemul de ecuaţii:*

$$x^2 + \lambda y^2 = 1,\ u^2 + \lambda v^2 = 1,\ xu - \lambda yv = 0$$

în care x, y, u, v sunt necunoscute şi $\lambda > 0$ o constantă.

Adrian Corduneanu, Iaşi

Soluţie. Prima ecuaţie se poate scrie $x^2 + \left(\sqrt{\lambda}y\right)^2 = 1$, deci există $\varphi \in [0, 2\pi)$ astfel încât $x = \cos\varphi$, $\sqrt{\lambda}y = \sin\varphi$. Analog, găsim $u = \cos\psi$, $\sqrt{\lambda}v = \sin\psi$. Prin înlocuire în a treia ecuaţie, obţinem $\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi=0$, deci $\cos(\varphi+\psi)=0$, adică $\psi=\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)-\varphi$, $k\in\mathbb{Z}$. Atunci $u=\cos\psi=(-1)^k\sin\varphi$, iar $\sqrt{\lambda}v=\sin\psi=$ $=(-1)^k\cos\varphi$. Se verifică acum imediat că soluţiile sistemului sunt date de

$$x=\cos\varphi,\ y=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\varphi,\ u=(-1)^k\sin\varphi,\ v=\frac{(-1)^k}{\sqrt{\lambda}}\cos\varphi,\text{ cu }\varphi\in[0.2\pi)$$

L2. *Să se arate că* $\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{F_k}\geq\frac{4^n}{F_{2n}}$, *unde* $F_0=F_1=1$ *şi* $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$.

Mihail Bencze, Braşov

Soluţie. Se cunoaşte faptul că termenul general al şirului lui Fibonacci este dat de $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right)$, unde $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Atunci

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^kF_k=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\sum_{k=0}^{n}C_n^k\alpha^{k+1}-\sum_{k=0}^{n}C_n^k\beta^{k+1}\right]=$$

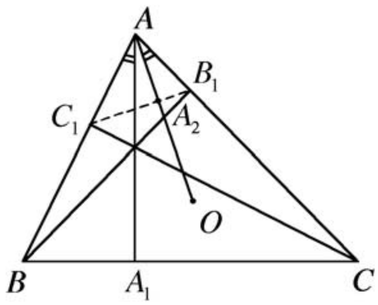
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\alpha(\alpha+1)^n-\beta(\beta+1)^n\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1}\right]=F_{2n}.$$

Folosind inegalitatea dintre media aritmetică ponderata şi media armonică ponderată, obţinem

$$\frac{\sum_{k=0}^{n}C_n^kF_k}{\sum_{k=0}^{n}C_n^k}\geq\frac{\sum_{k=0}^{n}C_n^k}{\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{F_k}}\Leftrightarrow\frac{F_{2n}}{2^n}\geq\frac{2^n}{\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{F_k}}\Leftrightarrow\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{F_k}\geq\frac{4^n}{F_{2n}}.$$

L3. *Fie ABC un triunghi ascuţitunghic, A_1, B_1 şi C_1 picioarele înălţimilor, O centrul cercului circumscris şi A_2, B_2, C_2 punctele de intersecţie a dreptelor OA, OB, OC cu dreptele B_1C_1, C_1A_1 şi respectiv A_1B_1. Să se arate că dreptele A_1A_2, B_1B_2 şi C_1C_2 sunt concurente.*

Constantin Cocea, Iaşi



Soluţie. Se ştie că AA_1, OA sunt simetrice faţă de bisectoarea unghiului A, deci $\widehat{OAC}\equiv$ $\equiv\widehat{A_1AB}$, $\widehat{OAB}\equiv\widehat{A_1AC}$. Atunci

$$\frac{A_2B_1}{A_2C_1}=\frac{\operatorname{tg}\widehat{OAC}}{\operatorname{tg}\widehat{OAB}}=\frac{\operatorname{tg}\widehat{A_1AB}}{\operatorname{tg}\widehat{A_1AC}}=\frac{\operatorname{ctg}B}{\operatorname{ctg}C}.$$

Rezultă de aici că

$$\frac{A_2B_1}{A_2C_1}\cdot\frac{B_2C_1}{B_2A_1}\cdot\frac{C_2A_1}{C_2B_1}=\frac{\operatorname{ctg}B}{\operatorname{ctg}C}\cdot\frac{\operatorname{ctg}C}{\operatorname{ctg}A}\cdot\frac{\operatorname{ctg}A}{\operatorname{ctg}B}=1,$$

şi atunci având în vedere reciproca teoremei lui Ceva aplicată în $\triangle A_1B_1C_1$, am probat concurenţa dreptelor A_1A_2, B_1B_2 şi C_1C_2.

L4. *Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie primitivabilă astfel încât $|f(x)|\leq a<1$, $\forall x\in\mathbb{R}$, F o primitiva a sa şi $b\in\mathbb{R}$, $a<b$. Să se arate că:*

(i) există o unică funcţie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $F(x+g(x))=x+bg(x)$, $x\in\mathbb{R}$;

(ii) funcţia g este continuă şi derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Dan Ştefan Marinescu, Hunedoara şi Ioan Şerdean, Orăştie

Soluţie (dată de Gheorghe Iurea, Iaşi). Pentru $x \in \mathbb{R}$ fixat considerăm funcţia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = F(x+t) - bt$. Avem $\varphi'(t) = f(x+t) - b$ şi atunci $\varphi'(t) \leq a - b$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Cum $a < b$ rezultă $\varphi'(t) < 0$, deci φ este strict descrescătoare (1). De asemenea pentru $t > 0$ rezultă $\int_0^t \varphi'(x)\,dt \leq \int_0^t (a-b)\,dx$, de unde

$$\varphi(t) \leq \varphi(0) + (a-b)t,\ t > 0, \tag{2}$$

iar pentru $t < 0$ rezultă $\int_t^0 \varphi'(x)\,dx \leq \int_t^0 (a-b)\,dx$, de unde

$$\varphi(t) \geq (a-b)t + \varphi(0),\ t < 0. \tag{3}$$

Din (2) şi (3) rezultă $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = -\infty$ şi $\lim\limits_{t\to-\infty} \varphi(t) = \infty$ şi folosind (1) deducem că φ este bijectivă. Prin urmare $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists t_x \in \mathbb{R}$, t_x unic astfel ca: $\varphi(t_x) = x$. Funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = t_x$ este funcţia căutată. Cum $\varphi'(t) \neq 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(x) = t_x = \varphi^{-1}(x)$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

L5. *Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii continue, f pară şi g impară. Dacă graficul lui f admite asimptota orizontală $y = b \in \mathbb{R}$, calculaţi limitele:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{-n}^{n} \frac{f(x)}{1+e^{g(x)}}dx, \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{-n}^{n} \frac{e^{x^2} \sin e^{-x^2}}{1+e^{x^3}}dx\ .$$

Dumitru Gherman, Paşcani

Soluţie. Efectuând pe parcurs schimbarea de variabilă $x = -t$, avem

$$\int_{-n}^{n} \frac{f(x)\,dx}{1+e^{g(x)}} = \int_{-n}^{0} \frac{f(x)\,dx}{1+e^{g(x)}} + \int_{0}^{n} \frac{f(x)\,dx}{1+e^{g(x)}} = \int_{0}^{n} \frac{e^{g(t)} f(t)}{1+e^{g(t)}}dt + \int_{0}^{n} \frac{f(x)\,dx}{1+e^{g(x)}} = \int_{0}^{n} f(x)\,dx.$$

Aplicând criteriul lui Stolz-Cesaro, obţinem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{-n}^{n} \frac{f(x)}{1+e^{g(x)}}dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{0}^{n} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \left[\int_{0}^{n+1} f(x)\,dx - \int_{0}^{n} f(x)\,dx \right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{n}^{n+1} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} f(c_n) = b, \text{ (unde } c_n \in (n, n+1)\text{, deci } \lim_{n\to\infty} c_n = \infty).$$

Pentru a calcula a doua limită se utilizează rezultatul obţinut pentru $f(x) = e^{x^2} \sin(e^{-x^2})$ şi $g(x) = x^3$ şi se găseşte că valoarea ei este 1.