Notă. Am primit o soluţie bazată pe *Teorema convergenţei dominate a lui Lebesque*, din partea d-lui **Moubinool Omarjee**, Paris.

XII.180. *Fie p un număr natural prim, $p \equiv 1$ (mod 5). Arătaţi că ecuaţia $x^2 = \widehat{5}$ are soluţii în $\mathbb{Z}_p$.*

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

Soluţie. Fie $k \in \mathbb{N}^*$ pentru care $p = 5k + 1$ şi fie g un generator al grupului ciclic $(U(\mathbb{Z}_p), \cdot)$, care are ordinul $p-1$. Avem: $g^{p-1} = \widehat{1} \Rightarrow g^{5k} - \widehat{1} = \widehat{0} \Rightarrow (g^k - \widehat{1})(g^{4k} + g^{3k} + g^{2k} + g^k + \widehat{1}) = \widehat{0} \Rightarrow g^{4k} + g^{3k} + g^{2k} + g^k + \widehat{1} = \widehat{0}$ (cum ord$g = p-1$, avem că $g^k - \widehat{1} \neq \widehat{0}$) $\Rightarrow (\widehat{2}g^{2k} + g^k + \widehat{2})^2 - \widehat{5} \cdot g^{2k} = \widehat{0} \Rightarrow (g^{-k}(\widehat{2}g^{2k} + g^k + \widehat{2}))^2 - \widehat{5} = \widehat{0} \Rightarrow (\widehat{2}g^k + \widehat{2}g^{-k} + \widehat{1})^2 = \widehat{5}$. În concluzie, ecuaţia $x^2 = \widehat{5}$ are în $\mathbb{Z}_p$ soluţia $x = \widehat{2}g^k + \widehat{2}g^{-k} + \widehat{1}$.

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor propuse în nr. 1/2017

A. Nivel gimnazial

Notă. D-l **Titu Zvonaru**, autorul problemei **G312**, observă că numitorul $3ab - bc - ac$ nu este întoteauna pozitiv (de exemplu, pentru $a = b = 3, c = 5$, care sunt laturile unui triunghi, numitorul este negativ, iar pentru $a = b = 2, c = 3$ este egal cu zero). Problema se repară dacă se impune în ipoteză condiţia ca latura c să fie cea mai mică.

G316. *Se consideră a pungi numerotate $1, 2, \ldots, a$, fiecare conţinând câte b monede, $b > a$. Masele tuturor monedelor se exprimă prin numere întregi şi, cu excepţia unei pungi, toate monedele au aceeaşi masă. În acea pungă se află numai monede false, fiecare având masa cu p mai mică decât masa unei monede adevărate, unde p nu este multiplu de $a - 1$. Folosind un cântar cu afişaj, determinaţi din trei cântăriri care este numărul pungii cu monede false.*

Geanina Hăvârneanu, Iaşi

Soluţie. Cântărim o monedă din prima pungă; fie k masa acesteia. Apoi, cântărim a monede, câte una din fiecare pungă; fie m masa lor totală. Dacă $m - k \,\vdots\, a-1$, atunci k este masa monedei false, masa monedei adevărate este $\dfrac{m-k}{a-1}$, iar diferenţa maselor este $p = \dfrac{m-ak}{a-1}$. Dacă $m - k \,\not\vdots\, a - 1$, atunci k este masa monedei adevărate, masa monedei false este $m - (a-1)k$, iar diferenţa maselor este $p = m - ak$. La cea de-a treia cântărire, luăm o monedă din punga 1, două monede din punga 2, ..., a monede din punga a şi le cântărim împreună; fie n masa lor totală. Numărul pungii care conţine monede false este $\dfrac{1}{p}\left(\dfrac{a(a+1)}{2} \cdot \text{ masa monedei adevarate } - n\right)$.

G317. *Aflaţi numerele naturale n pentru care $n! + (n+1)! + (n+3)!$ este cub perfect.*

Ioan Viorel Codreanu, Satulung (Maramureş)

Soluţie. Cum $n! + (n+1)! + (n+3)! = n!(n+2)^3$, acest număr este cub perfect dacă şi numai dacă $n!$ este cub perfect. Valorile $n = 0$ şi $n = 1$ sunt convenabile. Pentru $n \geq 2$, fie p cel mai mare număr prim care îl divide pe $n!$; vom arăta că p apare cu exponentul 1 în descompunerea în factori primi a numărului $n!$. Presupunem, prin absurd, că $p^2 | n!$. În mod necesar, avem $n \geq 2p$. Din postulatul lui Bertrand, între p şi $2p$ există un număr prim q care divide $n!$ şi, astfel, este contrazisă maximalitatea lui p.

G318. *Fie x, y, z numerele reale pozitive astfel încât $xyz = x + y + z + 2$. Demonstraţi că au loc inegalităţile:*

$$\sum x \geq 2 \sum \frac{1}{\sqrt{xy} - 1} \geq 6 \sum \frac{1}{xy - \sqrt{xy} + 1} \geq 6.$$

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Demonstrăm că $z(\sqrt{xy} - 1) \geq 2(*)$. Într-adevăr: $xyz = x + y + z + 2 \geq 2\sqrt{xy} + z + 2 \Rightarrow z(xy - 1) \geq 2(\sqrt{xy} + 1) \Rightarrow z(\sqrt{xy} - 1) \geq 2$, adică (*).

Scriem inegalitatea (*) sub forma $z \geq \dfrac{2}{\sqrt{xy} - 1}$. Adunând această relaţie cu cele două analoage, obţinem prima dintre inegalităţile cerute.

Apoi: $(^*) \Rightarrow z\sqrt{xy} \geq z + 2 \Rightarrow x + y + z\sqrt{xy} \geq x + y + z + 2 = xyz \Rightarrow x + y + z \geq xyz - z\sqrt{xy} + z \Rightarrow \frac{1}{xy - \sqrt{xy} + 1} \geq \dfrac{z}{x + y + z}$. Adunăm cu cele două relaţii obţinute prin permutări circulare şi găsim ultima inegalitate din enunţ.

In sfârşit, inegalitatea din mijloc se sparge în $\frac{1}{\sqrt{xy} - 1} \geq \frac{3}{xy - \sqrt{xy} + 1}$ (şi încă două asemănătoare), fapt care revine la $(\sqrt{xy} - 2)^2 \geq 0$.

In oricare dintre inegalităţi are loc egalitatea dacă şi numai dacă $x = y = z = 2$.

G319. *Dacă $a, b, c \in (0, 1)$, demonstraţi că*

$$\sum \frac{(a+b)^2}{c} > 3\left(\sum a^2\right) - 2\left(\sum ab\right) + 3\left(\sum a\right).$$

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

Soluţie. Inegalitatea de demonstrat se scrie, succesiv, $\sum \dfrac{(a+b)^2}{c} - 3\left(\sum a\right) > \sum (a+b-c)^2 \Leftrightarrow \sum \left(\dfrac{(a+b)^2}{c} - 2(a+b) + c\right) > \sum (a+b-c)^2 \Leftrightarrow \sum \dfrac{(a+b-c)^2}{c} > \sum (a+b-c)^2$. Ultima inegalitate este evident adevărată şi este strictă pentru $a, b, c \in (0, 1)$.

G320. *a) Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, arătaţi că $0 \leq \dfrac{|a-b|}{a+b} + \dfrac{|b-c|}{b+a} + \dfrac{|c-a|}{c+a} < 2$.*

b) Pentru orice $t \in [0, 2)$, există un triunghi ale cărui laturi a, b, c au proprietatea că leq$\dfrac{|a-b|}{a+b} + \dfrac{|b-c|}{b+c} + \dfrac{|c-a|}{c+a} = t$.

Constantin Dragomir, Piteşti

Soluţie. a) Cum $|a-b|<c<a+b$ şi analoagele, avem:

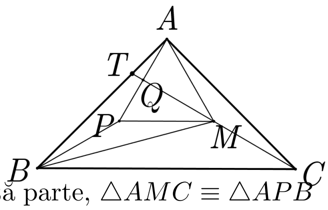
$$0 \leq \sum \frac{|a-b|}{a+b} < \sum \frac{c}{a+b} = \sum \frac{2c}{2(a+b)} < \sum \frac{2c}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2.$$

b) Evident că numerele $a=b=1$, $c=\frac{2-t}{2+t}$ sunt lungimile laturilor unui triunghi pentru $t \in [0,2)$. Pentru acest triunghi, $\sum \dfrac{|a-b|}{a+b} = 0 + 2 \cdot \dfrac{1-\frac{2-t}{2+t}}{1+\frac{2-t}{2+t}} = t.$

G321. *În interiorul triunghiului dreptunghic isoscel ABC, $AB=AC$, se consideră punctul M astfel încât $m(\widehat{MCA})=15°$. Dacă Q este proiecţia lui A pe MC şi $\dfrac{AQ}{MC}=\dfrac{1}{2}$, determinaţi măsura unghiului $\widehat{MBC}$.*

Mihaela Berindeanu, Bucureşti

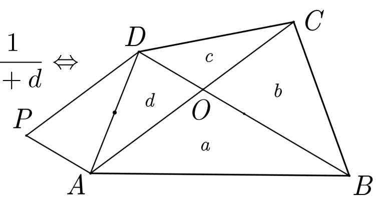
Soluţie. Fie $\{T\}=CM\cap AB$ şi P simetricul lui A faţă de Q. Triunghiul dreptunghic ATC are unghiul din C de $15°$, prin urmare înălţimea AQ este egală cu un sfert din ipotenuză; notăm $AQ=x$, deci $CT=4x$, $CM=2AQ=2x$, $AP=2AQ=2x$. Punctul M va fi mijlocul lui CT, prin urmare $AM=\frac{1}{2}\,CT=CM$. Observăm că $m(\widehat{MAP})=90°-m(\widehat{CAM})-m(\widehat{BAP})=90°-15°-15°=60°$, aşadar $\triangle APM$ este echilateral. Pe de altă parte, $\triangle AMC \equiv \triangle APB$ (L.U.L.), de unde $BP=MC=AM=PM$. Astfel, triunghiul BPM este isoscel, cu $m(\widehat{BPM})=150°$. Obţinem că $m(\widehat{MBC})=15°$.



G322. *Fie $ABCD$ un patrulater convex, $\{O\}=AC\cap BD$, iar P este simetricul lui O faţă de mijlocul segmentului AD. Demonstraţi că $AB \| CD$ dacă şi numai dacă aria patrulaterului $APDO$ este media armonică a ariilor triunghiurilor ABD, ABC, ACD şi BCD.*

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

Soluţie. Notăm cu a, b, c şi d ariile triunghiurilor AOB, BOC, COD, respectiv DOA; se ştie că $ac=bd$. Avem:



$$\frac{4}{\mathcal{A}_{AODP}} = \sum \frac{1}{\mathcal{A}_{AOB}} \Leftrightarrow \frac{4}{2d} = \frac{1}{a+d} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+d} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{d} = (a+b+c+d)\left(\frac{1}{(a+d)(b+c)} + \frac{1}{(a+b)(c+d)}\right).$$

Înlocuind $b=\dfrac{ac}{d}$, ultima egalitate este echivalentă cu

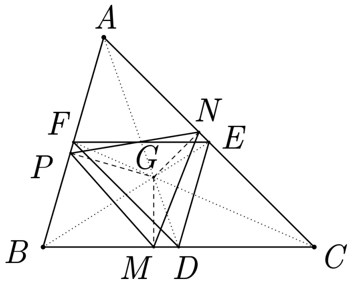
$$\frac{2}{d} = (a+d)(c+d)\left(\frac{1}{c\cdot(a+d)^2} + \frac{1}{a(c+d)^2}\right) \Leftrightarrow 2a^2c^2 + a^2cd + ac^2d = 2acd^2 + ad^3 + cd^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2ac(ac-d^2) + d(a+c)(ac-d^2) = 0 \Leftrightarrow d^2 = ac \Leftrightarrow d^2 = bd \Leftrightarrow d = b \Leftrightarrow AB \parallel CD.$$

G323. *Fie ABC un triunghi oarecare, D, E, F mijloacele laturilor BC, CA respectiv AB şi M, N, P proiecţiile centrului de greutate pe laturile BC, CA respectiv AB. Dacă $\triangle MNP \sim \triangle DEF$, arătaţi că triunghiul ABC este echilateral.*

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Patrulaterul $APGN$ este inscriptibil, înscris într-un cerc de diametru AG; cu teorema sinusurilor, avem că $PN = AG\sin A = \frac{2}{3}m_a \cdot \sin A$. Analog, $MP = \frac{2}{3}m_b \sin B$ şi $NM = \frac{2}{3}m_C \sin C$. Atunci: $\triangle MNP \sim \triangle ABC \Rightarrow \dfrac{PN}{a} = \dfrac{MP}{b} = \dfrac{NH}{c} \Rightarrow m_a \cdot \dfrac{\sin A}{a} = m_b \cdot \dfrac{\sin B}{b} = m_c \cdot \dfrac{\sin C}{c} \Rightarrow m_a \cdot 2R = m_b \cdot 2R = m_c \cdot 2R \Rightarrow m_a = m_b = m_c \Rightarrow \triangle ABC$ este echilateral.

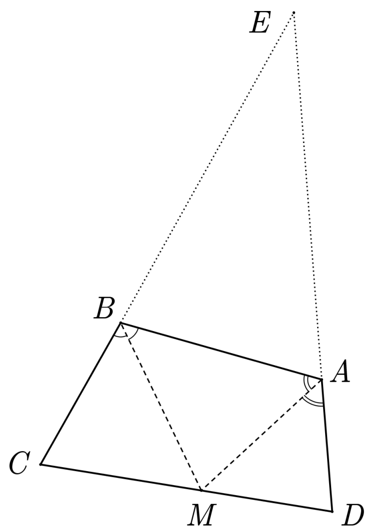


G324. *Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil cu $CD = AD + BC$. Demonstraţi că bisectoarele interioare ale unghiurilor $\widehat{A}$ şi $\widehat{B}$ se intersectează într-un punct situat pe latura CD.*

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

Soluţie. Fie M punctul de intersecţie dintre bisectoarele interioare ale unghiurilor $\widehat{A}$ şi $\widehat{B}$, $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = AD$ şi $r =$dist(M, AB). Distingem două situaţii:

I. Dreptele AD şi BC sunt concurente (în E); vom presupune că E este situat de aceeaşi parte a dreptei CD ca şi punctele A şi B (în caz contrar, raţionamentul este analog). Observăm că r este raza cercului $E-$exînscris triunghiului EAB, deci $r = \dfrac{\mathcal{A}_{EAB}}{p-a}$, unde $p = \frac{EA+EB+AB}{2}$. Avem: $\triangle EAB \sim \triangle ECD \Rightarrow \frac{EA}{EC} = \frac{EB}{ED} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \dfrac{EA}{EB+b} = \dfrac{EB}{EA+d} = \dfrac{a}{c} = \dfrac{EA+EB}{EA+EB+c} < 1$, prin urmare $a < c$ şi $EA + EB = \dfrac{ac}{c-a}$. Atunci: $p = \dfrac{2ac-a^2}{2(c-a)} \Rightarrow p - a = \dfrac{a^2}{2(c-a)} \Rightarrow r = \dfrac{2(c-a)}{a^2} \cdot \mathcal{A}_{EAB} \Rightarrow \mathcal{A}_{MBC} + \mathcal{A}_{MAB} + \mathcal{A}_{MAD} = \dfrac{br}{2} + \dfrac{ar}{2} + \dfrac{dr}{2} = \dfrac{(a+c)r}{2} = \dfrac{(c^2-a^2)}{a^2} \cdot \mathcal{A}_{EAB}$. Pe de altă parte, din $\triangle EAB \sim \triangle ECD$ obţinem: $\dfrac{\mathcal{A}_{EAB}}{\mathcal{A}_{ECD}} = \dfrac{a^2}{c^2} \Rightarrow \dfrac{\mathcal{A}_{EAB}}{\mathcal{A}_{ABCD}} = \dfrac{a^2}{c^2-a^2} \Rightarrow \mathcal{A}_{ABCD} = \dfrac{c^2-a^2}{a^2} \cdot \mathcal{A}_{EAB}$. Deducem că $\mathcal{A}_{MBC} + \mathcal{A}_{MAB} + \mathcal{A}_{MAD} = \mathcal{A}_{ABCD}$, prin urmare $M \in CD$.



II. Dreptele AD şi BC sunt paralele; în acest caz, patrulaterul inscriptibil $ABCD$ este dreptunghi sau trapez isoscel şi concluzia problemei rezultă uşor.

G325. *Se consideră tetraedrul $ABCD$ şi punctele M, N, P şi Q pe segmentele AB, BC, CD respectiv DA astfel încât $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{NB}{NC} = \dfrac{PC}{PD} = \dfrac{QD}{QA} = k > 1$. Fie*

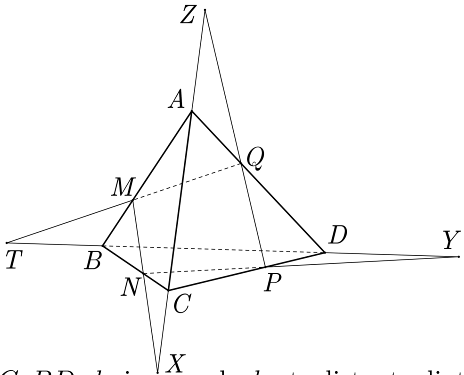
$\{X\} = AC \cap MN$, $\{Y\} = BD \cap NP$, $\{Z\} = AC \cap PQ$ *şi* $\{T\} = BD \cap MQ$.

a) Arătaţi că tetraedrele $ABCD$ şi $XYZT$ au acelaşi centru de greutate.

b) Demonstraţi că $\dfrac{\mathcal{V}_{XYZT}}{\mathcal{V}_{ABCD}} = \left(\dfrac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2$.

Marius Olteanu, Râmnicu Vâlcea

Soluţie. a) Aplicând teorema lui Menelaus în $\triangle ACD$ cu transversala $P-Q-Z$, avem că $\dfrac{ZA}{ZC} \cdot \dfrac{PC}{PD} \cdot \dfrac{QD}{QA} = 1$, de unde $\dfrac{ZA}{ZC} = \dfrac{1}{k^2}$ şi atunci $ZA = \dfrac{1}{k^2-1} \cdot AC$. Procedând la fel în $\triangle ABC$ cu transversala $M-N-X$, obţinem că $XC = \dfrac{1}{k^2-1} \cdot AC$, prin urmare $ZA = XC$, deci segmentele AC şi XZ au acelaşi mijloc. Analog se arată că BD şi YT au acelaşi mijloc, aşadar bimediana tetraedrului $ABCD$ care uneşte mijloacele segmentelor AC şi BD coincide cu bimediana tetraedrului $XYZT$ ce uneşte mijloacele segmentelor XZ şi YT. Cum centrul de greutate al unui tetraedru este mijlocul oricăreia dintre bimediane, rezultă că cele două tetraedre au acelaşi centru de greutate.



b) Volumul tetraedrului $ABCD$ poate fi calculat cu formula $\mathcal{V}_{ABCD} = \dfrac{1}{6} \cdot AC \cdot BD \cdot d \cdot \sin\alpha$, unde d este distanţa dintre muchiile opuse AC şi BD iar α este unghiul dintre aceste muchii (a se vedea, de exemplu, D. Brânzei, S. Aniţa, C. Cocea - *Planul şi spaţiul euclidian*, Editura Academiei, Bucureşti, 1986). Apoi, $\mathcal{V}_{XYZT} = \dfrac{1}{6} \cdot XZ \cdot YT \cdot d \cdot \sin\alpha$, unde d şi α sunt aceleaşi ca în cazul tetraedrului $ABCD$, iar $XZ = AC + AZ + CX = AC + \dfrac{2}{k-1} \cdot AC = AC \cdot \dfrac{k^2+1}{k^2-1}$ şi $YT = BD + YD + BT = BD \cdot \dfrac{k^2+1}{k^2-1}$. Cerinţa problemei este, acum, imediată.

B. Nivel liceal

L316. *Fie ABC un triunghi dreptunghic, $m(\widehat{A}) = 90°$ şi punctele P, Q pe cateta AC, P între A şi Q, astfel încât $m(\widehat{PBA}) = m(\widehat{QBC}) = m(\widehat{C}) \leq 30°$.*

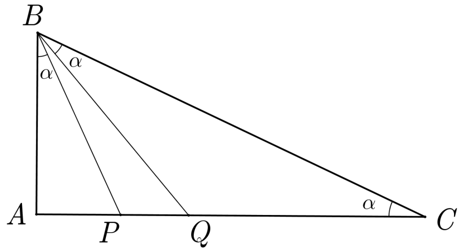
a) Arătaţi că centrul cercului circumscris triunghiului BCP este simetricul punctului Q faţă de BC.

b) Determinaţi valoarea maximă a produsului $PA \cdot QA$ şi deduceţi că $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}2\alpha \leq \operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)$, $\forall \alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{6}\right]$.

Mihail Frăsilă şi Constantin Petrea, Paşcani

Soluţia 1 (Gheorghe Iurea).

a) Fie $\alpha = m(\widehat{C}) \leq 30°$ şi $x = CQ$. Folosind teorema sinusurilor, obţinem: $BC = 2x\cos\alpha$, $AB = 2x\sin\alpha\cos\alpha$, $AC = 2x\cos^2\alpha$, $BP = 2x\sin\alpha$. Raza cercului circumscris $\triangle BPC$ este $R = \dfrac{BP \cdot PC \cdot BC}{4S_{BPC}} = \dfrac{BP \cdot PC \cdot BC}{2PC \cdot AB} = \dfrac{2x \sin\alpha \cdot 2x \cos\alpha}{4x \sin\alpha \cos\alpha} = x$. Cum $QB = QC = R$ şi $PQ < R$, punctul Q este simetricul centrului cercului circumscris $\triangle BCP$ faţă de dreapta BC.



b) Folosind notaţiile uzuale, avem: $x = \dfrac{a}{2\cos\alpha}$, $AP = a \sin\alpha \mathrm{tg}\alpha$, $AQ = \dfrac{a\cos 2\alpha}{2\cos\alpha}$. Deducem că $AP \cdot AQ = \dfrac{a^2}{2}\sin^2\alpha\left(2 - \dfrac{1}{\cos^2\alpha}\right)$. Cum $\alpha \in (0, 30°]$, rezultă că $\sin\alpha \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right]$, prin urmare $AP \cdot AQ$ are valoare maximă pentru $\alpha = 30°$, caz în care punctele P şi Q coincid cu piciorul B' al bisectoarei unghiului $\widehat{B}$. Valoarea maximă a produsului este $\dfrac{a^2}{12}$.

Cum $B'A = a \sin\alpha \mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)$, din relaţia $AP \cdot AQ \leq AB'^2$ deducem inegalitatea cerută.

Soluţia 2 (Titu Zvonaru).

a) Fie M mijlocul ipotenuzei BC şi O simetricul lui Q faţă de BC. Deoarece triunghiul BCQ este isoscel, deducem că patrulaterul $BOCQ$ este romb, iar patrulaterul $BOQP$ este trapez. Avem: $BP = \dfrac{AB}{\cos\widehat{PBA}} = \dfrac{c}{\cos C} = \dfrac{ac}{b}$, iar $QM = MC \cdot \mathrm{tg}C = \dfrac{ac}{2b} \Rightarrow OQ = \dfrac{ac}{b}$. Rezultă că $OQ = BP$, deci trapezul $BOQP$ este isoscel. Obţinem că $OP = BQ = OB = OC$ şi atunci O este centrul cercului circumscris $\triangle BCP$.

b) Notând $t = \mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, inegalitatea de demonstrat se reduce la $t^4 - 8t^3 + 18t^2 - 8t + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (t^2 - 4t + 1)^2 \geq 0$, evident adevărat. Avem egalitate dacă şi numai dacă $t = 2 \pm \sqrt{3}$, de unde $\alpha = 30°$.

Notă. Am mai primit soluţii corecte din partea domnilor **Neculai Roman** şi **Marius Olteanu**, precum şi de la elevul **Dan Dumitrescu**, Râmnicu Vâlcea.

L317. *Fie O, H centrul cercului circumscris, respectiv ortocentrul triunghiului ascuţitunghic ABC. Considerăm punctul D pe latura AB şi punctul E pe latura AC astfel încât A este centrul cercului exînscris triunghiului ODE. Demonstraţi că DE este mediatoarea segmentului AH.*

Titu Zvonaru, Comăneşti şi Bogdan Ioniţă, Bucureşti

Soluţie (**Neculai Roman** şi de elevul **Dan Dumitrescu**). Pentru că OA este biserctoarea interioară a unghiului $\widehat{DOE}$ şi DA, EA sunt bisectoarele exterioare ale unghiurilor $\widehat{ODE}$ şi $\widehat{OED}$, rezultă că: $m(\widehat{ODE}) + m(\widehat{OED}) = 180° - 2m(\widehat{ADE}) + 180° - 2m(\widehat{AED}) = 360° - 2(180° - m(\widehat{A})) = 2 \cdot m(\widehat{A}) \Rightarrow m(\widehat{DOE}) = 180° - 2m(\widehat{A}) \Rightarrow m(\widehat{AOD}) = 90° - m(\widehat{A}) = m(\widehat{AOE})$.

Notăm cu I intersecţia bisectoarele intersecţia bisectoarelor interioare ale triunghiului ODE. Cum $DI \perp DA$ şi $IE \perp EA$, patrulaterul $ADIE$ este inscriptibil, prin urmare $m(\widehat{IDE}) = m(\widehat{OAC}) = 90^\circ - m(\widehat{B})$. Atunci $m(\widehat{ADE}) = 90^\circ - m(\widehat{IDE}) = m(\widehat{B})$, aşadar $DE \parallel BC$, deci $DE \perp AH$.

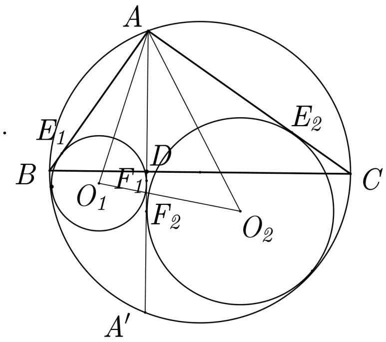
Fie $\{M\} = DE \cap AH$ şi $F = Pr_{OD}A$. Avem: $\sin(\widehat{AOF}) = \dfrac{AF}{OA} \Leftrightarrow \sin(90^\circ - \widehat{A}) = \dfrac{AF}{OA} \Leftrightarrow \cos A = \dfrac{AF}{R} \Leftrightarrow AF = R\cos A \Leftrightarrow AM = R\cos A$ (deoarece $AF = AM =$ raza cercului exînscris triunghiului ODE). Insă este binecunoscut faptul că $AH = 2R\cos A$, aşadar M este mijlocul lui AH, deci DE este mediatoarea segmentului AH.

Notă. Am mai primit soluţie corectă din partea d-lui **Marius Olteanu**.

L318. *Fie ABC un triunghi dreptunghic înscris în cercul $\mathcal{C}$ de rază R şi D piciorul înălţimii din vârful unghiului drept A. Cercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ de centre O_1 şi O_2 tangente interior cercului $\mathcal{C}$ mai sunt tangente şi semidreptelor $[AB$ şi $[AD$ şi respectiv $[AC$ şi $[AD$. Arătaţi că aria$(\triangle AO_1O_2) = \dfrac{8Rr^2}{2R+r}$, unde r este raza cercului înscris în triunghiul ABC.*

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

Soluţie (dată de autor şi de elevul **Dan Dumitrescu**, Râmnicu Vâlcea).



Fie $\{A'\} = AD \cap \mathcal{C}$, $\{E_1\} = AB \cap \mathcal{C}_1$, $\{F_1\} = AD \cap \mathcal{C}_1$, $\{E_2\} = AC \cap \mathcal{C}_2$, $\{F_2\} = AD \cap \mathcal{C}_2$. Avem:

$$\text{aria}(\triangle AO_1O_2) = \frac{1}{2} AO_1 \cdot AO_2 \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot AO_1 \cdot AO_2.$$

Aplicăm teorema lui Casey cercurilor $A, B, \mathcal{C}_1, A'$ (A, B, A' degenerate) şi obţinem: $AB \cdot A'F_1 + AA' \cdot BE_1 = AE_1 \cdot A'B \Leftrightarrow c(AA' - AE_1) + AA' \cdot (c - AE_1) = AE_1 \cdot c \Leftrightarrow 2c \cdot AA' = AE_1(2c + AA') \Leftrightarrow 2c \cdot 2AD = AE_1 \cdot (2c + 2AD) \Leftrightarrow 2c \cdot \dfrac{bc}{a} = AE_1 \cdot \left(c + \dfrac{bc}{a}\right) \Leftrightarrow \dfrac{2bc}{a} = AE_1 \cdot \dfrac{a+b}{a} \Leftrightarrow AE_1 = \dfrac{2bc}{a+b}$.

Analog, $AE_2 = \dfrac{2bc}{a+c}$.

Din $\triangle AE_1O_1$ dreptunghic, avem: $\cos\dfrac{C}{2} = \dfrac{AE_1}{AO_1} \Leftrightarrow AO_1 = AO_1 = \dfrac{2bc}{(a+b)\cos\frac{C}{2}}$.

Analog, $AO_2 = \dfrac{2bc}{(a+c)\cos\frac{B}{2}}$. Deducem că

$$\text{aria}(\triangle AO_1O_2) = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{2bc}{(a+b)\cos\frac{C}{2}} \cdot \frac{2bc}{(a+c)\cos\frac{B}{2}} = \frac{\sqrt{2}b^2c^2}{(a+b)(a+c)\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

Dar $\cos\dfrac{B}{2} \cdot \cos\dfrac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{p(p-b)}{ac} \cdot \dfrac{p(p-c)}{ab}} = \dfrac{p}{a}\sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{p}{a} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, deci

$$\text{aria}(\triangle AO_1O_2) = \frac{\sqrt{2}b^2c^2}{(a+b)(a+c)} \cdot \frac{2a}{\sqrt{2}p} = \frac{2ab^2c^2}{p(a+b)(a+c)} = \frac{2 \cdot 2R \cdot 4S^2}{p(a^2+ac+ab+bc)} =$$

$$= \frac{16R \cdot p^2 r^2}{p(2p \cdot a + 2S)} = \frac{16Rp^2r^2}{p(4pR + 2pr)} = \frac{8Rr^2}{2R + r}.$$

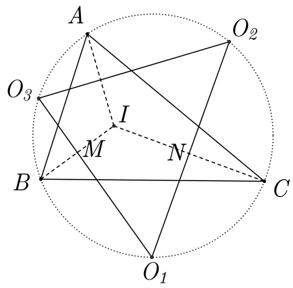
Notă. A mai rezolvat problema d-l **Marius Olteanu**.

L319. *Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Notăm cu O_1, O_2 şi O_3 centrele cercurilor circumscrise tringhiurilor BIC, CIA respectiv AIB. Demonstraţi că*

$$\frac{1}{BC \cdot O_2O_3} + \frac{1}{CA \cdot O_3O_1} + \frac{1}{AB \cdot O_1O_2} \leq \frac{1}{BC \cdot CA} + \frac{1}{CA \cdot AB} + \frac{1}{AB \cdot BC}.$$

Florin Stănescu, Găeşti

Soluţie (**Marius Olteanu**, Rm. Vâlcea). Observăm că $m(\widehat{O}_1) = \dfrac{B + C}{2}$ $(m(\widehat{BIC})) = 180° - \dfrac{B+C}{2}$, iar patrulaterul O_1MIN este inscriptibil) şi, deci, $m(\widehat{BO_1C}) = 2m(\widehat{O}_1) = B + C$. Ca urmare, unghiurile $\widehat{BO_1C}$ şi $\widehat{A}$ sunt suplimentare, deci patrulaterul ABO_1C este inscriptibil. Aşadar, O_1 - şi la fel punctele O_2, O_3 - se află pe cercul circumscris triunghiului ABC.



Avem: $O_2O_3 = 2R \sin \widehat{O}_1 = 2R \sin \frac{B+C}{2}$, adică $O_2O_3 = 2R \cos \frac{A}{2}$. Similar, $O_3O_1 = 2R \cos \frac{B}{2}$ şi $O_1O_2 = 2R \cos \frac{C}{2}$. Ţinând cont de aceste relaţii şi de formula $abc = 4Rrp$, inegalitatea din enunţ se scrie:

$$\sum \frac{1}{a \cos \frac{A}{2}} \leq \frac{1}{r}. \qquad (1)$$

Presupunând că $a \geq b \geq c$, rezultă că $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{c}$ şi $\dfrac{1}{\cos \frac{A}{2}} \geq \dfrac{1}{\cos \frac{B}{2}} \geq \dfrac{1}{\cos \frac{C}{2}}$ şi, utilizând inegalitatea lui Cebâşev, obţinem:

$$\sum \frac{1}{a \cos \frac{A}{2}} \leq \frac{1}{3} \left(\sum \frac{1}{a} \right) \left(\sum \frac{1}{\cos \frac{A}{2}} \right). \qquad (2)$$

Pentru majorarea membrului drept din (2) folosim $\sum \frac{1}{a} \leq \frac{p}{3Rr}$ (**N. Minculete**, *Egalităţi şi inegalităţi geometrice în triunghi*, p. 55, 3.4.9), $\prod \cos \frac{A}{2} = \frac{p}{4R}$ (ibid., p. 7, 1.11) şi $\sum \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \leq \frac{9}{4}$ (ibid., p. 146, 7.99) şi avem:

$$\sum \frac{1}{a \cos \frac{A}{2}} \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{p}{3Rr} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{4R}{p} = \frac{1}{r},$$

adică (1), q.e.d.

Menţionăm că, pe lângă conciclicitatea punctelor A, B, C, O_1, O_2, O_3, avem şi coliniaritatea punctelor din tripletele A, I, O_1; B, I, O_2 şi C, I, O_3.

Soluţie (**Dan Dumitrescu**, elev, Rm. Vâlcea). Se constată uşor că O_1 este intersecţia bisectoarei unghiului $\widehat{A}$ cu cercul circumscris triunghiului ABC, iar O_2

şi O_3 au poziţii similare. Cum $m(\widehat{O_1O_3O_2}) = \dfrac{1}{2}(A+B)$, obţinem că $O_1O_2 = 2R\sin\dfrac{A+B}{2} = 2R\cos\dfrac{C}{2}$; relaţi similare pentru segmentele O_2O_3 şi O_3O_1.

Inegalitatea de demonstrat se scrie în forma:

$$\sum \frac{1}{\sin C\cdot \sin\frac{A+B}{2}} \le \sum \frac{1}{\sin A\cdot \sin B}$$

sau

$$(*)\qquad \sum \frac{1}{\sin C\cdot \sin\frac{A+B}{2}} \le \frac{1}{2}\sum\left(\frac{1}{\sin C\cdot\sin A}+\frac{1}{\sin C\cdot \sin B}\right).$$

Funcţia $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$, $x\in(0,\pi)$, este convexă. Avem:

$$\frac{1}{\sin\frac{A+B}{2}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}\right) \text{ sau } \frac{1}{\sin C\cdot\sin\frac{A+B}{2}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin C\cdot \sin A}+\frac{1}{\sin C\cdot\sin B}\right).$$

Adunând această ultimă inegalitate cu similarele ei, obţinem inegalitatea (*), q.e.d.

Notă. D-l **N. Roman** dă exemple prin care inegalitatea în forma dată în nr. 1/2017, nu este adevărată şi nu este adevărată nici inegalitatea cu semn contrar.

L320. *Într-un plan se dau două puncte B şi C şi o dreaptă Δ paralelă cu BC. Un punct A este mobil pe Δ. Să se determine locul geometric al circumcentrului triunghiului median al triunghiului ABC.*

Temistocle Bîrsan, Iaşi

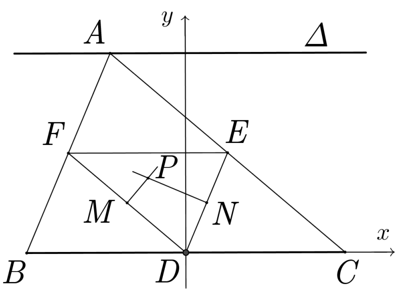
Soluţie. Fie D, E, F mijloacele laturilor BC, CA, respectiv AB. Fie a, d lungimea laturii BC, respectiv distanţa dintre $\triangle$ şi dreapta BC.

Alegem un sistem de axe cu originea în D, ca în figură. Avem: $D(0,0)$, $B\left(-\frac{a}{2},0\right)$, $C\left(\dfrac{a}{2},0\right)$, $A(\lambda,d)$, unde $\lambda\in\mathbb{R}$. Pentru mijloacele E şi F avem: $E\left(\dfrac{1}{2}\left(\lambda+\frac{a}{2}\right),\dfrac{d}{2}\right)$ şi $F\left(\dfrac{1}{2}\left(\lambda-\dfrac{a}{2}\right),\dfrac{d}{2}\right)$, iar pentru mijloacele M şi N ale segmentelor DE şi DF avem: $M\left(\dfrac{1}{4}\left(\lambda+\frac{a}{2}\right),\frac{d}{4}\right)$, $N\left(\frac{1}{4}\left(\lambda-\frac{a}{2}\right),\frac{d}{4}\right)$. Mediatoarele segmentelor DE şi DF au ecuaţiile:

$$y-\frac{d}{4} = -\frac{\lambda+\frac{a}{2}}{d}\left(x-\frac{\lambda+\frac{a}{2}}{4}\right)$$

şi

$$y-\frac{d}{4} = -\frac{\lambda-\frac{a}{2}}{d}\left(x-\frac{\lambda-\frac{a}{2}}{4}\right).$$



Eliminând pe λ din sistemul acestor două ecuaţii, vom obţine ecuaţia locului. Egalând membrii din dreapta, obţinem:

$$-\frac{\lambda+\frac{a}{2}}{d}\left(x-\frac{\lambda+\frac{a}{2}}{4}\right) = -\frac{\lambda-\frac{a}{2}}{d}\left(x-\frac{\lambda-\frac{a}{2}}{4}\right),$$

care, după calcule, revine la $\lambda = 2x$. Introducând această expresie în prima ecuaţie şi ordonând, obţinem ecuaţia locului geometric al circumcentrului triunghiului median:

$$y = -\frac{1}{4d}\left[4x^2 - \left(d^2 + \frac{a^2}{4}\right)\right],$$

care este o parabolă simetrică faţă de axa y-lor şi concavitatea spre y-ii negativi.

Se verifică prin calcul direct că orice punct de pe această parabolă corespunde unei poziţii a punctului A pe $\triangle$: punctul $P_0(x_0, y_0)$, cu $y_0 = -\dfrac{1}{4d}\left[4x_0^2 - \left(d^2 + \frac{a^2}{4}\right)\right]$, corespunde punctului $A(2x_0, d)$.

Pentru $x = 0$ se obţine $y_{max} = \dfrac{1}{4d}\left(d^2 + \frac{a^2}{4}\right)$. Ca urmare, dacă $y_{max} < d$, parabola nu va intersecta $\triangle$, ceea ce este echivalent cu $a < 2\sqrt{3}d$. Evident, dacă $a = 2\sqrt{3}d$, parabola are vârful pe $\triangle$, iar dacă $a > 2\sqrt{3}d$, ea intersectează $\triangle$ în două puncte.

Notă. Am primit soluţii parţiale din partea d-lor **Neculai Roman** şi **Marius Olteanu**, precum şi de la elevul **Dan Dumitrescu**, Râmnicu Vâlcea.

L321. *Notăm cu $[x]$ şi $\{x\}$ partea întreagă respectiv partea fracţionară ale numărului real x. Demonstraţi că, pentru orice număr real pozitiv x, are loc inegalitatea*

$$\frac{[x]^2}{7[x]^2 + (2\{x\} + [x])^2} + \frac{\{x\}^2}{7\{x\}^2 + (2[x] + \{x\})^2} \leq \frac{11}{72}.$$

Nicuşor Zlota, Focşani

Soluţie (**Marius Olteanu** şi **Titu Zvonaru**). Partea întreagă şi cea fracţionară nu joacă (aproape) niciun rol. Vom demonstra că

$$(*) \qquad \frac{a^2}{7a^2 + (2b + a)^2} + \frac{b^2}{7b^2 + (2a + b)^2} \leq \frac{1}{8}, a, b \in \mathbb{R}_+, a + b \neq 0.$$

Într-adevăr, după eliminarea numitorilor şi reducerea termenilor asemenea, rămâne de dovedit că $a^3b + ab^3 \geq 2a^2b^2$, fapt care este imediat din inegalitatea mediilor. In (*) avem egalitate dacă şi numai dacă $a = b$. Cum nu putem avea $[x] = \{x\}$ pentru $x \in (0, \infty)$, chiar şi forma mai tare (*) a inegalităţii dorite este strictă.

Notă. A mai rezolvat problema **Dan Dumitrescu**, elev, Râmnicu Vâlcea.

L322. *Fie $a, b, c \in (0, \infty)$ cu $a + b + c = \sqrt{3}$. Demonstraţi că*

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \leq \frac{a}{a^2 + 1} + \frac{b}{b^2 + 1} + \frac{c}{c^2 + 1} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Generalizare!

Tidor Pricope, elev, Botoşani

Soluţie (Titu Zvonaru). Vom demonstra direct următoarea generalizare:

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $a_1, a_2, ..., a_n \in [0, \infty)$ cu $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sqrt{n}$; atunci avem:

$$\frac{\sqrt{n}}{n + 1} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i^2 + 1} \leq \frac{n\sqrt{n}}{n + 1}.$$

Deoarece $a_i^2 \le n$, avem: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i^2+1} \ge \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n+1} = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$; avem egalitate dacă şi numai dacă $n-1$ numere sunt nule. Pentru a doua inegalitate, folosim inegalitatea mediilor şi apoi inegalitatea lui Bergström:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i^2+1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i^2+\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2a_i\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{n-1}{n}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\frac{a_i}{\sqrt{n}}+\frac{a_i}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}+...+\frac{1}{n}} \le \frac{1}{(n+1)^2}\left(2\sum_{i=1}^{n}\sqrt{n}+(n-1)\sum_{i=1}^{n} na_i\right) =$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2}(2n\sqrt{n}+n(n-1)\sqrt{n}) = \frac{n\sqrt{n}}{n+1}.$$

Avem egalitate dacă şi numai dacă $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Notă. Pentru cazul $n = 3$, am primit soluţii din partea d-lui **Marius Olteanu** şi elevului **Dan Dumitrescu**, care folosesc inegalitatea lui Jensen pentru funcţia concavă $f : [0, \sqrt{3}] \to [0, \infty)$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

L323. *Demonstraţi că, pentru oricare numere a, b, c din intervalul $(0, 1)$, are loc inegalitatea*

$$(1-abc)^3(1-a^3)(1-b^3)(1-c^3) \le (1-a^2b)(1-ab^2)(1-a^2c)(1-ac^2)(1-b^2c)(1-bc^2).$$

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Pentru orice $x \in (0, 1)$, avem că $\ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n\ge1}\frac{x^n}{n}$. Ţinând cont de *inegalitatea lui Schur*: $x^3+y^3+z^3+3xyz \ge x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2$, $\forall x, y, z > 0$, avem: $\ln(1-a^3)+\ln(1-b^3)+\ln(1-c^3)+3\ln(1-abc) = -\displaystyle\sum_{n\ge1}\frac{1}{n}(a^{3n}+b^{3n}+c^{3n}+3a^nb^nc^n) \le -\sum_{n\ge1}\frac{1}{n}(a^{2n}b^n+a^nb^{2n}+a^{2n}c^n+a^nc^{2n}+b^{2n}c^n+b^nc^{2n}) =$ $\ln(1-a^2b)+\ln(1-ab^2)+\ln(1-a^2c)+\ln(1-ac^2)+\ln(1-b^2c)+\ln(1-bc^2)$, de unde cerinţa problemei.

L324. *Dacă $a, b, c \in (0, \infty)$, demonstraţi inegalităţile:*

a) $\displaystyle\sum\frac{2a^2}{b+c} \ge 3\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$;

b) $\displaystyle\sum\frac{a^3}{b^2+c^2} \ge \frac{3}{2}\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$.

Neculai Stanciu, Buzău şi Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie 1 (Marius Olteanu). a) Presupunem $a \ge b \ge c > 0$; atunci $a^2 \ge b^2 \ge c^2$ şi $\dfrac{1}{b+c} \ge \dfrac{1}{c+a} \ge \dfrac{1}{a+b}$. Aplicând inegalitatea lui Cebîşev, apoi $MH \le MA$, avem:

$$\sum\frac{a^2}{b+c} \ge \frac{1}{3}(\sum a^2)(\sum\frac{1}{b+c}) \le \frac{1}{3}(\sum a^2)\frac{9}{\sum(b+c)} = \frac{3\sum a^2}{2\sum a},$$

de unde rezultă inegalitatea dorită.

$$b)\sum\frac{a^3}{b^2+c^2}\geq\frac{1}{3}\left(\sum a^3\right)\left(\sum\frac{1}{b^2+c^2}\right)\geq\frac{1}{3}\left(\sum a^3\right)\frac{9}{\sum(b^2+c^2)}=\frac{3\sum a^3}{2\sum a^2}.$$

Rămâne să arătăm că $\dfrac{\sum a^3}{\sum a^2}\geq\dfrac{\sum a^2}{\sum a}$; această inegalitate revine la $(\sum a^3)(\sum a)\geq(\sum a^2)^2$ şi se deduce imediat din $C-B-S$.

Pentru ambele inegalităţi, egalitatea se realizează când $a=b=c$.

Soluţia 2 (Marin Chirciu). a) Cu inegalitatea lui Bergström, obţinem

$$\sum\frac{a^2}{b+c}=\sum\frac{a^4}{a^2(b+c)}\geq\frac{(\sum a^2)^2}{\sum a^2(b+c)}\geq\frac{3}{2}\cdot\frac{\sum a^2}{\sum a},$$

unde ultima inegalitate este echivalentă cu

$$2\sum a\sum a^2\geq 3\sum a^2(b+c)\Leftrightarrow 2\left[\sum a^3+\sum a^2(b+c)\right]\geq 2\sum a^2(b+c)\Leftrightarrow$$

$$2\sum a^3\geq\sum a^2(b+c)\Leftrightarrow 2\sum a^3\geq\sum ab(a+b),$$

care rezultă din $a^3+b^3\geq ab(a+b)\Leftrightarrow(a-b)^2\geq 0$ şi analoagele.

b) Cu inegalitatea lui Bergström, obţinem

$$\sum\frac{a^3}{b^2+c^2}=\sum\frac{a^4}{a(b^2+c^2)}\geq\frac{(\sum a^2)^2}{\sum a(b^2+c^2)}\geq\frac{3}{2}\cdot\frac{\sum a^2}{\sum a},$$

unde ultima inegalitate este echivalentă cu

$$2\sum a\sum a^2\geq 3\sum a(b^2+c^2)\Leftrightarrow 2\left[\sum a^3+\sum a(b^2+c^2)\right]\geq 3\sum a(b^2+c^2)\Leftrightarrow$$

$$2\sum a^3\geq\sum a(b^2+c^2)\Leftrightarrow 2\sum a^3\geq\sum ab(a+b),$$

care rezultă din $a^3+b^3\geq ab(a+b)\Leftrightarrow(a-b)^2\geq 0$ şi analoagele.

Notă. Am mai primit soluţii corecte de la d-nii **Nicuşor Zlota**, **Corneliu Mănescu- Avram**, precum şi de la elevul **Dan Dumitrescu**, Râmnicu Vâlcea. D-l **Marius Olteanu** demonstrează că este adevărată următoarea extindere:

$$\sum\frac{a^{m+1}}{b^m+c^m}\geq\sum\frac{a^m}{b^{m-1}+c^{m-1}},\ \forall a,b,c>0,\forall m\in\mathbb{N}^*.$$

L325. *Dacă $x,y,z\in(0,\infty)$, demonstraţi că*

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geq\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}+\frac{3(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)}{x+y+z}.$$

Leonard Giugiuc, Drobeta-Tr. Severin şi Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

Soluţia 1 (Titu Zvonaru). Inegalitatea 64 din Vasile Cârtoaje - *Algebraic Inequalities*, Gil Publishing House, 2006, p. 458, spune că

$$x+y+z+\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geq\frac{6(x^2+y^2+z^2)}{x+y+z}.$$

În aceste condiţii, ar fi suficient să dovedim că

$$\frac{6(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2}{x+y+z}-\frac{3(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)}{x+y+z}\geq\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}.$$

Această din urmă relaţie se rescrie echivalent:

$$\Leftrightarrow\frac{2(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)}{x+y+z}\geq\sqrt{2(x+y+z)^2-6(xy+yz+zx)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(x+y+z)^4-12(x+y+z)^2(xy+yz+zx)+9(xy+yz+zx)^2\geq$$
$$\geq 3(x+y+z)^4-6(x+y+z)^2(xy+yz+zx)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow((x+y+z)^2-3(xy+yz+zx))^2\geq 0,$$

evident adevărat. Avem egalitate dacă şi numai dacă $x=y=z$.

Soluţia 2 (**Dan Dumitrescu,** elev, Rm. Vâlcea). Inegalitatea se scrie:

$$\left(\frac{x^2}{y}-2x+y\right)+\left(\frac{y^2}{z}-2y+z\right)+\left(\frac{z^2}{x}-2z+x\right)\geq\sqrt{3\left(x^2+y^2+z^2\right)}-(x+y+z)$$
$$+\frac{3\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]}{2\left(x+y+z\right)}$$

$$\Leftrightarrow\sum\frac{(x-y)^2}{y}\geq\frac{\sum(x-y)^2}{\sqrt{3\left(x^2+y^2+z^2\right)}+(x+y+z)}+\frac{3\sum(x-y)^2}{2\sum x}\Leftrightarrow$$
$$\sum\left[(x-y)^2\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{\sqrt{3\sum x^2}+\sum x}-\frac{3}{2\sum x}\right)\right]\geq 0.$$

Utilizând faptul evident că $-\frac{1}{\sqrt{3\sum x^2}+\sum x}\geq-\frac{1}{2\sum x}$,observăm că este suficient să arătăm inegalitatea următoare:

$$\sum\left[(x-y)^2\left(\frac{1}{y}-\frac{2}{\sum x}\right)\right]\geq 0\Leftrightarrow\sum(x-y)^2\,\frac{x-y+z}{y}\geq 0.$$

Notând $S_a=\frac{x-y+z}{y}$ şi analog S_b, S_c, este suficient să arătăm că $S_a+S_b+S_c\geq 0$, $S_aS_b+S_bS_c+S_cS_a\geq 0$ pentru a stabili ultima inegalitate (**Pham Kim Hung** – *Secrets in inequalities*, t. II, cap.I) şi cu aceasta inegalitatea cerută. Într-adevăr, $S_a+S_b+S_c=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}-3\geq 0$, evident. Apoi, $\sum S_aS_b=\sum\frac{(x-y+z)(-x+y+z)}{xy}=\frac{x^3+y^3+z^3+6xyz-\left(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2\right)}{xyz}\geq 0$ (Schur).

Notă. Am primit o soluţie parţială din partea d-lui **Marius Olteanu**.