PROBLEME ŞI SOLUŢII

Soluţiile problemelor propuse în nr. 1/2017

Clasele primare

P371. *Compară lungimea catedrei cu lăţimea uşii din clasa ta, măsurându-le cu palma.*

(*Clasa pregătitoare*) **Georgiana Viţel, elevă, Iaşi**

Soluţie. Depinde de rezultatul măsurării.

P372. *Un copil are patru bancnote de* 1 *leu, trei bancnote de* 5 *lei şi o bancnotă de* 10 *lei. Câte bancnote va avea copilul dacă schimbă bancnotele de* 5 *lei şi* 10 *lei în bancnote de* 1 *leu?*

(*Clasa pregătitoare*) **Marian Chiriac, elev, Iaşi**

Soluţie. Copilul va avea $4 + 15 + 10 = 29$ bancnote de 1 leu.

P373. *Un elev a călătorit cu trenul de pe data de 4.01.2017, la amiază, până pe data de 6.01.2017, seara. Alt elev a călătorit cu autobuzul patru jumătăţi de zi şi încă două jumătăţi de oră. Care elev a călătorit mai multe ore?*

(*Clasa I*) **Alexandru Chiriac, Hodora, Iaşi**

Soluţie. Primul elev a călătorit cu trenul două zile şi încă un număr de ore de la prânz până seara, care înseamnă mai mult de două ore. Al doilea elev a călătorit cu trenul două zile şi două ore. Deducem că primul elev a călătorit mai mult.

P374. *Într-o clasă, şase elevi au ziua de naştere în aceeaşi săptămână, dar niciunul sâmbătă sau duminică. Arătaţi că, măcar într-o zi a săptămânii, cel puţin doi elevi îşi sărbătoresc ziua de naştere.*

(*Clasa I*) **Victoria Ursu, elevă, Iaşi**

Soluţie. Cei şase elevi s-au născut în cinci zile. Înseamnă că într-o zi s-au născut cel puţin doi elevi.

P375. *Ordonaţi crescător numerele* $\overline{ab}, \overline{cd}, \overline{ef}, \overline{gh}$ *ştiind că sunt îndeplinite condiţiile:* $a > g, g = c, c > e, d < h$.

(*Clasa I*) **Beatrice Spînu, elevă, Iaşi**

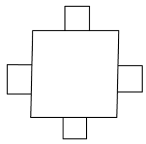
Soluţie. Avem $e < c$, $c = g$, $g < a$, deci $\overline{ef}$ este numărul cel mai mic, iar $\overline{ab}$ cel mai mare. Deoarece $d < h$, rezultă $\overline{cd} < \overline{gh}$. Ordinea crescătoare a numerelor este $\overline{ef} < \overline{cd} < \overline{gh} < \overline{ab}$.

P376. *În câte moduri se poate achita suma de* 52 *lei cu bancnote de* 1 *leu,* 5 *lei şi* 10 *lei, astfel încât să folosim măcar câte o bancnotă de fiecare fel?*

(*Clasa a II-a*) **Cătălin Petrişor, elev, Iaşi**

Soluţie. $52 = 1 \times a + 5 \times b + 10 \times c$. Avem cazurile: $c = 4 \to 2$ moduri, $c = 3 \to 4$ moduri, $c = 2 \to 6$ moduri, $c = 1 \to 8$ moduri. In total avem $2 + 4 + 6 + 8 = 20$ moduri.

P377. *Figura alăturată conţine un pătrat mare şi patru pătrate mici egale, aşezate la fel pe laturile pătratului mare. Câte axe de simetrie are această configuraţie geometrică?*



(*Clasa a II-a*) **Nicolae Vieru, elev, Iaşi**

Soluţie. Configuraţia geometrică are patru axe de simetrie. Două sunt dreptele ce unesc mijloacele laturilor opuse ale pătratului mare, iar celelalte două sunt dreptele suport ale diagonalelor pătratului mare.

P378. *În câte cazuri un număr de forma* $\overline{a1b}$ *este mai mic decât un număr de forma* $\overline{8c2}$*?*
(*Clasa a II-a*) **Irina Simon, elevă, Iaşi**

Soluţie. Dacă $a = 1, 2, ..., 7$, atunci $b = 0, 1, 2, ..., 9$ şi $c = 0, 1, 2, ..., 9$. În total avem $7 \times 10 \times 10 = 700$ cazuri. Dacă $a = 8$ şi $c = 1$ atunci $b = 0, 1$, iar numărul cazurilor este 2. Dacă $a = 8$ şi $c = 2, 3, ..., 9$, atunci $b = 0, 1, ..., 9$, iar numărul cazurilor este $1 \times 8 \times 10$, ceea ce înseamnă 80 cazuri. Vom avea $700 + 2 + 80 = 782$ cazuri.

P379. *Află perechile de numere naturale* (a, b) *care satisfac simultan egalităţile* $a + a + a + a = b$ *şi* $a \cdot a = b$.
(*Clasa a III-a*) **Andreea Munteanu, elevă, Iaşi**

Soluţie. Avem $4a = b$, $a \cdot a = b$, de unde $a \cdot a = 4a$. Egalitatea este verificată numai de perechile $(0, 0)$ şi $(4, 4)$.

P380. *Înlocuiţi steluţele cu cifre potrivite, astfel încât împărţirea alăturată să fie adevărată; gasiţi două soluţii ale problemei.*
(*Clasa a III-a*) **Alexandra Mădălina Ciobanu, Iaşi**

```
1 * * *  | *
  *      |------
-----    | * * *
  1 *
    *
 -----
    * *
      *
   -----
      1
```

Soluţie. Împărţirea iniţială poate fi $1000 : 9 = 111$(rest 1)sau $1000 : 3 = 333$ (rest 1).

P381. *Un elev scrie numerele de la* 100 *la* 999 *fără să le despartă prin virgulă, după cum urmează:* 100101102 . . . <u>111 11</u>2 . . . 997998999. *Câte secvenţe de câte cinci cifre vecine egale apar în şir? (Un exemplu de astfel de secvenţa este cea subliniată).*
(*Clasa a III-a*) **Adelin Nicolae Bechet, elev, Iaşi**

Soluţie. Secvenţele provin din grupările <u>111 11</u>2, <u>222 22</u>3, ..., <u>888 88</u>9. În total sunt 8 secvenţe.

P382. *Se consideră şirul de numere:* $1, 2, 2, 3, 3, 3, 1, 2, 2, 3, 3, 3, \ldots$ *Aflaţi suma numerelor de pe locurile* $301, 482$ *şi* 2017.
(*Clasa a III-a*) **Bianca Ţugui, elevă, Iaşi**

Soluţie. $301 = 50 \cdot 6 + 1$, $482 = 80 \cdot 6 + 2$, $2017 = 336 \cdot 6 + 1$. Resturile ne arată a câta cifră trebuie considerată în secvenţa $1, 2, 2, 3, 3, 3$. Suma este $1 + 2 + 1 = 4$.

P383. *Pe o tablă este scris de* 13 *ori numărul* 22 *şi de* 15 *ori numărul* 25*. Câte numere trebuie şterse pentru ca suma numerelor rămase să fie* 398*?*
(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

Soluţie. Să determinăm numerele a şi b din egalitatea $22a + 25b = 398$ pentru a vedea câte numere egale cu 22, respectiv 25, trebuie să rămână. Numărul b trebuie să fie par, nenul, deoarece 398 nu se împarte exact la 11. Egalitatea este verificată numai pentru $b = 8$ şi $a = 9$. Trebuie să ştergem 11 numere: 4 egale cu 22 şi 7 egale cu 25.

P384. *Se consideră numărul* $A = \overline{abcd} + \overline{bcda} + \overline{cdab} + \overline{dabc}$. *Aflaţi numărul* $\overline{abcd}$ *ştiind că* $a < b < c < d$ *şi* $A = 10 \cdot 11 \cdot 101$.
(*Clasa a IV-a*) **Andreea Bîzdîgă, studentă, Iaşi**

Soluţie. $A = 11 \cdot 101 \cdot (a+b+c+d)$, deci $a+b+c+d = 10$. Ştiind că $a < b < c < d$, iar $a \neq 0$, avem $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $b = 4$ şi $\overline{abcd} = 1234$.

P385. *Dintr-o bară se taie şase bucăţi egale cu* $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ *şi* $\frac{1}{64}$ *din bară. Ce fracţie din bară rămâne?*
(*Clasa a IV-a*) **Monica Maftei, elevă, Iaşi**

Soluţie. $\frac{1}{2}$ este jumătate din întreg, $\frac{1}{4}$ este jumătate din $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$ este jumătate din $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$ este jumătate din $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{32}$ este jumătate din $\frac{1}{16}$, iar $\frac{1}{64}$ este jumătate din $\frac{1}{32}$. Rămâne $\frac{1}{64}$ din bară.

P386. *Suma a şapte numere pare şi nenule este* 54. *Calculaţi produsul tuturor diferenţelor de câte două numere dintre cele şapte.*
(*Clasa a IV-a*) **Denisa Apetrei, elevă, Iaşi**

Soluţie. $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 = 56$. Rezultă că cel puţin două dintre cele şapte numere sunt egale şi, în acest fel, o diferenţă devine zero, iar produsul tuturor diferenţelor este zero.

Clasa a V-a

V.214. *Determinaţi numerele naturale* a, b *şi* c, *ştiind că* c *este prim iar* $a + b = a - b + c = 2017$.

Tinuţa Bejan, Iaşi

Soluţie. Cum $a + b$ este impar, $a - b$ va fi tot număr impar, deci c trebuie să fie par; atunci $c = 2$. Din $a + b = 2017$, $a - b = 2015$ obţinem că $a = 2016$, $b = 1$.

V.215. *Adăugând o cifră la stânga şi o cifră la dreapta numărului* 2017, *obţinem un număr de şase cifre care este divizibil cu* 198. *Determinaţi acest număr de şase cifre.*

Vlad Mihai Ciuperceanu, elev, Craiova

Soluţie. Fie $\overline{a2017b}$ un număr divizibil cu 198; atunci numărul este divizibil cu 2, 9 şi 11. Obţinem că $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $a + 2 + 0 + 1 + 7 + b \vdots 9$ (deci $a + b \in \{8, 17\}$), respectiv $a + 0 + 7 - 2 - 1 - b \vdots 11$ (deci $b - a = 4$). Numărul căutat este 220176.

V.216. *Adunăm un număr natural cu dublul sumei cifrelor sale. Arătaţi că numărul obţinut este divizibil cu* 3. **Marian Ciuperceanu, Craiova**

Soluţie. Dacă $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ este numărul, suma va fi $S = (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0) + 2(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0) = a_n \cdot \underbrace{99...9}_{n\ de\ 9} + a_{n-1} \cdot \underbrace{99...9}_{n-1\ de\ 9} + ... + a_1 \cdot 9 + 3(a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0) = M_3$.

V.217. *Există numere naturale de n cifre* ($n \in \mathbb{N}^*$) $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$ *şi* $\overline{b_1 b_2 \ldots b_n}$ *astfel încât* $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n} \cdot \overline{b_1 b_2 \ldots b_n} = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n b_1 b_2 \ldots b_n}$*?*

Ioan Viorel Codreanu, Satulung (Maramureş)

Soluţie. Nu există astfel de numere: $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n b_1 b_2 \ldots b_n} = 10^n \cdot \overline{a_1 a_2 \ldots a_n} + \overline{b_1 b_2 \ldots b_n} > 10^n \cdot \overline{a_1 a_2 \ldots a_n} > \underbrace{\overline{99 \ldots 9}}_{n\ cifre} \cdot \overline{a_1 a_2 \ldots a_n} \geq \overline{a_1 a_2 \ldots a_n} \cdot \overline{b_1 b_2 \ldots b_n}$.

V.218. *Determinaţi numerele naturale nenule a şi b cu proprietatea că* $a! + b^2 = 2017^2 + 1$. *(Am notat* $a! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots a$.*)*

Cosmin Aştefanei, elev, Iaşi

Soluţie. Dacă $a \geq 3$, atunci $a!$ se divide cu 3. Cum $2017^2 + 1 = M_3 + 2$, ar rezulta că $b^2 = M_3 + 2$, imposibil. Rămâne că $a \in \{1, 2\}$. Dacă $a = 1$, atunci $b = 2017$. Dacă $a = 2$, am obţine că $b^2 = 2017^2 - 1$, ceea ce nu se poate ($2016^2 < 2017^2 - 1 < 2017^2$, deci $2017^2 - 1$ nu este pătrat perfect). În concluzie, $a = 1$ şi $b = 2017$.

V.219. *Determinaţi numerele naturale a, b şi c cu proprietatea că* $a^2 + b^2 + c^2 = 2^{2017}$.

Cătălin Budeanu, Iaşi

Soluţie. Numerele a, b şi c sunt ori toate pare, ori unul par şi două impare. În al doilea caz, $a^2 + b^2 + c^2 = M_4 + (M_4 + 1) + (M_4 + 1) = M_4 + 2 \neq 2^{2017}$. Rămâne că $a = 2a_1$, $b = 2b_1$ şi $c = 2c_1$ şi, împărţind ecuaţia prin 4, obţinem că $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 2^{2015}$. Continuând raţionamentul, după 1008 paşi, ajungem că $a = 2^{1008} \cdot a_{1008}$, $b = 2^{1008} \cdot b_{1008}$ şi $c = 2^{1008} \cdot c_{1008}$, unde $a_{1008}^2 + b_{1008}^2 + c_{1008}^2 = 2$. Ultima ecuaţie are soluţiile $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ şi $(0, 1, 1)$, aşadar soluţiile ecuaţiei iniţiale sunt $(2^{1008}, 2^{1008}, 0)$, $(2^{1008}, 0, 2^{1008})$ şi $(0, 2^{1008}, 2^{1008})$.

V.220. *Câte numere de două cifre se scriu sub forma* $\overline{ab} - a$*, unde a, b sunt cifre,* $a \neq 0$*?*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Dacă $\overline{xy}$ se scrie sub forma $\overline{xy} = \overline{ab} - a$, atunci $\overline{xy} = 9a + b$, cu a, b cifre, $a \neq 0$. Pentru fiecare $b \in \{1, 2, \ldots, 8\}$, sumele $9a + b$, cu $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, sunt distincte, prin urmare obţinem $8 \cdot 9 = 72$ numere $\overline{xy}$. Dacă $b \in \{0, 9\}$, numerele de două cifre de forma $9a + 0$ sau $9a + 9$ sunt, de fapt, $18, 27, 36, \ldots, 90$, în număr de 9. In total, există $72 + 9 = 81$ de numere cu proprietatea din enunţ.

Clasa a VI-a

VI.214. *Determinaţi numerele naturale nenule* a, b *şi* c *pentru care* $\frac{a}{2}+\frac{b}{3}+\frac{c}{5}=4$.

Ionuţ-Florin Voinea, elev, Bucureşti

Soluţie. Relaţia din enunţ se rescrie $15a+10b+6c=120$. Cum 2 divide $10b, 6c$ şi 120, rezultă că $2|15a$. Insă $(2,15)=1$, prin urmare $2|a$, adică $a=2x$, $x\in\mathbb{N}^*$. Analog se arată că $b=3y$, $c=5z$, cu $y,z\in\mathbb{N}^*$. Înlocuind, avem că $\frac{2x}{2}+\frac{3y}{3}+\frac{5z}{5}=4$, i.e. $x+y+z=4$, de unde $(x,y,z)\in\{(1,1,2);(1,2,1);(2,1,1)\}$. Obţinem soluţiile $(a,b,c)\in\{(2,3,10);(2,6,5);(4,3,5)\}$.

VI.215. *Determinaţi numerele naturale* x *şi* y *pentru care* $9^{2^x}-243^y=6560$.

Ioan Viorel Codreanu, Satulung (Maramureş)

Soluţie. Dacă $y\geq 1$, membrul stâng se divide cu 3, în timp ce 6560 nu se divide cu 3. Rezultă că $y=0$, când obţinem $x=2$.

VI.216. *Determinaţi numerele prime* p *şi* q *astfel încât numărul* $(p+9)^q$ *să fie pătrat perfect.*

Lucian Tuţescu şi Carmen Terheci, Craiova

Soluţie. Dacă $q=2$, orice valoare a lui p este convenabilă. Dacă $q\geq 3$, numărul $(p+9)^q$ este pătrat perfect dacă şi numai dacă $p+9=a^2$, $a\in\mathbb{N}$. Obţinem că $a^2-9=p \Leftrightarrow a-3=1,\ a+3=p \Leftrightarrow a=4,\ p=7$. În concluzie, soluţiile problemei sunt perechile (p,q) de forma $(p,2)$, p prim şi $(7,q)$, $q\geq 3$ prim.

VI.217. *Determinaţi numerele naturale* a,b,c, *cel puţin egale cu* 2, *pentru care* $\frac{5ab-7}{abc+2}$ *este număr natural nenul.*

Mihaela Berindeanu, Bucureşti

Soluţie. Dacă $\frac{5ab-7}{abc-2}\in\mathbb{N}$, atunci $\frac{5ab-7}{abc+2}\geq 1$, prin urmare $ab(5-c)\geq 9$, deci $c\in\{2,3,4\}$. Notând $x=ab\in\mathbb{N}$, obţinem că $\frac{5x-7}{2x+2}\in\mathbb{N}$ sau $\frac{5x-7}{3x+2}\in\mathbb{N}$ sau $\frac{5x-7}{4x+2}\in\mathbb{N}$. Corespunzător, avem $x\in\{3,11\}$, $x\in\phi$, respectiv $x\in\{9\}$. Însă x este produsul a două numere naturale cel puţin egale cu 2; singura valoare convenabilă este $x=9$, în cazul $c=4$. In concluzie, singura soluţie a problemei este $a=3$, $b=3$, $c=4$.

VI.218. *Determinaţi numărul* $A=m^{n+5}\cdot n^{m+4}$, $m,n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, *care are exact* 63 *de divizori naturali.*

Ionel Tudor, Călugăreni

Soluţie. Dacă $m=n=$ număr prim, atunci A are $2m+10$ divizori şi, din motive de paritate, este clar că $2m+10\neq 63$. Dacă $m=n=$ număr compus şi $m\geq 10$, atunci A are (mult) mai mult de 63 de divizori. Cercetând cazurile $m\in\{4,6,8,9\}$, nu găsim numere A cu 63 divizori.

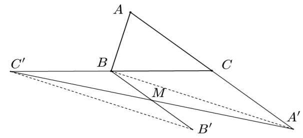
Fie acum $m,n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ numere distincte. Dacă $m=2$, atunci $n\geq 3$ şi A are cel puţin $(n+6)\cdot 7$ divizori. Obţinem 63 de divizori naturali când $n=3$. Dacă $m\geq 3$, atunci $n\geq 4$ şi A are cel puţin $(n+6)(m+5)\geq 10\cdot 8=80$ divizori.

Singurul număr cu proprietatea dată este $A = 2^8 \cdot 3^6$.

VI.219. *Dat triunghiul ABC, notăm cu A' simetricul lui A faţă de C şi cu C' simetricul lui C faţă de B. Paralela prin B la AC intersectează dreapta $A'C'$ în M iar B' este simetricul lui B faţă de M. Demonstraţi că $BA' = B'C'$.*

Valeriu Iovan, Craiova

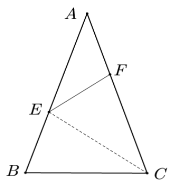
Soluţie. Deoarece B este mijlocul lui CC' şi $BM \parallel CA'$, rezultă că BM este linie mijlocie în $\triangle C'A'C$, deci M este mijlocul lui $A'C'$. Avem că $BM = MB'$, $MA' = MC'$ şi $\widehat{BMA'} = \widehat{B'MC'}$ (opuse la vârf), prin urmare $\triangle BMA' \equiv \triangle B'MC'$ (LUL), de unde $BA' = B'C'$.



VI.220. *Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$ şi $m(\widehat{A}) < 40°$. Ştiind că există $E \in (AB)$ şi $F \in (AC)$ astfel încât $AE = CF = BC$ şi $AF = FE$, determinaţi măsura unghiului $\widehat{A}$.*

Vasile Chiriac, Bacău

Soluţie. Observăm că $BE = AB - AE = AC - CF = AF = EF$; atunci $\triangle EBC \equiv \triangle EFC$ (LLL), deci $m(\widehat{B}) = m(\widehat{EFC}) = a$ şi $m(\widehat{BCE}) = m(\widehat{ECF}) = b$. Cum $AB = AC$, rezultă că $2b = a$. Pe de altă parte, $\widehat{EFC}$ este unghi exterior triunghiului isoscel FAE, aşadar $m(\widehat{A}) + m(\widehat{AEF}) = m(\widehat{EFC})$, de unde $m(\widehat{A}) = b$. Scriind suma măsurilor unghiurilor în $\triangle ABC$, obţinem că $5b = 180°$, aşadar $m(\widehat{A}) = 36°$.



Clasa a VII-a

VII.214. *Pentru $n \in \mathbb{Z}$, notăm $E(n) = (n-1)(n-2)\ldots(n-2016)$.*

a) Demonstraţi că $E(n) \geq 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}$.

b) Determinaţi cel mai mic număr întreg m astfel încât $E(n) > 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq m$.

Alecu Orlando şi Mihaela Roşioru, Roşiorii de Vede

Soluţie. a) Dacă $n \in \{1, 2, ..., 2016\}$, atunci $E(n) = 0$. Dacă $n \geq 2017$, fiecare paranteză este pozitivă, deci $E(n) > 0$. Dacă $n \leq 0$, avem 2016 paranteze negative, prin urmare $E(n) > 0$.

b) Conform celor de mai sus, obţinem că $m = 2017$.

VII.215. *Determinaţi numerele întregi m şi n pentru care $m^2 - 6mn + 5n^2 = 2017$.*

Ionel Tudor, Călugăreni şi Viorica Dogaru, Giurgiu

Soluţie. Relaţia din enunţ se scrie $(m-n)(m-5n) = 2017$; cum 2017 este prim, obţinem variantele $(m-n, m-5n) \in \{(1, 2017); (2017, 1); (-1, -2017); (-2017, -1)\}$. Găsim soluţiile $(m, n) \in \{(-503, -504); (2521; 504); (503; 504); (-2521, -504)\}$.

VII.216. *Determinaţi numerele naturale $\overline{abc}$ cu cifrele a, b, c nenule, ştiind că $\sqrt{\overline{abc}} + \sqrt{\overline{bc}}$ este număr natural.*

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

Soluţie. Din $\sqrt{x}+\sqrt{y}\in\mathbb{Q}$, cu $x,y\in\mathbb{Q}$, rezultă că $\sqrt{x}\in\mathbb{Q}$ şi $\sqrt{y}\in\mathbb{Q}$; deducem că $\sqrt{\overline{abc}}$ şi $\sqrt{\overline{bc}}$ sunt numere raţionale, deci $\overline{abc}$ şi $\overline{bc}$ sunt pătrate perfecte. Obţinem că $\overline{abc}\in\{225,625\}$.

VII.217. *Determinaţi cea mai mică valoare a numărului natural n pentru care 13^n+n se divide cu 61.*

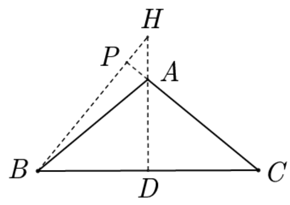
Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Observăm că $13^3=M_{61}+1$. Dacă $n=3k$, $k\in\mathbb{N}$, atunci $13^n+n=(M_{61}+1)^k+3k=M_{61}+3k+1$ şi acest număr se divide cu 61 pentru $k_{min}=20$. Dacă $n=3k+1$, $k\in\mathbb{N}$, atunci $13^n+n=13(M_{61}+1)^k+3k+1=M_{61}+3k+13$ şi acest număr se divide cu 61 pentru $k_{min}=16$. Dacă $n=3k+2$, $k\in\mathbb{N}$, atunci $13^n+n=169(M_{61}+1)^k+3k+2=M_{61}+3k+49$ şi acest număr se divide cu 61 pentru $k_{min}=4$. Cea mai mică valoare a lui n se obţine în cel de-al treilea caz şi este $n_{min}=14$.

VII.218. *Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $AB=AC=15$ şi $BC=24$. Pe semidreapta opusă bisectoarei unghiului $\widehat{A}$ se consideră punctul H astfel încât $AH=7$. Arătaţi că H este ortocentrul triunghiului ABC.*

Viorica Momiţă, Iaşi

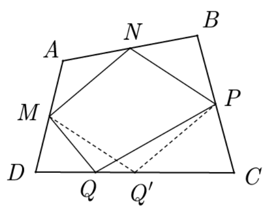
Soluţie. Fie D mijlocul laturii BC şi $\{P\}=AC\cap BH$. Evident, punctele A,D şi H sunt coliniare, iar $DH=AD+AH=9+7=16$. Cum $\dfrac{BD}{DH}=\dfrac{12}{16}=\dfrac{9}{12}=\dfrac{AD}{BD}$, triunghiurile BDH şi ADB sunt asemenea. Rezultă că $m(\widehat{HBD})=m(\widehat{BAD})=90^\circ-m(\widehat{C})$ şi atunci $m(\widehat{BPC})=180^\circ-(m(\widehat{PBC})+m(\widehat{C}))=90^\circ$, deci BP este înălţime în $\triangle ABC$. Punctul H se află la intersecţia înălţimilor AD şi BP, aşadar este ortocentrul $\triangle ABC$.



VII.219. *Fie M,N,P mijloacele laturilor DA,AB şi BC ale patrulaterului convex $ABCD$ iar Q un punct pe latura CD, diferit de mijlocul acesteia. Arătaţi că $AB\|CD$ dacă şi numai dacă $\mathcal{A}_{MNPQ}=\dfrac{1}{2}\mathcal{A}_{ABCD}$.*

Ovidiu Pop, Satu Mare

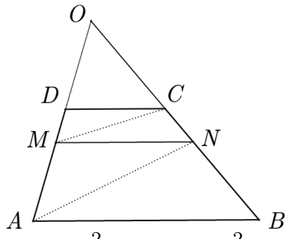
Soluţie. Fie Q' mijlocul laturii CD; atunci $\mathcal{A}_{MNPQ'}=\dfrac{1}{2}\mathcal{A}_{ABCD}$, prin urmare:
$\mathcal{A}_{MNPQ}=\dfrac{1}{2}\mathcal{A}_{ABCD}\Leftrightarrow\mathcal{A}_{MNPQ}=\mathcal{A}_{MNPQ'}\Leftrightarrow\mathcal{A}_{QMP}=\mathcal{A}_{Q'MP}\Leftrightarrow d(Q,MP)=d(Q',MP)\Leftrightarrow QQ'\parallel MP\Leftrightarrow d(M,CD)=d(P,CD)\Leftrightarrow 2\cdot d(M,CD)=2\cdot d(P,CD)\Leftrightarrow d(A,CD)=d(B,CD)\Leftrightarrow AB\parallel CD$.



VII.220. *Se consideră trapezul $ABCD$ ($AB \| CD$) şi punctele $M \in (AD)$ şi $N \in (BC)$ astfel încât $MN \| AB$. Arătaţi că patrulaterele $AMCN$ şi $BMDN$ sunt sau nu simultan trapeze.*

Ioan Pop, Iaşi

Soluţie. Notăm $O = AD \cap BC$, $a = AB$, $b = CD$ şi $c = MN$. Dacă $ANCM$ este trapez, atunci $AN \parallel MC$, de unde $\widehat{MAN} \equiv \widehat{DMC}$ şi $\widehat{CMN} \equiv \widehat{NAB}$. Obţinem că $\triangle AMN \sim \triangle MDC$ şi $\triangle MCN \sim \triangle ANB$, deci $\dfrac{MC}{AN} = \dfrac{b}{c}$ şi, respectiv, $\dfrac{MC}{AN} = \dfrac{c}{a}$. Deducem că $\dfrac{b}{c} = \dfrac{c}{a}$, adică $ab = c^2 (*)$.



Cum $\dfrac{OB}{ON} = \dfrac{a}{c}$, rezultă că $\dfrac{NB}{ON} = \dfrac{a-c}{c}$. Analog, $\dfrac{ON}{CN} = \dfrac{c}{c-b}$, prin urmare $\dfrac{NB}{CN} = \dfrac{NB}{ON} \cdot \dfrac{ON}{CN} = \dfrac{a-c}{c-b} = \dfrac{ac-c^2}{c^2-bc} \overset{(*)}{=} \dfrac{ac-c^2}{ab-bc} = \dfrac{c(a-c)}{b(a-c)} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{MN}{DC}$. Din $\dfrac{NB}{CN} = \dfrac{MN}{DC}$ şi $\widehat{DCN} \equiv \widehat{MNB}$ obţinem că $\triangle DCN \sim \triangle MNB$, deci $\widehat{CND} \equiv \widehat{NBM}$, aşadar $MB \parallel DN$, adică $BMDN$ este trapez.

Rezumând, condiţia (*) este necesară şi suficientă pentru ca fiecare dintre cele două patrulatere să fie trapez.

Clasa a VIII-a

VIII.214. *a) Dacă un triunghi are aria egală cu 2, atunci cel puţin două dintre laturile sale au lungimile cel puţin egale cu 2.*

b) Arătaţi că există triunghiuri care să aibă aria egală cu 2 şi exact două laturi mai mari decât 2.

Maria Rusu, Târgu Frumos

Soluţie. a) Presupunem, prin absurd, că laturile AB şi AC ale triunghiului ABC de arie 2 sunt strict mai mici decât 2; atunci $2 = \mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{A} \leq \dfrac{1}{2} AB \cdot AC < 2$, contradicţie.

b) Considerăm, de exemplu, triunghiul isoscel ABC de bază $BC = 1$, având înălţimea $AD = 4$. Avem că $\mathcal{A}_{ABC} = 2$, $BC < 2$ şi $AB = AC = \dfrac{\sqrt{65}}{2} > 2$.

VIII.215. *Fie I centrul sferei înscrisă în tetraedrul echifacial $ABCD$. O dreaptă d care trece prin I intersectează planele $(BCD), (ACD), (ABD)$ şi (ABC) în A', B', C' respectiv D'. Dacă punctul L, interior tetreaedrului, se află pe dreapta d, arătaţi că* $\dfrac{A'L}{A'I} + \dfrac{B'L}{B'I} + \dfrac{C'L}{C'I} + \dfrac{D'L}{D'I} = 4$.

Constantin Petrea, Paşcani

Soluţie. Fie r raza sferei înscrise şi x, y, z, t distanţele de la punctul L la planele $(BCD), (ACD), (ABD)$, respectiv (ABC). Din asemănări evidente, avem că $\dfrac{A'L}{A'I} = \dfrac{x}{r}$ şi analoagele. Pe de altă parte, exprimând în două moduri volumul tetraedrului, avem: $\mathcal{V}_{ABCD} = 4 \cdot \mathcal{V}_{IBCD} = \mathcal{V}_{LBCD} + \mathcal{V}_{LACD} + \mathcal{V}_{LABD} + \mathcal{V}_{LABC} \Rightarrow 4 \cdot \frac{Sr}{3} = \frac{Sx}{3} + \frac{Sy}{3} + \frac{Sz}{3} - \frac{St}{3} \Rightarrow 4r = x + y + z + t$ (am notat cu S aria unei feţe). În aceste condiţii, $\frac{A'L}{A'I} + \frac{B'L}{B'I} + \frac{C'L}{C'I} + \frac{D'L}{D'I} = \frac{x}{r} + \frac{y}{r} + \frac{z}{r} + \frac{t}{r} = \frac{4r}{r} = 4.$

VIII.216. *Fie a, b, c, d, e numere întregi astfel încât $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 = 1001$. Demonstraţi că cel puţin unul dintre cele cinci numere este divizibil cu 7.*

Roxana Vasile şi Ileana Dragomir, Craiova

Soluţie. Dacă $a \in \mathbb{Z}$, atunci a^3 dă, la împărţirea prin 7, unul dintre resturile $0, 1$ sau 6. Adunând cinci cuburi perfecte nedivizibile cu 7, se constată că suma lor nu poate fi divizibilă cu 7. Observând că 1001 se divide cu 7, urmează concluzia problemei.

VIII.217. *Fie p un număr natural prim. Vom spune că numărul întreg a este p-admisibil dacă există $x, y \in \mathbb{Z}^*$, $x \neq y$ astfel încât $\frac{x}{y} + \frac{py}{x} = a$. Determinaţi numerele 2017-admisibile.*

Dan Popescu, Suceava

Soluţie. Dacă a este $p-$admisibil, atunci $x^2 - axy + py^2 = 0$, cu $x, y \in \mathbb{Z}^*$, $x \neq y$. Deducem că $(2x - ay)^2 = y^2(a^2 - 4p)$, prin urmare $a^2 - 4p = b^2$, cu $b \in \mathbb{N}$. Obţinem că $(a-b)(a+b) = 4p^2$ şi, cum $a-b$ şi $a+b$ au aceeaşi paritate, sunt posibile doar situaţiile $(a-b, a+b) \in \{(2, 2p); (-2p, -2)\}$. Rezultă că numerele $p-$admisibile sunt $a = p+1$ (pentru $y \in \mathbb{Z}^*$ oarecare şi $x = -py$). In cazul $p = 2017$, avem $a \in \{2018, -2018\}$.

VIII.218. *Demonstraţi că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât ultimele 2017 cifre ale numărului 2017^n să fie $\underbrace{00\ldots00}_{2016 \text{ de } 0}1$.*

Marian Voinea şi Laurenţiu Moldovan, Bucureşti

Soluţie. Împărţim (cu rest) fiecare dintre numerele $2017^1, 2017^2, 2017^3, \ldots$ prin 10^{2017}. Cum restul ia valori într-o mulţime finită, vor exista două împărţiri care să furnizeze acelaşi rest: $2017^i = 10^{2017} \cdot c_1 + r$ şi $2017^j = 10^{2017} \cdot c_2 + r$, cu $i < j$. Atunci $2017^j - 2017^i = 10^{2017}(c_2 - c_1)$, deci $2017^i(2017^n - 1) = 10^{2017}(c_2 - c_1)$, unde $n = j - i \in \mathbb{N}^*$. Însă $(2017^i, 10^{2017}) = 1$, prin urmare $10^{2017} | (2017^n - 1)$ şi, de aici, rezultă concluzia problemei.

VIII.219. *Demonstraţi că există o infinitate de perechi (x, y) de numere întregi pentru care $x^3 - 30y = 56$.*

Ioan Viorel Codreanu, Satulung (Maramureş)

Soluţie. Cum $x^3+4 = 30(y+2)$, rezultă că x^3+4 se divide cu $2, 3$ şi 5. Deducem că $x = M_2$, $x = M_3+2$ respectiv $x = M_5+1$, prin urmare $x+4$ se divide cu $2, 3$ şi 5, adică $x = 30a - 4$, cu $a \in \mathbb{Z}$. Înlocuind în ecuaţie, obţinem că $y = 900a^3 - 360a^2 + 48a - 4$, deci soluţiile ecuaţiei sunt perechile de forma $(30a-4, 900a^3-360a^2+48a-4)$, $a \in \mathbb{Z}$.

VIII.220. *Determinaţi $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât numărul $A = 2^n + n^{18}$ să fie prim.*

Dan Lucian Grigorie şi Constantina Prunaru, Craiova

Soluţie. Dacă n este par, atunci A este par şi mai mare ca 2, deci nu poate fi prim. Pentru $n = 1$, avem că $A = 3$, care este prim. Fie $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}^*$; atunci

$2^n = 2 \cdot 4^k = 2 \cdot (3+1)^k = 2 \cdot (M_3 + 1) = M_3 + 2$. Dacă n nu ar fi multiplu de 3, numărul n^{18} ar fi de forma $M_3 + 1$, deci A s-ar divide cu 3 şi, fiind mai mare ca 3, A nu ar mai fi număr prim. Rămâne că $n = 3p$, cu p impar şi atunci $A = 2^n + n^{18} = 2^{3p} + n^{18} = (2^p + n^6)(2^{2p} - 2^p \cdot n^6 + n^{12})$ nu poate fi număr prim. În concluzie, singura valoare convenabilă a lui n este $n = 1$.

Clasa a IX-a

IX.176. *Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, arătaţi că*

$$\sum \frac{1}{(a+b)^2 + (a+c)^2} \leq \frac{1}{8\sqrt{abc}} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \right).$$

Ovidiu Pop, Satu Mare

Soluţie. Avem: $(a+b)^2 + (a+c)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 + a^2 + ac + ac + c^2 \geq 8\sqrt[8]{a^8 b^4 c^4} = 8\sqrt{a} \cdot \sqrt{abc}$. Atunci $\dfrac{1}{(a+b)^2 + (a+c)^2} \leq \dfrac{1}{8\sqrt{abc}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{a}}$ şi, prin sumarea celor trei inegalităţi de acest tip, obţinem cerinţa problemei.

IX.177. *Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică cu $a_1 > 0$ şi $r \in \mathbb{N}^*$. Ştiind că există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\left(\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{1 + 2 + \ldots + k} \right)^{k+1} = a_1^2 r^{k-1}$, arătaţi că $a_n \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.*

Cătălin Cristea, Craiova

Soluţie. Avem: $a_1 + a_2 + ... + a_k = \underbrace{a_1 + a_1 + ... + a_1}_{k \ termeni} + \underbrace{r + r + ... + r}_{\frac{k(k-1)}{2} \ termeni} \geq (k + \dfrac{(k-1)k}{2}) \cdot \sqrt[k + \frac{(k-1)k}{2}]{a_1^k \cdot r^{\frac{(k-1)k}{2}}} = (1 + 2 + ... + k) \cdot \sqrt[k+1]{a_1^2 \cdot r^{k-1}}$.

Rezultă că $\left(\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_k}{1 + 2 + ... + k} \right)^{k+1} \geq a_1^2 \cdot r^{k-1}$, cu egalitate dacă şi numai dacă $a_1 = r$. Deducem că a_1, $r \in \mathbb{N}^*$, prin urmare $a_n \in \mathbb{N}^*$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

IX.178. *Fie $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $9x^2 + 25y^2 - 6x + 30y + 1 = 0$. Arătaţi că $|3x - 5y - 4| \leq 3\sqrt{2}$.*

Constantin Dragomir, Piteşti

Soluţie. Fie $t = 5y - 3x + 4 \in \mathbb{R}$; relaţia din ipoteză devine $(3x-1)^2 + (5y+3)^2 = 9 \Leftrightarrow (5y + 3 - t)^2 + (5y+3)^2 = 9 \Leftrightarrow 2(5y+3)^2 - 2t(5y+3) + t^2 - 9 = 0$. Cum $5y + 3 \in \mathbb{R}$, discriminantul acestei ecuaţii (cu necunoscuta $5y+3$) este nenegativ, deci $4t^2 - 8(t^2 - 9) \geq 0$. Obţinem că $t^2 \leq 18$, prin urmare $|3x - 5y - 4| = |t| \leq 3\sqrt{2}$.

IX.179. În triunghiul ABC (cu notaţiile uzuale) are loc inegalitatea

$$a^2 \cdot r_a + b^2 \cdot r_b + c^2 \cdot r_c \geq 108r^3.$$

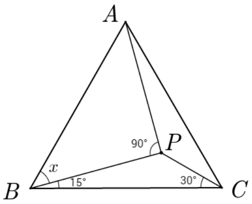
D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

Soluţie. Vom folosi inegalitatea lui Bergström, identitatea $\sum \dfrac{1}{r_a} = \dfrac{1}{r}$ şi inegalitatea lui Mitrinović $p \geq 3\sqrt{3}r$. Avem: $\sum a^2 r_a = \sum \dfrac{a^2}{\frac{1}{r_a}} \geq \dfrac{(a+b+c)^2}{\sum \frac{1}{r_a}} = \dfrac{4p^2}{\frac{1}{r}} = 4rp^2 \geq 4r(3\sqrt{3}r)^2 = 108r^3$. Egalitatea se atinge în triunghiul echilateral.

IX.180. *Presupunem că în interiorul triunghiului isoscel ABC ($AB = AC$) există un punct P astfel încât $m(\widehat{PBC}) = 15°$, $m(\widehat{PCB}) = 30°$ şi $PA \perp PB$. Demonstraţi că triunghiul ABC este echilateral.*

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Notăm $x = m(\widehat{PBA})$; atunci $m(\widehat{PCA}) = x - 15°$, $m(\widehat{PAB}) = 90° - x$ şi $m(\widehat{PAC}) = 60° - x$. Aplicând teorema lui Ceva (forma trigonometrică), obţinem succesiv: $\sin 30° \cdot \sin(60° - x) \cdot \sin x = \sin(x - 15°) \cdot \sin(90° - x) \cdot \sin 15° \Leftrightarrow \sin x \cdot \sin(60° - x) = \cos x \cdot (\cos(x - 30°) - \cos x) \Leftrightarrow \sin x \cos x \sin 60° - \sin^2 x \cos 60° = \cos^2 x \cos 30° + \sin x \cos x \sin 30° - \cos^2 x \Leftrightarrow \sqrt{3} \sin 2x - (1 - \cos 2x) = \sqrt{3}(1 + \cos 2x) + \sin 2x - 2(1 + \cos 2x)$.



Notând $t = \text{tg} x$, rezultă că $2t^2 - 2t(\sqrt{3} - 1) + 2\sqrt{3} - 4 = 0$, ecuaţie ale cărei soluţii sunt $t_1 = 1$ şi $t_2 = \sqrt{3} - 2$. Convine doar $\text{tg} x = 1$, deci $x = 45°$. Deducem că $\triangle ABC$ este isoscel cu unghiul $\widehat{B}$ de $60°$, aşadar $\triangle ABC$ este echilateral.

Clasa a X-a

X.176. *Dacă $a, b, c, d \in (0, 1)$ sau $a, b, c, d \in (1, \infty)$, arătaţi că*

$$\log_{abc} bd^2 + \log_{abd} ac^2 + \log_{bcd} ca^2 + \log_{acd} db^2 \geq 4.$$

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. Notăm $x = \lg a$, $y = \lg b$, $z = \lg c$, $t = \lg d$; numerele x, y, z şi t au aceleaşi semn, iar inegalitatea de demonstrat devine $\dfrac{y + 2t}{x + y + z} + \dfrac{x + 2z}{x + y + t} + \dfrac{z + 2x}{y + z + t} + \dfrac{t + 2y}{x + z + t} \geq 4$. Înlocuind numerele x, y, z, t cu opusele lor, această inegalitate nu se modifică, prin urmare putem presupune că x, y, z, t sunt pozitive. Renotăm $x + y + z = m$, $x + y + t = n$, $y + z + t = p$, $x + z + t = q$, $m, n, p, q > 0$ şi avem de demonstrat că $\dfrac{n}{m} + \dfrac{p}{m} - 1 + \dfrac{m}{n} + \dfrac{q}{n} - 1 + \dfrac{m}{p} + \dfrac{q}{p} - 1 + \dfrac{n}{q} + \dfrac{p}{q} - 1 \geq 4$, adică $\sum \left(\dfrac{m}{n} + \dfrac{n}{m}\right) \geq 8$, inegalitate care este evidentă. Egalitatea se atinge dacă şi numai dacă $a = b = c = d$.

X.177. *Determinaţi $z \in \mathbb{C}$, ştiind că $5z^{2017} - |z| = 4$ şi $z^{2015} + 2|z| = 3$.*

Oana Preda şi Tatiana Cristea, Craiova

Soluţie. Avem: $5|z|^{2017} = ||z| + 4| \leq |z| + 4$. Dacă $|z| > 1$, atunci $5|z|^{2017} = |z|^{2017} + 4|z|^{2017} > |z| + 4 \cdot 1$, contradicţie; rămâne că $|z| \leq 1$. Apoi, $3 = \left|z^{2015} + 2|z|\right| \leq |z|^{2015} + 2|z|$ şi, ca mai înainte, obţinem că $|z| \geq 1$. În concluzie $|z| = 1$, apoi $z^{2017} = z^{2015} = 1$. Dacă U_n este mulţimea rădăcinilor de ordin n ale unităţii, atunci $z \in U_{2017} \cap U_{2015} = U_{(2017, 2015)} = \{1\}$, iar $z = 1$ verifică relaţiile din enunţ.

X.178. *Determinaţi $x, y \in \mathbb{R}$ pentru care $x^3 - 3xy^2 = -46$ şi $y^3 - 3x^2y = -9$.*

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

Soluţie. Dacă (x, y) este soluţie a sistemului, atunci $(x + iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3) = -46 + 9i = (2 + 3i)^3$. Rezultă că $x + iy \in \{2 + 3i, (2 + 3i) \cdot \varepsilon, (2 + 3i) \cdot \varepsilon^2\}$, unde $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ este rădăcină primitivă cubică a unităţii. Obţinem soluţiile sistemului: $\left\{(2,3); \left(\frac{-2+3\sqrt{3}}{2}, \frac{-3-2\sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{-2-3\sqrt{3}}{2}, \frac{-3+2\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$.

X.179. *Numerele complexe x, y, z au module egale cu 1 şi $xyz = x + y + z + 2$. Arătaţi că două dintre numere sunt egale cu -1.*

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţia 1. Fie $S = x + y + z$, $Q = xy + yz + zx$ şi $P = xyz$. Din ipoteză avem $S = P - 2$. Apoi, $|x| = 1$ implică $\overline{x} = \frac{1}{x}$ şi analoagele; trecând la conjugate în relaţia din ipoteză, obţinem $\frac{1}{xyz} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 2 \Leftrightarrow Q = 1 - 2P$. Numerele x, y şi z sunt rădăcinile polinomului $t^3 - St^2 + Qt - P = t^3 - (P-2)t^2 + (1-2P)t - P = (t+1)^2(t-P)$, de unde concluzia.

Soluţia 2. Presupunem, prin absurd, că fiecare dintre numerele x, y, z este diferit de -1; atunci ipoteza problemei se poate scrie sub forma $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 1$. Trecând la conjugate şi folosind faptul că $\overline{x} = \frac{1}{x}$ ş.cl., obţinem $\frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1} = 1$. Adunăm cele două relaţii şi ajungem la contradicţia $3 = 1$, ceea ce arată că măcar unul dintre numere trebuie să fie -1. Dacă, de exemplu, $x = -1$, relaţia din enunţ devine $(y+1)(z+1) = 0$, deci măcar încă unul dintre numere va fi egal cu -1.

X.180. *Determinaţi $x \in (1, \infty)$ pentru care $x^{\log_3 2} + 1 = (x-1)^{\log_2 3}$.*

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

Soluţie. Considerăm funcţia bijectivă $f : (1, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = (x-1)^{log_2 3}$, cu inversa $f^{-1} : (0, \infty) \to (1, \infty)$, $f^{-1}(y) = y^{log_3 2} + 1$. Ecuaţia devine $f^{-1}(x) = f(x)$, $x \in (1, \infty)$, echivalentă cu $f(x) = x$, $x \in (1, \infty)$, adică $(x-1)^{log_2 3} = x \Leftrightarrow x - 1 = x^{log_3 2} \Leftrightarrow x^{1-log_3 2} - \frac{1}{x^{log_3 2}} = 1$. Funcţiile $x \mapsto x^{1-log_3 2}$, $x > 1$ şi $x \mapsto -\frac{1}{x^{log_3 2}}$, $x > 1$ sunt strict crescătoare, prin urmare funcţia $g(x) = x^{1-log_3 2} - \frac{1}{x^{log_3 2}}$, $x > 1$ este strict crescătoare, deci injectivă. Cum $g(3) = 1$, rezultă că $x = 3$ este unica soluţie a ecuaţiei din enunţ.

Clasa a XI-a

XI.176. *Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi $B = A \cdot A^t$, arătaţi că $B^6 + B^4 + I_n \neq B^3 + B$.*

Bogdan-Petre Posa, Bucureşti

Soluţie. Presupunem, prin absurd, că există $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pentru care $B^6 + B^4 - B^3 - B + I_n = O_n$. Dacă λ este o valoare proprie a matricei B, rezultă că $\lambda^6 + \lambda^4 - \lambda^3 - \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\lambda^3 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = 0$, deci $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Pe de altă parte, cum $B^t = (AA^t)^t = AA^t = B$ (adică B este simetrică), toate valorile proprii ale lui B sunt numere reale. Contradicţia la care am ajuns arată că presupunerea făcută este falsă.

XI.177. *Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie concavă cu proprietatea că $f(x^2+x+1)\le f(x+1)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Demonstraţi că $f(x^2+x+1)\le f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.*

Dumitru Crăciun, Fălticeni

Soluţie. În relaţia din ipoteză, trecem $x\mapsto -1-x$ şi obţinem că $f(x^2+x+1)\le f(-x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, prin urmare $2f(x^2+x+1)\le f(x+1)+f(-x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Insă, din concavitatea funcţiei f, avem că $f(x+1)+f(-x)\le 2f\left(\dfrac{x+1-x}{2}\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ şi, de aici, rezultă concluzia problemei.

XI.178. *Fie $(\lambda_n)_{n\ge1}$ un şir cu termeni pozitivi astfel încât şirul $(\lambda_{n+1}-\lambda_n)_{n\ge1}$ este mărginit. Calculaţi limita şirului $(x_n)_{n\ge1}$ definit prin*

$$x_n=\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}+\lambda_n\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Gheorghe Costovici, Iaşi

Soluţie. Şirul $a_n=1+\dfrac{1}{\sqrt{1}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$, $n\ge1$, este convergent; notăm $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$. Observăm că $a_{(n+1)^2}-a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}-2\sqrt{(n+1)^2}+2\sqrt{n}$, prin urmare $x_n=\sqrt[n]{b_n}$, unde $b_n=a_{(n+1)^2}-a_n+2n+2-2\sqrt{n}+\lambda_n=c_n+2n+2-2\sqrt{n}+\lambda_n$, $c_n=a_{(n+1)^2}-a_n$, $n\in\mathbb{N}^*$; evident că $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$. Cum $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}-1=\dfrac{b_{n+1}-b_n}{b_n}=\dfrac{c_{n+1}-c_n+2-2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})+\lambda_{n+1}-\lambda_n}{b_n}$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{b_{n+1}}{b_n}-1\right)=0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=1$. Conform criteriului rădăcinii, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=1$.

XI.179. *Considerăm şirul $(x_n)_{n\ge0}$ definit prin $x_0\ge2$, $x_{n+1}=x_n^4-4x_n^2+2$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Notăm $a_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+x_n}}}}_{3n\ radicali}$ şi $b_n=\underbrace{\sqrt{-2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+x_n}}}}}_{3n-2\ radicali}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Determinaţi limita şirului $c_n=2^n(a_n+b_n-2)$, $n\in\mathbb{N}^*$.*

Florin Stănescu, Găeşti

Soluţie. Notând $x_n=2y_n$, $n\ge0$, relaţia de recurenţă devine $y_{n+1}=8y_n^4-8y_n^2+1$, $\forall n\in\mathbb{N}$, cu $y_0\ge1$. Fie $\mathrm{ch}x=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$, $x\in\mathbb{R}$; atunci $\mathrm{ch}2x=2\mathrm{ch}^2x-1$, iar $\mathrm{ch}4x=8\mathrm{ch}^4x-8\mathrm{ch}^2x+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Funcţia ch: $[0,\infty)\to[1,\infty)$ fiind bijectivă, există şi este unic $\alpha\in[0,\infty)$ pentru care $y_0=\mathrm{ch}\alpha$. Folosind cele de mai sus, se arată prin inducţie că $y_n=\mathrm{ch}(4^n\cdot\alpha)$, $\forall n\in\mathbb{N}$, deci $x_n=2\mathrm{ch}(4^n\cdot\alpha)$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Tot prin inducţie se arată că $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+2\mathrm{ch}a}}}}_{p\ radicali}=2\mathrm{ch}\dfrac{a}{2^p}$, $\forall p\in\mathbb{N}^*$,

$\forall a \in \mathbb{R}$. Rezultă că $a_n = 2\text{ch}\dfrac{4^n \cdot \alpha}{2^{3n}} = 2\text{ch}\dfrac{\alpha}{2^n} = e^{\frac{\alpha}{2^n}} + e^{-\frac{\alpha}{2^n}}$, iar $b_n = \sqrt{-2 + a_{n-1}} = e^{\frac{\alpha}{2^n}} - e^{-\frac{\alpha}{2^n}}$. Astfel, $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n(a_n + b_n - 2) = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{n+1} \cdot (e^{\frac{\alpha}{2^n}} - 1) = 2\alpha \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{\frac{\alpha}{2^n}} - 1}{\frac{\alpha}{2^n}} = 2\alpha$, unde $\alpha = arcch\dfrac{x_0}{2} = \ln\dfrac{x_0 + \sqrt{x_0^2 - 4}}{2}$.

XI.180. *Fie $(L_n)_{n\geq 1}$ şirul lui Traian Lalescu, $L_n = \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Calculaţi limita şirului $B_n = e^{x_{n+1}} \cdot \sqrt[n+1]{L_{n+1}} - e^{x_n} \cdot \sqrt[n]{L_n}$.*

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

Soluţie. Notând $u_n = \dfrac{e^{x_{n+1}} \cdot \sqrt[n+1]{L_{n+1}}}{e^{x_n} \cdot \sqrt[n]{L_n}}$, avem că $B_n = e^{x_n} \cdot \sqrt[n]{L_n} \cdot (u_n - 1) = e^{x_n - \ln n} \cdot \sqrt[n]{L_n} \cdot n(u_n - 1)$. Se ştie că $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = \dfrac{1}{e}$, prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{L_n} = 1$ şi atunci $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \left(\lim\limits_{n\to\infty} e^{x_{n+1} - x_n}\right) \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n+1]{L_{n+1}}}{\sqrt[n]{L_n}}\right) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n+1}}\right) \cdot 1 = 1$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n - 1}{\ln u_n} = 1$. Apoi, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n^n = \lim\limits_{n\to\infty} e^{(x_{n+1} - x_n)\cdot n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{L_{n+1}}{L_n} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[n+1]{L_{n+1}}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{n}{n+1}} \cdot 1 \cdot 1 = e$. Ţinând cont şi de faptul că $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - \ln n) = \gamma$ (constanta *Euler-Mascheroni*), obţinem că $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = e^\gamma \cdot 1 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{u_n - 1}{\ln u_n} \cdot \ln u_n^n\right) = e^\gamma \cdot \ln(\lim\limits_{n\to\infty} u_n^n) = e^\gamma \cdot \ln e = e^\gamma$.

Clasa a XII-a

XII.176. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi impară. Calculaţi*

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{(x^2+1)(1 + xe^{f(\ln x)})} dx.$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

Soluţie. Notăm cu I integrala din enunţ şi facem schimbarea de variabilă $x = \dfrac{1}{t}$; obţinem că $I = \displaystyle\int_{e}^{\frac{1}{e}} \frac{1}{\left(\frac{1}{t^2} + 1\right)\left(1 + \frac{1}{t} e^{f(\ln \frac{1}{t})}\right)} \cdot \frac{-1}{t^2} \cdot dt = \int_{e}^{\frac{1}{e}} \frac{t}{(1+t^2)(t + e^{-f(\ln t)})} dt = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{te^{f(\ln t)}}{(1+t^2)(te^{f(\ln t)} + 1)} dt = J$. Apoi, $I + J = \displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{1+x^2} dx = \text{arctg}\frac{e^2 - 1}{2e}$, prin urmare $I = \dfrac{1}{2}\text{arctg}\dfrac{e^2 - 1}{2e}$.

XII.177. *Calculaţi $\displaystyle\int_0^1 \ln((1+x)(1+x^9)) \cdot \frac{x^2}{1+x^3} dx$.*

Lucian Tuţescu şi Ionuţ Ivănescu, Craiova

Soluţie. Dacă I este integrala din enunţ, atunci $I = I_1 + I_2$, $I_1 = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3} \cdot \ln(1+x)dx$ şi $I_2 = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{\ln(1+x^9)}{1+x^3}dx$. Integrând prin părţi, $I_1 = \frac{1}{3}\int_0^1 (\ln(1+x^3))'(1+x)dx = \frac{1}{3}\left(\ln(1+x^3)\cdot\ln(1+x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \ln(1+x^3)\cdot\frac{1}{1+x}\,dx\right) = \frac{\ln^2 2}{3} - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\ln(1+x^3)}{1+x}dx$. Cu substituţia $y = x^3$, obţinem că $I_2 = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\ln(1+y^3)}{1+y}dy$. Sumând, deducem că $I = I_1 + I_2 = \frac{\ln^2 2}{3}$.

XII.178. *Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă astfel încât $\int_0^1 f(x)dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. Demonstraţi că există $c \in (0,1)$ cu proprietatea că $\frac{1}{1+2c} < f(c) < \frac{1}{3c}$.*

Mihai Haivas, Iaşi

Soluţie. Remarcăm că $\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. Considerăm funcţia $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \frac{1}{x^2+x+1}$, care este continuă pe $[0,1]$; există atunci $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ primitivă a funcţiei g. Cum $G(1) - G(0) = \int_0^1 g(x)dx = 0$, înseamnă că $G(1) = G(0)$, deci putem aplica teorema lui Rolle funcţiei G : există $c \in (0,1)$ astfel încât $G'(c) = g(c) = 0$, prin urmare există $c \in (0,1)$ astfel incât $f(c) = \frac{1}{c^2+c+1}$. Deoarece $\frac{1}{1+2c} < \frac{1}{c^2+c+1} < \frac{1}{3c}$, $\forall c \in (0,1)$, rezultă cerinţa problemei.

XII.179. *Considerăm funcţiile continue $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ şi $g : (0,\infty) \to (0,\infty)$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ şi $g(x+1) \le f(x) \le g(x)$, $\forall x \in (0,\infty)$. Arătaţi că şirul $x_n = \int_n^{n+1} g(x)dx$, $n \ge 1$, este convergent şi determinaţi limita sa.*

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

Soluţie. Din teorema de medie, există $c_n \in [n, n+1]$ pentru care $\int_n^{n+1} f(x)dx = f(c_n)$; cum $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+1} f(x)dx = 0$. Integrând pe intervalul $[n, n+1]$ în inegalitatea $g(x+1) \le f(x) \le g(x)$, $x \in (0,\infty)$, obţinem că $\int_n^{n+1} g(x+1)dx \le \int_n^{n+1} f(x)dx \le \int_n^{n+1} g(x)dx \Rightarrow \int_{n+1}^{n+2} g(t)dt \le \int_n^{n+1} f(x)dx \le \int_n^{n+1} g(x)dx \Rightarrow x_{n+1} \le \int_n^{n+1} f(x)dx \le x_n (*)$.

Din $(*)$ avem că $(x_n)_{n\ge1}$ este şir descrescător şi, cum $\mathrm{Im}g \subset (0,\infty)$, rezultă că (x_n) este mărginit inferior de 0, aşadar (x_n) este convergent; fie L limita sa. Trecând la limită în $(*)$, deducem că $L \le \lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+1} f(x)dx \le L$, prin urmare $L = 0$.

Notă. Am primit o soluţie bazată pe *Teorema convergenţei dominate a lui Lebesque*, din partea d-lui **Moubinool Omarjee**, Paris.

XII.180. *Fie p un număr natural prim, $p \equiv 1$ (mod 5). Arătaţi că ecuaţia $x^2 = \widehat{5}$ are soluţii în $\mathbb{Z}_p$.*

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

Soluţie. Fie $k \in \mathbb{N}^*$ pentru care $p = 5k + 1$ şi fie g un generator al grupului ciclic $(U(\mathbb{Z}_p), \cdot)$, care are ordinul $p-1$. Avem: $g^{p-1} = \widehat{1} \Rightarrow g^{5k} - \widehat{1} = \widehat{0} \Rightarrow (g^k - \widehat{1})(g^{4k} + g^{3k} + g^{2k} + g^k + \widehat{1}) = \widehat{0} \Rightarrow g^{4k} + g^{3k} + g^{2k} + g^k + \widehat{1} = \widehat{0}$ (cum ord$g = p-1$, avem că $g^k - \widehat{1} \neq \widehat{0}$) $\Rightarrow (\widehat{2}g^{2k} + g^k + \widehat{2})^2 - \widehat{5} \cdot g^{2k} = \widehat{0} \Rightarrow (g^{-k}(\widehat{2}g^{2k} + g^k + \widehat{2}))^2 - \widehat{5} = \widehat{0} \Rightarrow (\widehat{2}g^k + \widehat{2}g^{-k} + \widehat{1})^2 = \widehat{5}$. În concluzie, ecuaţia $x^2 = \widehat{5}$ are în $\mathbb{Z}_p$ soluţia $x = \widehat{2}g^k + \widehat{2}g^{-k} + \widehat{1}$.

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor propuse în nr. 1/2017

A. Nivel gimnazial

Notă. D-l **Titu Zvonaru**, autorul problemei **G312**, observă că numitorul $3ab - bc - ac$ nu este întoteauna pozitiv (de exemplu, pentru $a = b = 3, c = 5$, care sunt laturile unui triunghi, numitorul este negativ, iar pentru $a = b = 2, c = 3$ este egal cu zero). Problema se repară dacă se impune în ipoteză condiţia ca latura c să fie cea mai mică.

G316. *Se consideră a pungi numerotate $1, 2, \ldots, a$, fiecare conţinând câte b monede, $b > a$. Masele tuturor monedelor se exprimă prin numere întregi şi, cu excepţia unei pungi, toate monedele au aceeaşi masă. În acea pungă se află numai monede false, fiecare având masa cu p mai mică decât masa unei monede adevărate, unde p nu este multiplu de $a - 1$. Folosind un cântar cu afişaj, determinaţi din trei cântăriri care este numărul pungii cu monede false.*

Geanina Hăvârneanu, Iaşi

Soluţie. Cântărim o monedă din prima pungă; fie k masa acesteia. Apoi, cântărim a monede, câte una din fiecare pungă; fie m masa lor totală. Dacă $m - k \,\vdots\, a - 1$, atunci k este masa monedei false, masa monedei adevărate este $\dfrac{m-k}{a-1}$, iar diferenţa maselor este $p = \dfrac{m - ak}{a-1}$. Dacă $m - k \,\not\vdots\, a - 1$, atunci k este masa monedei adevărate, masa monedei false este $m - (a-1)k$, iar diferenţa maselor este $p = m - ak$. La cea de-a treia cântărire, luăm o monedă din punga 1, două monede din punga 2, ..., a monede din punga a şi le cântărim împreună; fie n masa lor totală. Numărul pungii care conţine monede false este $\dfrac{1}{p}\left(\dfrac{a(a+1)}{2} \cdot \text{ masa monedei adevarate } - n\right)$.

G317. *Aflaţi numerele naturale n pentru care $n! + (n+1)! + (n+3)!$ este cub perfect.*

Ioan Viorel Codreanu, Satulung (Maramureş)