Soluţie. Avem: $|f'(x)| \leq M$, $\forall x \in [0,1] \Rightarrow |f'(x) \cdot x \int_x^1 f(t)dt| \leq M \cdot x \cdot \int_x^1 f(t)dt \Rightarrow |\int_0^1 (f'(x) \cdot x \cdot \int_x^1 f(t)dt)dx| \leq M \cdot \int_0^1 (x \int_x^1 f(t)dt)dx$. Însă $\int_0^1 (x \int_x^1 f(t)dt)dx = \int_0^1 \left(\left(\frac{x^2}{2} \right)' \int_x^1 f(t)dt \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 f(x)dx$, iar

$$\int_0^1 (f'(x) \cdot x \cdot \int_x^1 f(t)dt)dx = -\int_0^1 f(x) \cdot \left(\int_x^1 f(t)dt - xf(x) \right) dx =$$
$$= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 f(x)dx \right)^2 + \int_0^1 xf^2(x)dx.$$

Pentru a obţine concluzia problemei, este destul să mai observăm că $\int_0^1 x^2 f(x)dx \leq \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor propuse în 1/2016

A. Nivel gimnazial

G296. *Asterix şi Obelix scriu, alternativ, numerele naturale* $1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100$ *în căsuţele unui tablou* 3×3, *fiecare număr câte o singură dată. Asterix începe şi doreşte ca, la final, să existe o linie şi o coloană având produsele numerelor egale cu* 1000*; în caz contrar, câştigă Obelix. Care dintre jucători are strategie de câştig?*

Ioan Viorel Codreanu, Satulung, Maramureş

Soluţie. Asterix are strategie de câştig: el începe prin a scrie undeva numărul 10. Colorăm cu roşu cele două căsuţe rămase pe linia lui 10, cu galben cele două căsuţe rămase pe coloana lui 10 şi lăsăm albe celelalte patru căsuţe. Grupăm numerele care mai trebuie scrise în perechi cu produsul 100 : $(1, 100)$, $(2, 50)$, $(4, 25)$, $(5, 20)$. Indiferent ce joacă Obelix, Asterix va răspunde completând, pe aceeaşi culoare, cu celălalt număr din pereche. În acest fel, produsele numerelor de pe linia roşie şi de pe coloana galbenă vor fi 1000.

G297. *Determinaţi toate numerele naturale* m *cu proprietatea că numărul* $m^2 + 6$ *se scrie folosind numai cifre de* 2.

Ioan Viorel Codreanu, Satulung, Maramureş

Soluţie. Nu putem avea $m^2 + 6 = 2$, iar $m^2 + 6 = 22$ când $m = 4$. Dacă $m^2 + 6$ se scrie folosind cel puţin trei cifre de 2, terminaţia lui m^2 va fi $\overline{\ldots 216}$, deci un număr care se divide cu 8. Ar trebui atunci ca m să se dividă cu 4, prin urmare m^2 se va divide cu 16. Însă 216 şi 2216 nu se divid cu 16, aşadar rămâne unica soluţie $m = 4$.

G298. *Demonstraţi că nu există numere prime* p *şi* q *pentru care numărul* $3pq - 1$ *să fie cub perfect.*

Marian Voinea şi Florentin Vişescu, Bucureşti

Soluţie. Presupunem, prin absurd, că $3pq - 1 = n^3$, cu $n \in \mathbb{N}$. Cum $n^3 - n \vdots 3$ şi $n^3 + 1 = 3pq \vdots 3$, rezultă că $n + 1 \vdots 3$, deci $n = 3k - 1$, $k \in \mathbb{N}$. Avem: $3pq = n^3 + 1 = (n+1)(n^2 - n + 1) = 3k(9k^2 - 9k + 3)$, prin urmare $pq = 3k(3k^2 - 3k + 1)$. Unul dintre numerele prime p sau q trebuie să fie egal cu 3; fie $p = 3$. Obţinem că $q = k(3k^2 - 3k + 1)$ este prim, unde $3k^2 - 3k + 1 \geq 7$ pentru $k \geq 2$ şi $3k^2 - 3k + 1 = 1$ când $k = 1$. Contradicţia la care am ajuns arată că este adevărată concluzia problemei.

G299. *Rezolvaţi în numere naturale ecuaţia* $5^a \cdot 3^b = 2^c + 1$.

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

Soluţie. Dacă $a = 0$, ecuaţia devine $3^b = 2^c + 1$. Dacă $b = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, atunci $3^b = 3 \cdot 9^k = 3(M_4 + 1)^k = 3(M_4 + 1) = M_4 + 3$; avem: $2^c + 1 = M_4 + 3 \Leftrightarrow c = 1$, prin urmare avem soluţia $(a, b, c) = (0, 1, 1)$. Dacă $b = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, obţinem că $(3^k - 1)(3^k + 1) = 2^c$, deci există $u, v \in \mathbb{N}^*$, $u < v$, astfel încât $3^k - 1 = 2^u$ şi $3^k + 1 = 2^v$. Deducem că $2^v - 2^u = 2$, adică $2^{v-1} - 2^{u-1} = 1$. Ţinând seama de parităţile celor doi membri, rezultă că $u = 1, v = 2$, de unde soluţia $(a, b, c) = (0, 2, 3)$.

Presupunem acum că $a \geq 1$; ultima cifră a lui $5^a \cdot 3^b$ va fi 5, deci 2^c se va termina în 4, prin urmare $c = 4k + 2$, $k \in \mathbb{N}$. În particular, $c \geq 2$, aşadar $2^c + 1 = M_4 + 1$; avem şi că $5^a = M_4 + 1$, deci $3^b = M_4 + 1$, de unde $b = 2n$, $n \in \mathbb{N}$. Când $b = 0$, obţinem că $5^a = 2^{4k+2} + 1$. Reducând modulo 3, deducem că a este de forma $a = 2m + 1$, $m \in \mathbb{N}$. Din $2^{4k+2} = 5^{2m+1} - 1 = (5 - 1)(5^{2m} + \ldots + 5 + 1)$, rezultă că $16^k = 5^{2m} + \ldots + 5 + 1$. Membrul drept fiind impar, se impune condiţia $k = 0$ şi găsim soluţia $(a, b, c) = (1, 0, 2)$.

Rămâne de studiat cazul $a \geq 1$, $b = 2n$, $n \geq 1$ (şi $c = 4k + 2$, $k \in \mathbb{N}$). Vom demonstra că, în această situaţie, nu obţinem noi soluţii. Pentru aceasta, observăm că membrul stâng se divide cu 9, în timp ce 2^{4k+2} nu se divide cu 9, după cum se constată uşor analizând situaţiile $k = 3p$, $k = 3p + 1$ şi $k = 3p + 2$, $p \in \mathbb{N}$.

În concluzie, soluţiile ecuaţiei din enunţ sunt $(0, 1, 1)$, $(0, 2, 3)$ şi $(1, 0, 2)$.

G300. *Fie* a, b, c *numere reale pozitive cu suma* 1. *Arătaţi că*

$$\frac{b + c - a}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{c + a - b}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{a + b - c}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} \geq \frac{3}{2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})}.$$

Tidor Pricope, elev, Botoşani

Soluţie. Deoarece $\sum \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sum(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = 0$, rezultă că $\sum \frac{a}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sum \frac{b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$. Atunci $\sum \frac{b + c - a}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sum \frac{1 - 2a}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sum \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - 2 \sum \frac{a}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sum \frac{1 - a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sum \frac{c}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$. Şirurile (a, b, c) şi $\left(\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}\right)$ sunt la fel ordonate şi le aplicăm inegalitatea lui Cebîşev: $\sum \frac{c}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \geq \frac{1}{3}(\sum a) \cdot \left(\sum \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}\right) = \frac{1}{3} \sum \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$. Folosind inegalitatea lui Bergström, obţinem cerinţa problemei.

G301. *Fie $n \geq 2$ număr întreg şi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale pozitive cu produsul 1. Arătaţi că*

$$\prod_{k=1}^{n}(a_k^n + 1) \geq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)^n.$$

Robert Antohi, elev, Iaşi

Soluţie. Fie $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$; conform inegalităţii lui Hölder, avem: $\prod\limits_{k=1}^{n}(a_k^n+1) = (a_1^n+1)\ldots(a_{i-1}^n+1)(1+a_i^n)(a_{i+1}^n+1)\ldots(a_n^n+1) \geq (a_1 \ldots a_{i-1} \cdot 1 \cdot a_{i+1} \ldots a_n + 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot a_i \cdot 1 \cdot 1 \ldots \cdot 1)^n = \left(\dfrac{1}{a_i} + a_i\right)^n$. Scriem toate inegalităţile de tipul $\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n}(a_k^n + 1)} \geq \dfrac{1}{a_i} + a_i$ cu $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ şi, prin sumarea lor, obţinem că $n\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n}(a_k^n + 1)} \geq \sum\limits_{k=1}^{n} a_k + \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k}$, inegalitate echivalentă cu cea din enunţ.

G302. *Dacă $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, arătaţi că* $\sum \dfrac{a}{b^2c^2(b+c)^3} \geq \dfrac{32}{(\sum a^2)^3}$.

Nicuşor Zlota, Focşani

Soluţie. Demonstrăm întâi inegalităţile:

$$\sum \frac{a}{b+c} \geq 2; \tag{1}$$

$$4\left(\sum abc\right)^2 \leq \left(\sum a^2\right)^3. \tag{2}$$

Într-adevăr, avem:

$$\sum \frac{a}{b+c} = \sum \frac{a^2}{a(b+c)} \geq \frac{(\sum a)^2}{\sum a(b+c)} \geq 2$$

(după calcule, ultima inegalitate revine la $(a-c)^2 + (b-d)^2 \geq 0$). Apoi:

$$4\left(\sum abc\right)^2 \leq 4\left(\sum a^2\right)\left(\sum b^2c^2\right) \leq \left(\sum a^2\right)\left(\sum a^2\right)^2 = \left(\sum a^2\right)^3$$

(inegalitatea $4\sum b^2c^2 \leq (\sum a^2)^2$ se reduce, după calcule, la $(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 \geq 0$).

În aceste condiţii,

$$\sum \frac{a}{b^2c^2(b+c)^3} = \sum \frac{(\frac{a}{b+c})^3}{(abc)^2} \geq \frac{(\sum \frac{a}{b+c})^3}{(\sum abc)^2} \geq \frac{32}{(\sum a^2)^3},$$

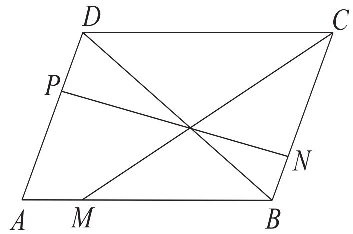
unde, la ultimul pas, am ţinut seama de (1) şi (2).

G303. *Pe laturile AB, BC, AD ale paralelogramului $ABCD$ considerăm punctele M, N respectiv P astfel încât $AB = xAM$, $BC = yBN$ şi $AD = zAP$, unde x, y, z sunt numere naturale. Determinaţi x, y şi z pentru care dreptele PN, CM şi BD sunt concurente.*

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Notăm $\{S\} = CM \cap BD$ şi $\{T\} = PN \cap BD$. Deoarece $MB = \dfrac{x-1}{x}AB$ şi

$DP = \dfrac{z-1}{z}AD$, folosind asemănări, obţinem că $\dfrac{SB}{SD} = \dfrac{x-1}{x}$ şi $\dfrac{TB}{TD} = \dfrac{z}{y(z-1)}$. Din concurenţa dreptelor PN, CM şi BD, punctele S şi T coincid; rezultă că



$$(*) \qquad xyz + y = xy + yz + zx.$$

Rămâne să rezolvăm în numere naturale mai mari ca 1 ecuaţia (*). Din motive de simetrie, putem presupune că $x \geq z$.

I. $y \geq z$. Nu putem avea $z > 3$; în caz contrar, $xyz + y > 3xy = xy + xy + xy \geq xy + yz + xz$. Dacă $z = 3$, ecuaţia (*) devine $(x-1)(2y-3) = 3$ şi are soluţia $(x, y, z) = (4, 2, 3)$. Dacă $z = 2$, (*) devine $(x-1)(y-2) = 2$, cu soluţia $(x, y, z) = (3, 3, 2)$.

II. $z \geq y$. Nu putem avea $y > 3$; în caz contrar, $xyz + y > 3xz = xz + xz + xz \geq xy + yz + zx$. Dacă $y = 3$, (*) devine $(2x-3)(2z-3) = 3$, cu soluţia $(x, y, z) = (3, 3, 2)$. Dacă $y = 2$, (*) devine $(x-2)(z-2) = 2$, cu soluţia $(x, y, z) = (4, 2, 3)$.

În concluzie, $(x, y, z) \in \{(4, 2, 3); (3, 2, 4); (3, 3, 2); (2, 3, 3)\}$.

G304. *Arătaţi că o piramidă $VABC$ este regulată dacă şi numai dacă sunt congruente atât muchiile VA, VB, VC cât şi medianele VA', VB', VC' ale feţelor VBC, VCA, respectiv VAB.*

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţia 1. Deoarece $VA \equiv VB \equiv VC$, feţele VBC, VCA, VAB sunt triunghiuri isoscele. Cum $VA' \equiv VB' \equiv VC'$, aceste feţe sunt congruente. Rezultă că $BC \equiv CA \equiv AB$ şi, deci, piramida $VABC$ este regulată.

Notă. Condiţia $VA' \equiv VB' \equiv VC'$ putea fi înlocuită cu o alta care asigură congruenţa feţelor (de exemplu, razele cercurilor circumscrise (sau înscrise) feţelor sunt egale).

Soluţia 2. Evident, dacă piramida $VABC$ este regulată, condiţiile din enunţul problemei sunt îndeplinite.

Invers, să considerăm că VA', VB', VC' sunt mediane în feţele respective. Observăm că $\triangle A'B'C'$ este triunghiul medial al $\triangle ABC$. De asemenea, în ipoteza $VA' \equiv VB' \equiv VC'$, constatăm că vârful V al piramidei se proiecteză în centrul cercului circumscris $\triangle A'B'C'$, adică în punctul O_9 - centrul cercului lui Euler al $\triangle ABC$.

Pe de altă parte, din faptul că $VA \equiv VB \equiv VC$, rezultă că V se proiectează în puctul O - centrul cercului circumscris $\triangle ABC$. Din coincidenţa punctelor O şi O_9 deducem că $\triangle ABC$ este echilateral. În concluzie, piramida $VABC$ este regulată.

G305. *Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $CA = CB$ şi $m(\widehat{C}) = 36°$. Punctele E şi F se află pe latura BC astfel încât $BF = CE = AB$, iar punctul D este situat pe latura AC astfel încât $CD = EF$. Demonstraţi că $CD = DF$.*

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

Soluţie. Folosind triunghiurile isoscele CAB şi BAF, obţinem: $m(\widehat{CAB}) = m(\widehat{CBA}) = 72°$, $m(\widehat{BAF}) = m(\widehat{BFA}) = 54°$. Fie AE_1 bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$, cu $E_1 \in BC$; atunci triunghiul E_1AC va fi isoscel, cu $E_1A = E_1C$. În plus, triunghiul

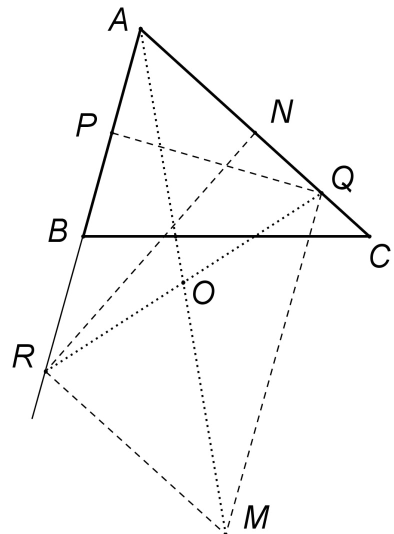
E_1AB va fi isoscel ($\widehat{ABE} \equiv \widehat{AEB}$) cu $E_1A = AB$. Deducem că $E_1C = AB$, prin urmare punctele E şi E_1 coincid. Rezultă că $m(\widehat{FAE}) = 54° - 36° = 18° = m(\widehat{CAF})$.

Considerăm punctul $D_1 \in AC$ astfel încât $D_1F \perp AF$; atunci $m(\widehat{D_1FE}) = 90° + 54° = 144° = 180° - m(\widehat{CAE})$, aşadar patrulaterul $AEFD_1$ va fi inscriptibil. Obţinem că $m(\widehat{D_1EF}) = m(\widehat{CAF}) = 18°$, de unde $m(\widehat{ED_1F}) = 180° - 18° - 144° = 18°$. În concluzie, triunghiul FED_1 va fi isoscel cu $FE = FD_1$. Pe de altă parte, $m(\widehat{D_1FC}) = 36° = m(\widehat{C})$, deci $CD_1 = D_1F$. Rezultă că $CD_1 = EF$, adică punctele D şi D_1 coincid şi, de aici, cerinţa problemei.

B. Nivel liceal

L296. *Fie ABC un triunghi care nu este dreptunghic şi N, P mijloacele laturilor AC, respectiv AB. Mediatoarea laturii AB intersectează dreapta AC în punctul Q, iar mediatoarea laturii AC intersectează dreapta AB în punctul R. Să se demonstreze că perpendiculara în Q pe PQ, perpendiculara în R pe NR şi simediana din A sunt concurente.*

Titu Zvonaru, Comăneşti şi Bogdan Ioniţă, Bucureşti

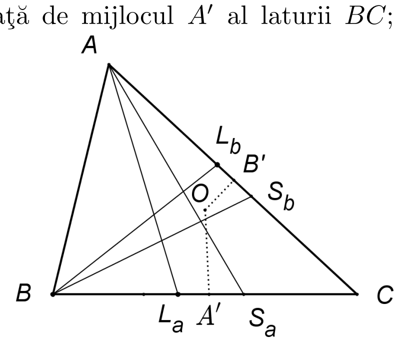


Soluţie (**Neculai Roman**, Mirceşti)**.** Notăm cu M punctul de intersecţie dintre perpendiculara în Q pe PQ şi perpendiculara în R pe NR; evident că $ARMQ$ este paralelogram. Fie $\{O\} = AM \cap RQ$. Din $m(\widehat{RPQ}) = m(\widehat{RNQ}) = 90°$ rezultă că patrulaterul $PNQR$ este inscriptibil, deci RQ este antiparalelă cu BC. Cum simediana din A este locul geometric al mijloacelor antiparalelelor la BC, înseamnă că dreapta AM, care conţine punctul O – mijlocul antiparalelei RQ, este dreapta suport a simedianei din A şi soluţia este încheiată.

L297. *În triunghiul ABC notăm cu L_a, L_b, L_c picioarele bisectoarelor şi cu S_a, S_b, S_c picioarele simedianelor ($L_a, S_a \in BC$ etc.). Ce condiţie trebuie să îndeplinească triunghiul ABC pentru ca triunghiurile $L_aL_bL_c$ şi $S_aS_bS_c$ să fie înscrie în acelaşi cerc?*

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Punctele L_a şi S_a sunt simetrice faţă de mijlocul A' al laturii BC; observaţii similare relativ la perechile (L_b, S_b) şi (L_c, S_c). Dacă $\triangle L_aL_bL_c$ şi $\triangle S_aS_bS_c$ au acelaşi cerc circumscris, segmentele L_aS_a, L_bS_b şi L_cS_c sunt coarde în acest cerc. Centrul său este punctul de intersecţie a mediatoarelor segmentelor numite mai sus, adică punctul de intersecţie a mediatoarelor $\triangle ABC$, deci este punctul O – centrul cercului circumscris $\triangle ABC$. Ca urmare, avem că $OL_a = OL_b = OL_c$, ca raze în cercul circumscris celor două triunghiuri.



Cu teorema lui Pitagora, $OL_a^2 = OA'^2 + A'L_a^2$. Cum $OA' = R\cos A$ şi $A'L_a = |BA' - BL_a| = \left|\frac{a}{2} - \frac{ac}{b+c}\right| = \frac{a|b-c|}{2(b+c)}$, obţinem că

$$OL_a^2 = R^2\cos^2 A + \frac{a^2(b-c)^2}{4(b+c)^2} = R^2\left(1 - \frac{a^2}{4R^2}\right) + \frac{a^2(b-c)^2}{4(b+c)^2} =$$
$$= R^2 + \frac{a^2}{4}\left[\frac{(b-c)^2}{(b+c)^2} - 1\right] = R^2 - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}.$$

Analog, avem şi

$$OL_b^2 = R^2 - \frac{ab^2c}{(c+a)^2}, \quad OL_c^2 = R^2 - \frac{abc^2}{(a+b)^2}.$$

Egalităţile $OL_a = OL_b = OL_c$ implică relaţiile:

$$\frac{a}{(b+c)^2} = \frac{b}{(c+a)^2} = \frac{c}{(a+b)^2}.$$

Evident, dacă $\triangle ABC$ este echilateral, acestea au loc. Verificăm că, în caz contrar, relaţiile precedente nu pot avea loc. Într-adevăr, dacă $a < b$, de exemplu, atunci $\frac{a}{(b+c)^2} < \frac{b}{(c+a)^2}$.

În concluzie, dacă triunghiurile $L_aL_bL_c$ şi $S_aS_bS_c$ sunt înscrise în acelaşi cerc, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Notă. Am primit sluţie corectă de la d-l **Titu Zvonaru**, Comăneşti.

L298. *Fie ABC un triunghi oarecare. Un cerc tangent interior cercului circumscris triunghiului ABC este tangent şi segmentelor AB, AC în punctele M, respectiv N. În mod analog definim $P \in (BC)$, $Q \in (BA)$ şi $L \in (CA)$, $K \in (CB)$. Arătaţi că* $\frac{AB}{MN} + \frac{BC}{PQ} + \frac{AC}{LK} \geq \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{p^2}{r^2}}$.

Neculai Roman, Mirceşti, Iaşi

Soluţie (**Titu Zvonaru** şi **Ioan Viorel Codreanu**). Este cunoscut faptul că centrul cercului înscris este mijlocul segmentului MN (se poate vedea, de exemplu, *RecMat. 1/2013*, pag. 15). Obţinem $MN = \frac{2r}{\cos\frac{A}{2}}$. Folosind identitatea $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{p}{4R}$ şi inegalitatea dintre media aritmetică şi media geometrică, rezultă

$$\frac{AB}{MN} + \frac{BC}{PQ} + \frac{AC}{LK} = \frac{c\cos\frac{A}{2}}{2r} + \frac{a\cos\frac{B}{2}}{2r} + \frac{b\cos\frac{C}{2}}{2r} \geq \frac{3}{2r} \cdot \sqrt[3]{\frac{abcp}{4R}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{4Rrp^2}{4Rr^3}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{p^2}{r^2}}.$$

L299. *Arătaţi că numărul 89^{89} nu poate fi suma dintre cubul şi puterea a patra a două numere naturale nenule.*

Ioan Viorel Codreanu, Satulung, Maramureş

Soluţie. Dacă x, y sunt numere naturale, atunci $x^3 \equiv 0, 1, 5, 8, 12 \pmod{13}$ şi $y^4 \equiv 0, 1, 3, 9 \pmod{13}$; rezultă că $x^3 + y^4 \not\equiv 7 \pmod{13}$. Vom arăta că $89^{89} \equiv 7 \pmod{13}$, de unde concluzia problemei, Cum $11^{12} \equiv 1 \pmod{13}$, conform teoremei lui Fermat, obţinem că $89^{89} \equiv 11^{89} \equiv 11^5 \equiv (-2)^5 \equiv 7 \pmod{13}$.

Notă. Am primit soluţie corectă de la **Titu Zvonaru**, Comăneşti, **Corneliu Mănescu-Avram**, Ploieşti şi **Nicuşor Zlota**, Focşani.

L300. *Se ştie că ecuaţia $x^2 - 3y^2 = 1$ admite o infinitate de soluţii (x_n, y_n), unde n este un număr natural. Să se demonstreze că o infinitate dintre aceste soluţii au proprietatea că numărul $x_n - 1$ este pătrat perfect.*

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Ecuaţia lui Pell din enunţ admite soluţia de bază $x_0 = 2$, $y_0 = 1$, iar soluţiile sunt date de relaţiile $x_{n+1} = 2x_n + 3y_n$, $y_{n+1} = x_n + 2y_n$.

Se observă uşor că, pentru orice număr natural k, $x_{2k} = 2 \pmod 3$, x_{2k} este par, iar y_{2k} este impar. Fie atunci $x_{2k} = 3u_{2k} + 2$. Scriind că $(3u_{2k} + 2, y_{2k})$ este soluţie a ecuaţiei din enunţ, obţinem

$$(1)\quad (3u_{2k}+2)^2 - 3y_{2k}^2 = 1 \Leftrightarrow 9u_{2k}^2 + 12u_{2k} + 4 - 3y_{2k}^2 = 1 \Leftrightarrow (3u_{2k}+1)(u_{2k}+1) = y_{2k}^2.$$

Fie d un divizor al numerelor $3u_{2k} + 1$ şi $u_{2k} + 1$; rezultă că d divide pe $3(u_{2k} + 1) - 3u_{2k} - 1 = 2$. Cum y_{2k} este impar, deducem că nu putem avea decât $d = 1$, adică numerele $3u_{2k}+1$ şi $u_{2k}+1$ sunt prime între ele. Rezultă că atât $3u_{2k}+1 = x_{2k}-1$ cât şi $u_{2k} + 1$ sunt pătrate perfecte. Am obţinut astfel şirul infinit (x_{2k}) cu proprietatea dorită.

Notă. Au rezolvat corect problema **Corneliu Mănescu-Avram**, Ploieşti şi **Nicuşor Zlota**, Focşani.

L301. *Fie $a_1, \ldots, a_k$ numere întregi pozitive şi $b_1, b_2, \ldots, b_k$ numere întregi. Să se arate că există o infinitate de numere naturale n astfel încât $(a_1 n + b_1) \cdots (a_k n + b_k)$ divide pe $n!$*

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Se pot alege numere naturale $c_1, \ldots, c_k$ prime între ele două câte două, $c_1 < \ldots < c_k$ şi $a_1/c_1 < \ldots < a_k/c_k < 1$ şi astfel încât, pentru fiecare i, c_i să fie prim cu a_i. Conform teoremei chineze a resturilor există o infinitate de numere naturale n soluţii ale congruenţelor

$$a_1 n + b_1 \equiv 0 \pmod{c_1}, \ldots, a_k n + b_k \equiv 0 \pmod{c_k}.$$

Datorită inegalităţilor pe care le verifică a_i şi c_i, avem

$$1 \le c_1 < \ldots < c_k < \frac{a_1 n + b_1}{c_1} < \ldots < \frac{a_k n + b_k}{c_k} < n$$

pentru n de acest tip şi care este, în plus, suficient de mare. Evident, pentru asemenea n (deci pentru o infinitate de n), $n!$ se divide cu produsul

$$c_1 \ldots c_k \frac{a_1 n + b_1}{c_1} \ldots \frac{a_k n + b_k}{c_k} = (a_1 n + b_1) \ldots (a_k n + b_k),$$

ceea ce încheie rezolvarea.

L302. *Dacă x, y, z sunt numere reale pozitive, arătaţi că*

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geq\sqrt{7(x^2+y^2+z^2)-4(xy+yz+zx)}.$$

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti şi Leonard Giugiuc, Drobeta-Tr. Severin

Soluţie (**Titu Zvonaru** şi **Nicuşor Zlota**). Deoarece membrul stâng este minorat de $x+y+z$, dar şi membrul drept este minorat de $x+y+z$, scriem inegalitatea sub forma

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}-x-y-z\geq\sqrt{7(x^2+y^2+z^2)-4(xy+yz+zx)}-(x+y+z)$$

$$\frac{(x-y)^2}{y}+\frac{(y-z)^2}{z}+\frac{(z-x)^2}{x}\geq\frac{7(x^2+y^2+z^2)-4(xy+yz+zx)-(x+y+z)^2}{\sqrt{7(x^2+y^2+z^2)-4(xy+yz+zx)}+x+y+z}$$

$$\frac{(x-y)^2}{y}+\frac{(y-z)^2}{z}+\frac{(z-x)^2}{x}\geq\frac{3(x-y)^2+3(y-z)^2+3(z-x)^2}{\sqrt{7(x^2+y^2+z^2)-4(xy+yz+zx)}+x+y+z}.$$

Este suficient să demonstrăm că

$$\frac{(x-y)^2}{y}\geq\frac{3(x-y)^2}{\sqrt{7(x^2+y^2+z^2)-4(xy+yz+zx)+x+y+z}}.$$

Dacă $x=y$ avem egalitate, în caz contrar, rămâne de demonstrat că

$$\sqrt{7(x^2+y^2+z^2)-4(xy+yz+zx)}+x+y+z\geq 3y.$$

Vom arăta că

$$\sqrt{7(x^2+y^2+z^2)-4(xy+yz+zx)}\geq 2y\Leftrightarrow 7x^2+3y^2+7z^2\geq 4xy+4yz+4zx,$$

inegalitate care rezultă cu inegalitatea mediilor:

$$\begin{aligned}7x^2+3y^2+7z^2&=\frac{8}{3}x^2+\frac{3}{2}y^2+\frac{3}{2}y^2+\frac{8}{3}z^2+\frac{13}{3}x^2+\frac{13}{3}z^2\geq\\&\geq 2\sqrt{\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{2}x^2y^2}+2\sqrt{\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{2}y^2z^2}+\frac{26}{3}xz>4xy+4yz+4xz.\end{aligned}$$

Notă (**Titu Zvonaru**, Comăneşti)**.** Ultima inegalitate obţinută este strictă. În cele ce urmează, ne propunem să găsim o valoare (cât mai mare) a numărului real pozitiv k pentru care, folosind aceeaşi metodă, să putem demonstra inegalitatea

$$(1)\qquad \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geq\sqrt{(7+k)(x^2+y^2+z^2)-(4+k)(xy+yz+zx)}.$$

Procedând ca mai sus, este suficient să demonstrăm că

$$\begin{aligned}&\sqrt{(7+k)(x^2+y^2+z^2)-(4+k)(xy+yz+zx)}\geq\frac{4+k}{2}y\\&\Leftrightarrow(7+k)x^2+\frac{12-4k-k^2}{4}y^2+(7+k)z^2\geq(4+k)(xy+yz+zx).\end{aligned}$$

Pentru ca $12 - 4k - k^2 > 0$, trebuie să avem $k < 2$. În această condiţie, putem scrie

$$
\begin{aligned}
&(7+k)x^2 + \frac{12-4k-k^2}{4}y^2 + (7+k)z^2 = \frac{2(4+k)^2}{12-4k-k^2}x^2 + \frac{12-4k-k^2}{8}y^2 \\
(2)\qquad &+ \frac{2(4+k)^2}{12-4k-k^2}z^2 + (7+k-\frac{2(4+k)^2}{12-4k-k^2})(x^2+z^2) \\
&\geq (4+k)(xy+yz) + \frac{(7+k)(12-4k-k^2)-2(4+k)^2}{12-4k-k^2}(x^2+z^2).
\end{aligned}
$$

Dacă

$$
(3)\qquad 2((7+k)(12-4k-k^2) - 2(4+k)^2) \geq (4+k)(12-4k-k^2),
$$

atunci

$$
\left(7+k-\frac{2(4+k)^2}{12-4k-k^2}\right)(x^2+z^2) \geq (4+k)xz.
$$

Folosind acum inegalitatea (2), rezultă că inegalitatea (1) este adevărată.

Inegalitatea (3) se scrie $k^3 + 18k^2 + 60k - 56 \leq 0$. Ecuaţia $k^3 + 18k^2 + 60k - 56 = 0$ are o singură rădăcină reală k_0, unde $0,7551 < k_0 < 0,7552$.

Rezultă că inegalitatea (1) este adevărată pentru orice k astfel încât $0 \leq k \leq k_0$. De exemplu, o valoare convenabilă pentru k este $k = 3/4$.

L303. *Să se demonstreze că are loc inegalitatea*

$$
\begin{aligned}
&24(a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) \geq \\
&\qquad \geq 7(a+b+c)(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2-6abc),
\end{aligned}
$$

pentru orice numere pozitive a, b, c.

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie (**Titu Zvonaru**, Comăneşti). În [1], se demonstrează, prin metoda normării, că cel mai mare număr k pentru care are loc inegalitatea

$$
\begin{aligned}
&(a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) \geq \\
(1)\qquad &\qquad \geq k(a+b+c)(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2-6abc),
\end{aligned}
$$

este $k = \sqrt{6} - 2$.

[1] Marian Tetiva - *Cea mai bună inegalitate de acesti tip...*, Recreaţii Matematice 2/2006.

Nota redacţiei. D-l **Marian Tetiva** a trimis spre publicare această problemă în 2005, anterior apariţiei articolului [1], în care îmbunătăţeşte rezultatul.

În acel moment, s-a decis ca problema să nu mai apară. Ea a rămas uitată, dar... manuscrisele nu ard!

Notă. Am primit soluţii corecte, bazate pe inegalitatea lui Schur, din partea domnilor **Nicuşor Zlota**, Focşani şi **Ioan Viorel Codreanu**, Satulung, Maramureş.

L304. *Fie $n \geq 1$ un număr natural şi fie $E_-(n)$ şi $E_+(n)$ numărul permutărilor impare, respectiv pare $\alpha \in S_n$ cu proprietatea că $\alpha(j) \neq j$ pentru orice $1 \leq j \leq n$ şi $\alpha(j) \neq j+1$ pentru orice $1 \leq j \leq n-1$. Să se arate că*

$$E_+(n) = E_-(n) + (-1)^{n-1}\left[\frac{n-1}{2}\right].$$

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Fie $A_n = (a_{ij})$ matricea pătratică de oridnul n pentru care $a_{ii} = 0$ oricare ar fi $1 \leq i \leq n$, $a_{i,i+1} = 0$ pentru orice $1 \leq i \leq n-1$ şi toate celelalte elemente sunt egale cu 1. Prin calcul direct se vede că $\det(A_n) = (-1)^{n-1}[(n-1)/2]$ iar, pe de altă parte,

$$\det(A_n) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)}.$$

Se observă uşor că în dezvoltarea determinantului toate produsele sunt egale cu 1, cu excepţia celor care corespund permutărilor care nu au proprietatea din enunţ. De aceea, de fapt,

$$\det(A_n) = \sum{}' sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)},$$

suma $\sum'$ făcându-se numai după permutările care au proprietatea din enunţ. Mai mult, e clar că această sumă conţine $E_+(n)$ termeni egali cu -1 (corespunzători permutărilor pare cu proprietatea din enunţ) şi conţine $E_-(n)$ termeni egali cu -1 (corespunzători permutărilor impare cu proprietatea din enunţ), astfel ca egalitatea de mai sus se rescrie

$$E_+(n) - E_-(n) = (-1)^{n-1}\left[\frac{n-1}{2}\right],$$

şi demonstraţia este încheiată.

Nota autorului. Dacă notăm cu $F_-(n)$ şi $F_+(n)$ numărul permutărilor cu proprietatea din enunţ care au, în descompunerea lor ca produs de cicluri disjuncte, un număr impar, respectiv un număr par de cicluri, putem arăta în acelaşi fel că

$$F_-(n) - F_+(n) = \left[\frac{n-1}{2}\right].$$

L305. *Să se studieze monotonia, mărginirea şi convergenţa şirului $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $u_0 \in \mathbb{R}_+$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{\sqrt{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$.*

Adrien Reisner, Paris

Soluţie. Logaritmând relaţia de recurenţă, obţinem:

$$\ln u_{n+1} = 2\ln u_n - \frac{\ln(n+1)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Împărţind cu 2^{n+1} şi notând $v_n = \dfrac{\ln u_n}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$, egalitatea precedentă se scrie în forma $v_{n+1} = v_n - \dfrac{\ln(n+1)}{2^{n+2}}$, $n \in \mathbb{N}$. Prin sumare, obţinem că

$$v_0 = \ln u_0, \quad v_n = v_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{2^{k+1}}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Şirul $(\alpha_n)_{n\geq 1}$, cu $\alpha_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln k}{2^{k+1}}$, este strict crescător şi mărginit (prin majorare!), deci există $\alpha = \lim\limits_n \alpha_n$. Ca urmare $(v_n)_n$ este strict descrescător şi $\lim\limits_n v_n = v_0 - \alpha$.

Dacă $u_0 > e^\alpha$, adică $v_0 = \ln u_0 > \alpha$, rezultă că $\lim\limits_n v_n = v_0 - \alpha > 0$ şi, ca urmare, $\lim\limits_n \ln u_n = \lim\limits_n 2^n v_n = +\infty$. Aşadar, $(u_n)_n$ este nemărginit şi $\lim\limits_n u_n = +\infty$.

Dacă $u_0 < e^\alpha$, rezultă că $\lim\limits_n \ln u_n = \lim\limits_n 2^n v_n = -\infty$, deci $(u_n)_n$ este convergent la zero.

Dacă $u_0 = e^\alpha$, adică $v_0 = \alpha$, avem:

$$\lim_n \ln u_n = \lim_n 2^n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\ln k}{2^{k+1}} \geq \lim_n 2^n \ln n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \lim_n 2^n \ln n \frac{1}{2^{n+1}} =$$
$$= \lim_n \frac{1}{2} \ln n = +\infty.$$

Deci, şirul $(u_n)_n$ diverge la $+\infty$.

Să studiem monotonia şirului $(u_n)_n$. Dacă $u_0 < e^\alpha$, din relaţia $\ln u_n = 2^n v_n$ sau $-\ln u_n = 2^n(-v_n)$ şi faptul că şirul $(-v_n)_n$ este strict crescător, rezultă că $(-\ln u_n)_n$ este strict crescător, deci şirul $(u_n)_n$ este strict descrescător.

Dacă $u_0 \geq e^\alpha$, avem: $\ln u_{n+1} - \ln u_n = 2^n[2v_{n+1} - v_n] = 2^n[2(v_0 - \alpha_{n+1}) - (v_0 - \alpha_n)] = 2^n[v_0 - 2\alpha_{n+1} + \alpha_n] \geq 2^n[\alpha - 2\alpha_{n+1} + \alpha_n] = 2^n[(\alpha - \alpha_{n+1}) + (\alpha_n - \alpha_{n+1})] = 2^n[\sum\limits_{k=n+2}^{\infty} \dfrac{\ln k}{2^{k+1}} - \dfrac{\ln(n+1)}{2^{n+2}}] > 2^n \ln(n+1) \left[\sum\limits_{k=n+2}^{\infty} \dfrac{1}{2^{k+1}} - \dfrac{1}{2^{n+2}}\right] = 0$, de unde $\ln u_{n+1} > \ln u_n$, în consecinţă $(u_n)_n$ este strict crescător.

Rezumând, dacă $u_0 < e^\alpha$ (unde $\alpha = \lim\limits_n \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln k}{2^{k+1}}$), atunci $(u_n)_n$ este descrescător la zero, iar dacă $u_0 \geq e^\alpha$, şirul $(u_n)_n$ este strict crescător la $+\infty$.

Notă. Am primit soluţie corectă din partea d-lui **Moubinool Omarjee**, Paris, Franţa.
