PROBLEME ŞI SOLUŢII

Soluţiile problemelor propuse în nr. 1/2016

Clasele primare

P339. *Încercuiţi numerele scrise în şirul* $9, 7, 3, 5, 1, 2, 4, 6, 8$ *care sunt după* 7*, înainte de* 2*, după* 3 *şi înainte de* 4*.*
(*Clasa pregătitoare*) **Nicolae Vieru, elev, Iaşi**

Soluţie. Trebuie să încercuim numerele 5 şi 1.

P340. *Completaţi şirul* ◯ △ △ □ ◯ △ △ □ ◯ △__ __ __ __ __ *cu încă cinci forme geometrice, respectând regula sa de formare.*
(*Clasa pregătitoare*) **Andreea Munteanu, elevă, Iaşi**

Soluţie. Secvenţa care se repetă este: cerc, triunghi, triunghi, pătrat. Trebuie desenate figurile: triunghi, pătrat, cerc, triunghi, triunghi.

P341. *Într-o pungă sunt trei mere roşii şi două mere galbene. Care este cel mai mic număr de mere pe care trebuie să le scoatem din pungă, fără a le vedea, pentru a fi siguri că am scos cel puţin două mere roşii?*
(*Clasa I*) **Adelin Bechet, elev, Iaşi**

Soluţie. Trebuie să scoatem patru mere, deoarece două pot fi galbene.

P342. *Maria confecţionează un colier din* 24 *de mărgele astfel încât primele patru au culorile verde, galben, roşu şi alb, iar următoarele repetă aceste culori în aceeaşi ordine. Ce culoare are a şaptesprezecea mărgică a colierului?*
(*Clasa I*) **Andrei Leahu, student, Iaşi**

Soluţie. $17 - 4 = 13$, $13 - 4 = 9$, $9 - 4 = 5$, $5 - 4 = 1$. A şaptesprezecea mărgică este verde.

P343. *Scrieţi numerele* $2, 3, 4, 6, 7, 8, 10$ *într-un şir astfel încât suma primelor patru numere să fie egală cu suma celor rămase.*
(*Clasa I*) **Ecaterina Brînzac, elevă, Iaşi**

Soluţie. Suma celor şapte numere este 40. Rezultă că suma primelor patru numere este 20. Un exemplu de scriere este: $2, 3, 7, 8, 4, 6, 10$.

P344. *Ştiind că* $7 \times 23 + a - b = 171$ *iar* b *nu-l depăşeşte pe* 11*, să se afle valoarea minimă şi valoarea maximă a lui* a*.*
(*Clasa a II-a*) **Ana Stoica, elevă, Iaşi**

Soluţie. $7 \times 23 + a - b = 171 \Rightarrow 161 + a - b = 171 \Rightarrow a - b = 10$. Dacă $b = 11$ atunci $a_{\max} = 21$, iar dacă $b = 0$ atunci $a_{\min} = 10$.

P345. *Într-o cutie sunt* 2 *bile negre mici şi* 17 *bile albe, din care* 3 *sunt mici şi celelalte mari. Câte bile trebuie să extragem din cutie, fără să ne uităm la ele, astfel încât să avem cel puţin o bilă albă mică?*
(*Clasa a II-a*) **Alexandra Hanu, elevă, Iaşi**

Soluţie. Cea mai nefavorabilă situaţie este să extragem 14 bile albe mari, 2 bile negre mici şi încă o bilă albă mică. Trebuie să extragem 17 bile.

P346. *Scrieţi toate numerele de două cifre astfel încât diferenţa dintre cifra unităţilor şi cifra zecilor să fie cu o unitate mai mică decât cifra zecilor.*
(*Clasa a II-a*) **Monica Maftei, elevă, Iaşi**

Soluţie. Avem cazurile: $a = 1, b = 1$; $a = 2, b = 3$; $a = 3, b = 5$; $a = 4, b = 7$; $a = 5, b = 9$. Numerele sunt: $11, 23, 35, 47, 59$.

P347. *Elevii clasei a III-a au plantat* 39 *meri, peri şi cireşi. Numărul merilor reprezintă o treime din numărul perilor, iar acesta depăşeşte cu* 3 *numărul cireşilor. Câţi pomi de fiecare fel au plantat elevii?*
(*Clasa a III-a*) **Maria Radu, Iaşi**

Soluţie. Dacă numărul merilor este m, numărul perilor $3m$, iar numărul cireşilor $3m - 3$, atunci $m + 3m + 3m - 3 = 39$, de unde $m = 6$, $p = 18$, $c = 15$.

P348. *Fiecare dintre cele cinci căsuţe din şirul* □□□□□ *se completează cu numerele* $0, 1$ *sau* 2. *În câte moduri putem completa căsuţele astfel încât suma tuturor numerelor să fie* 3*?*
(*Clasa a III-a*) **Andreea Ciobotariu, elevă, Iaşi**

Soluţie. Există $5 \times 4 = 20 = 20$ completări cu un 2, un 1 şi trei de 0 şi 10 completări cu trei de 1 şi doi de 0 (gândiţi-vă care pot fi poziţiile cifrei 1!). În total, avem 30 de completări care respectă cerinţele problemei.

P349. *În urmă cu doi ani mama era de şase ori mai în vârstă decât fiica, iar peste doi ani mama va fi de patru ori mai în vârstă decât fiica. Peste câţi ani fiica va avea vârsta mamei de acum doi ani?*
(*Clasa a III-a*) **Cristina Chelaru, elevă, Iaşi**

Soluţie. Din $m - 2 = 6(f - 2)$ şi $m + 2 = 4(f + 2)$ obţinem că $m = 38$, $f = 8$. Fiica va avea 36 de ani peste 28 ani.

P350. *Paginile unei căţi sunt numerotate cu numerele de la* 1 *la* 373. *De câte ori apar trei pagini consecutive astfel încât suma numerelor scrise pe ele se împarte exact la* 4*?*
(*Clasa a III-a*) **Maria Bîzdîgă, elevă, Iaşi**

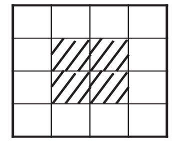
Soluţie. Numai paginile numerotate cu $4k - 1, 4k, 4k + 1$ îndeplinesc condiţia problemei. Prima tripletă este $(4 \cdot 1 - 1, 4 \cdot 1, 4 \cdot 1 + 1)$, iar ultima este $(4 \cdot 93 - 1, 4 \cdot 93, 4 \cdot 93 + 1)$. De la 1 la 93 avem 93 de numre. Trei pagini consecutive ce satisfac condiţia problemei apar de 93 ori.

P351. *Aflaţi câte perechi* (a, b) *de numere naturale verifică egalitatea* $3a + 5b = 777$.
(*Clasa a IV-a*) **Ştefan Gafton, elev, Iaşi**

Soluţie. $3a$ şi 777 se împart exact la 3, deci şi b se împarte exact la 3. Cea mai mică valoare a lui b este 3. Deoarece $5b = 777 - 3a$, trebuie să găsim cea mai mică valoare a lui a pentru care $777 - 3a$ se împarte exact la 5. Această valoare este 4. Valoarea maximă a lui b este $(777 - 12) : 5 = 153$. Numerele de la 3 la 153 care se împart exact la 3 sunt: $3 \cdot 1, 3 \cdot 2, \ldots, 3 \cdot 51$. Vom avea 51 de perechi.

P352. *Găsiţi numerele naturale* $\overline{ab}$ *pentru care avem* $\overline{ab} = a + 2 \times b + a \times b$.
(*Clasa a IV-a*) **Nicolae Ivăşchescu, Craiova**

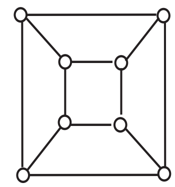
Soluţie. Avem: $10a + b = a + 2b + ab \Rightarrow 9a = (a + 1)b \Rightarrow a = 2, b = 6 \Rightarrow \overline{ab} = 26$.



P353. *În pătratul alăturat completăm cele* 12 *pătrăţele nehaşurate cu numerele* $1, 3, 5, \dots, 23$, *fără să le repetăm. Spunem că pătratul este elegant dacă suma numerelor de pe fiecare linie (sau de pe fiecare coloană) este aceeaşi. Arătaţi că există cel puţin o aranjare a numerelor astfel încât pătratul să fie elegant.*

(*Clasa a IV-a*) **Denisa Apetrei, elevă, Iaşi**

Soluţie. $1+3+5+\cdots+23 = 144$, $14 : 4 = 36$. Putem forma sumele: $1+7+9+19 = 36$, $13+23 = 36$, $15+21 = 36$, $3+5+11+17 = 36$. Pătratul poate fi elegant.

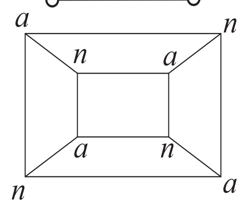


P354. *Opt localităţi sunt unite prin şosele ca în figura alăturată.*

a) *Coloraţi localităţile cu două culori astfel încât orice şosea să unească localităţi de culori diferite.*

b) *Indicaţi un traseu care trece prin fiecare localitate o singură dată.*

(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**



Soluţie. a) Notăm cele două culori cu a şi n. Un exemplu de colorare este cel din figura alăturată.

b) Putem alege un traseu de forma $an\,an, an\,an$ sau unul de forma $na\,na\,na\,na\,na$.

Clasa a V-a

V.200 *Împărţind un număr la* 8, *se obţine câtul* 2016. *Ce cât se poate obţine când împărţim acest număr la* 3*?*

Vlad Ciuperceanu, elev, Craiova

Soluţie. Restul împărţirii la 8 poate fi $0, 1, \dots, 7$, deci numărul poate lua valorile $16128, 16129, \dots, 16135$. Împărţind aceste numere la 3, obţinem câtul $5376, 5377$ sau 5378.

V.201. *Arătaţi că numărul* $P = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 53 \cdot 61$ *se poate scrie ca produsul a trei numere naturale consecutive.*

Ionel Tudor, Călugăreni

Soluţie. Cum $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$, $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$ şi $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$, rezultă că $P = 2013 \cdot 2014 \cdot 2015$.

V.202. *Determinaţi numerele naturale* $\overline{xy}$ *cu proprietatea că* $x \cdot y \cdot \overline{xy} = \overline{yyy}$.

Viorica Dogaru, Giurgiu

Soluţie. Evident că x şi y sunt nenule. Împărţind în ambii membri prin y, obţinem că $x \cdot \overline{xy} = 111$. Singura soluţie este $\overline{xy} = 37$.

V.203. *Determinaţi cifrele* a, b, c *şi* d *ştiind că* $\overline{dc}$ *este pătrat perfect şi* $2 \cdot \overline{aab} + 5 \cdot \overline{cab} + 2 \cdot \overline{cdc} + \overline{cc} = 2016$.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

Soluţie. Egalitatea din enunţ revine la $270a + 7b + 713c + 20d = 2016$, de unde $c < 3$. Cum nu există pătrate perfecte care să se termine în 2, rezultă că $\overline{dc} = 81$. Urmează că $270a + 7b = 1143$, deci $7b$ se termină în 3. Deducem că $b = 9$, apoi $a = 4$. În concluzie, $(a, b, c, d) = (4, 9, 1, 8)$.

V.204. *Pe o masă se află* 1000 *de jetoane. Două persoane iau de pe masă, alternativ, de la* 1 *la* 4 *jetoane; câştigă persoana care ia de pe masă ultimul jeton. Care dintre jucători are strategie de a câştiga?*

Ioan Viorel Codreanu, Satulung, Maramureş

Soluţie. Dacă primul jucător ia de pe masă k jetoane, $1 \leq k \leq 4$, al doilea va lua $5 - k$ jetoane. În acest fel, al doilea jucător va lăsa în urma lui, de fiecare dată, un număr de jetoane care se divide cu 5 şi, astfel, se asigură de câştigarea jocului.

V.205. *Determinaţi două mulţimi A şi B cu proprietăţile:*
(i) $A \cup B = \{1, 2, \ldots, 2016\}$;
(ii) *toate elementele din B se pot exprima ca sumă de elemente distincte din A;*
(iii) *niciun element din A nu se poate scrie ca sumă de elemente distincte din A.*

Silviu Boga, Iaşi

Soluţie. Mulţimile $A = \{2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{10}\}$ şi $B = \{1, 2, \ldots, 2016\} \backslash A$ au proprietăţile (i)-(iii). Mai mult, folosind unicitatea scrierii unui număr natural în baza 2, se poate arăta că mulţimile A şi B de mai sus sunt unicele mulţimi cu proprietăţile (i)-(iii).

V.206. *Spunem că numărul $\overline{abcd}$ este bun dacă are cifre distincte şi, prin eliminarea unei cifre, se obţine un număr care se poate scrie ca suma a trei cuburi perfecte consecutive.*
a) *Arătaţi că numărul* 2016 *este bun.*
b) *Câte numere bune există?*

Cătălin Cristea, Craiova

Soluţie. a) Observăm că $216 = 3^3 + 4^3 + 5^3$ şi că 2016 este număr de patru cifre distincte.

b) Numerele de trei cifre care se pot scrie ca sumă de trei cuburi perfecte consecutive sunt $216 = 3^3 + 4^3 + 5^3$, $405 = 4^3 + 5^3 + 6^3$ şi $684 = 5^3 + 6^3 + 7^3$. Numerele bune sunt cele de forma: $\overline{a216}$, $a \in \{3, 4, 5, 7, 8, 9\}$; $\overline{2a16}$, $\overline{21a6}$, $\overline{216a}$, $a \in \{0, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$; $\overline{b405}$, $\overline{4b05}$, $\overline{40b5}$, $\overline{405b}$, $b \in \{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9\}$; $\overline{c684}$, $c \in \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$; $\overline{6c84}$, $\overline{68c4}$, $\overline{684c}$, $c \in \{0, 1, 2, 3, 5, 7, 9\}$. În total, există 82 de numere bune.

Clasa a VI-a

VI.200. *După trei ieftiniri, fiecare cu* 10%, *un obiect costă* 900 *lei. Arătaţi că preţul iniţial al obiectului era mai mare de* 1200 *lei.*

Constantin Dragomir, Piteşti

Soluţie. Dacă preţul iniţial era x lei, preţul după trei ieftiniri succesive, fiecare cu 10%, este $x\left(1 - \dfrac{10}{100}\right)^3 = 0,729 \cdot x$ lei. Rezultă că $x = 900000 : 729 > 1200$ lei.

VI.201. *Demonstraţi că* $3^{2016} + 4^{2016} + 5^{2016} < 6^{2016}$.

Carmen Daniela Tamaş, Bârlad

Soluţie. Trebuie să demonstrăm că suma $S = \left(\dfrac{3}{6}\right)^{2016} + \left(\dfrac{4}{6}\right)^{2016} + \left(\dfrac{5}{6}\right)^{2016}$ este subunitară. Observăm că $S < \left(\dfrac{3}{6}\right)^3 + \left(\dfrac{4}{6}\right)^3 + \left(\dfrac{5}{6}\right)^3 = \dfrac{27 + 64 + 125}{216} = 1$, de unde cerinţa problemei.

VI.202. *Fie $x, y, z, t \in \mathbb{Q}$ astfel încât $(x-2)y+2 = (y-2)\cdot z-2 = (z+2)t-2 = (t-2)x+2 = 0$. Calculaţi produsul $xyzt$.*

Bogdan Chiriac, Bacău

Soluţie. Avem succesiv: $y = \dfrac{-2}{x-2}$; $z = \dfrac{2}{y-2} = \dfrac{x-2}{1-x}$; $t = \dfrac{2}{z+2} = \dfrac{2(x-1)}{x}$. În acest fel, $(t-2)x+2 = -\dfrac{2}{x}\cdot x+2 = 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Q}\setminus\{0,1,2\}$ (am ţinut seama de numitorii care au apărut pe parcurs). Obţinem $xyzt = x\cdot\dfrac{-2}{x-2}\cdot\dfrac{x-2}{1-x}\cdot\dfrac{2(x-1)}{x} = 4$.

VI.203. *a) Demonstraţi că există o infinitate de triplete de numere întregi (x,y,z) pentru care $\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{y}{y+z}+\dfrac{z}{z+x}=0$.*

b) Dacă (x,y,z) are proprietatea de la a), arătaţi că $\dfrac{y}{x+y}+\dfrac{z}{y+z}+\dfrac{x}{z+x}=3$.

Constantin Apostol

Soluţie. Căutăm soluţii cu $z=0$; se impune ca $\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{y}{y}=0$, deci $x+y=-x$. Rezultă că orice triplet de forma $(a,-2a,0)$, cu $a \in \mathbb{Z}$, are proprietatea dorită.

b) Dacă $A = \dfrac{x}{x+y}+\dfrac{y}{y+z}+\dfrac{z}{z+x}$ şi $B = \dfrac{y}{x+y}+\dfrac{z}{y+z}+\dfrac{x}{z+x}$, atunci $A+B=3$ şi concluzia se impune.

VI.204. *Arătaţi că există o infinitate de perechi de mulţimi finite (A,B) cu $A,B \subset \mathbb{N}$, $|B| \geq 2$ şi astfel încât $2\cdot m(A\cup B) = m(A)-m(B)$ (am notat cu $m(X)$ media aritmetică a elementelor mulţimii X).*

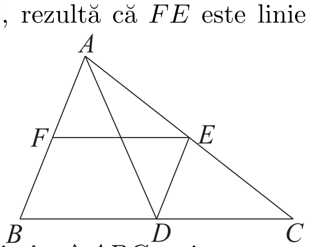
Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. Căutam mulţimi disjuncte de forma $A=\{a\}$, $B=\{b_1,b_2\}$; proprietatea din ipoteză se rescrie $2\cdot\dfrac{a+b_1+b_2}{3} = a-\dfrac{b_1+b_2}{2} \Leftrightarrow 7(b_1+b_2)=2a$. Considerând $a=7k$, $b_1=1$, $b_2=2k-1$, unde $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$, obţinem o infinitate de perechi de mulţimi (A,B) având proprietăţile dorite.

VI.205. *Fie D şi F mijloacele laturilor BC respectiv AB ale triunghiului ABC, iar $E \in AC$ este ales astfel încât DE să fie bisectoarea unghiului ADC. Arătaţi că $FE \| BC$ dacă şi numai dacă unghiul $\widehat{A}$ este drept.*

Bogdan-Petre Posa, Bucureşti

Soluţie. Dacă $FE\|BC$, cum F este mijlocul lui AB, rezultă că FE este linie mijlocie în $\triangle ABC$, aşadar E este mijlocul lui AC. În $\triangle ADC$, DE va fi mediană şi bisectoare, prin urmare $AD=DC$, deci $AD=\dfrac{1}{2}BC$ şi, de aici, $m(\widehat{A})=90°$.



Reciproc, dacă $m(\widehat{A})=90°$, atunci $AD=\dfrac{1}{2}BC=DC$. În $\triangle ADC$ isoscel, bisectoarea DE va fi şi mediană, deci E este mijlocul lui AC. Astfel, EF este linie mijlocie în $\triangle ABC$, prin urmare $EF\|BC$.

VI.206. *Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $n\geq 3$, puncte distincte pe dreapta d astfel încât $A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{n-1}A_n = 1$. Demonstraţi că nu există puncte M exterioare* *dreptei d pentru care distanţele $MA_1, MA_2, \ldots, MA_n$ să se exprime prin numere naturale.*

Lucian Tuţescu, Craiova

Soluţie. Presupunem, prin absurd, că $MA_1 = a \in \mathbb{N}^*$, $MA_2 = m \in \mathbb{N}^*$ şi $MA_3 = b \in \mathbb{N}^*$. Cum $a + 1 > m$ şi $m + 1 > a$, rezultă că $a = m$ şi, analog, $b = m$. Dacă P este piciorul perpendicularei din M pe d, triunghiurile MPA_1, MPA_2 şi MPA_3 vor fi congruente (I.C.), deci punctele A_1, A_2 şi A_3 sunt egal depărtate de P, ceea ce nu este posibil.

Clasa a VII-a

VII.200. *Determinaţi numerele întregi n pentru care $\sqrt{n^2 + 10n + 16}$ este număr raţional.*

Mircea Mario Stoica, Arad

Soluţie. Dacă $\sqrt{n^2 + 10n + 16} \in \mathbb{Q}$, atunci $n^2 + 10n + 16 = k^2$, unde $k \in \mathbb{N}$. Obţinem că $(n + 5)^2 - k^2 = 9$, deci $(n + k + 5)(n - k + 5) = 9$. Studiind cazurile posibile, obţinem $n \in \{-10, -8, -2, 0\}$.

VII.201. *Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, arătaţi că numărul $A = \overline{\underbrace{44\ldots4}_{n\,de\,4}3\underbrace{55\ldots5}_{n\,de\,5}6}$ este pătrat perfect.*

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

Soluţie. Dacă $n = \underbrace{11\ldots1}_{n\text{ de }9} = \dfrac{10^n - 1}{9}$, atunci $A = 4n \cdot 10^{n+2} + 3 \cdot 10^{n+1} + 5n \cdot 10 + 6 = \dfrac{4}{9}(10^{2n+2} - 10^{n+2}) + 3 \cdot 10^{n+1} + \dfrac{50}{9}(10^n - 1) + 6 = \dfrac{1}{9}(4 \cdot 10^{2n+2} - 4 \cdot 10^{n+2} + 27 \cdot 10^{n+1} + 5 \cdot 10^{n+1} - 50 + 54) = \dfrac{4}{9}(10^{2n+2} - 2 \cdot 10^{n+1} + 1) = \left[\dfrac{2}{3}(10^{n+1} - 1)\right]^2 = \underbrace{\overline{66\ldots6}}_{n+1 \text{ de } 6}{}^2$, deci A este pătrat perfect.

VII.202. *Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a^2 + ab + bc + ca < 0$. Arătaţi că $a^2 < b^2 + c^2$.*

Constantina Prunaru şi Dan Lucian Grigore, Craiova

Soluţia 1. Presupunem, fără a restrânge generalitatea, că $b \leq c$. Relaţia din enunţ se scrie sub forma $(a + b)(a + c) < 0$ şi, cum $a + b \leq a + c$, rezultă că $a + b < 0$ şi $a + c > 0$. Dacă $a < 0$, atunci $c > -a > 0$, de unde $c^2 > a^2$, prin urmare $a^2 < b^2 + c^2$. Dacă $a > 0$, atunci $b < -a < 0$, de unde $b^2 > a^2$, prin urmare $a^2 < b^2 + c^2$.

Soluţia 2. Înmulţind cu 2 relaţia din enunţ, obţinem că $a^2 - b^2 - c^2 + (a + b + c)^2 < 0$, deci $a^2 - b^2 - c^2 < -(a + b + c)^2 \leq 0$, de aici, concluzia.

VII.203. *Demonstraţi că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, numărul $A = 3x^4 - x^3 + 2x^2 - 4x + 3$ este strict pozitiv.*

Ionel Tudor, Călugăreni

Soluţie. Avem: $3A = 9x^4 - 3x^3 + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{23x^2}{4} - 12x + \dfrac{144}{23} + \dfrac{63}{23} = \left(3x^2 - \dfrac{x}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{x\sqrt{23}}{2} - \dfrac{12}{\sqrt{23}}\right)^2 + \dfrac{63}{23} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

VII.204. *Determinaţi numerele întregi* $x_1, x_2, \ldots, x_{2016}$ *pentru care* $x_1^{2016}+7x_2^{2016}+\ldots+7^{2015}x_{2016}^{2016}=2016x_1x_2\ldots x_{2016}$.

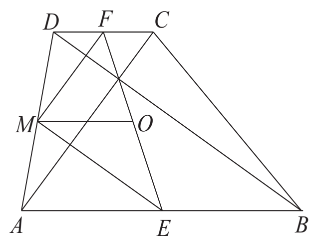
Dumitru Săvulescu şi Marian Voinea, Bucureşti

Soluţie. Cum $2016\vdots 7$, obţinem că $x_1\vdots 7$, deci $x_1=7y_1$, unde $y_1\in\mathbb{Z}$. Înlocuind în relaţia din enunţ şi împărţind prin 7, rezultă că $x_2^{2016}+7\cdot x_3^{2016}+\ldots+7^{2014}x_{2016}^{2016}+7^{2015}y_1^{2016}=2016y_1x_2x_3\ldots x_{2016}$. Repetând procedeul, se ajunge la concluzia că fiecare dintre numerele $x_1, x_2, \ldots, x_{2016}$ se divide cu 7 la orice putere. În concluzie, singura soluţie a ecuaţiei din enunţ este $x_1=x_2=\ldots=x_{2016}=0$.

VII.205. *Fie* E *şi* F *mijloacele bazelor* AB, *respectiv* CD, *ale trapezului* $ABCD$. *Demonstraţi că bisectoarele unghiurilor* $\widehat{AEF}$ *şi* $\widehat{DFE}$ *se întâlnesc într-un punct situat pe dreapta* AD *dacă şi numai dacă trapezul este ortogonal.*

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

Soluţie. Notăm cu M punctul de intersecţie a bisectoarelor unghiurilor $\widehat{AEF}$ şi $\widehat{DFE}$ şi cu M' şi O mijloacele segmentelor AD, respectiv EF. Cum $m(\widehat{EMF})=180^\circ-m(\widehat{MEF})-m(\widehat{MFE})=180^\circ-\dfrac{1}{2}[m(\widehat{AEF})+m(\widehat{DFE})]=90^\circ$, triunghiul EMF este dreptunghic şi MO este mediana corespunzătoare ipotenuzei. Rezultă că $OM=OF$, deci $\widehat{OMF}\equiv\widehat{OFM}\equiv\widehat{MFD}$, prin urmare $OM\|DF$ şi atunci $M\in AD$ dacă şi numai dacă $M=M'$.

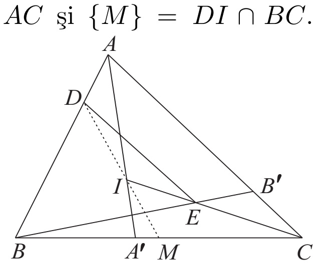


Segmentele $M'E$ şi $M'F$ sunt linii mijlocii ale triunghiurilor ABD, respectiv ACD, aşadar $M'E\|BD$ şi $M'F\|AC$. Avem: $AC\perp BD\Leftrightarrow M'E\perp M'F\Leftrightarrow M'O$ este mediana ipotenuzei în triunghiul dreptunghic $M'EF\Leftrightarrow M'O=OF=OE\Leftrightarrow\widehat{FM'O}\equiv\widehat{M'FO}\overset{(*)}{\Leftrightarrow}\widehat{DFM'}\equiv\widehat{M'FO}\Leftrightarrow FM'$ este bisectoarea unghiului $\widehat{DFE}$ (şi, implicit, EM' este bisectoarea unghiului $\widehat{AEF}$) $\Leftrightarrow M'=M$. (Pentru justificarea echivalenţei $(*)$ ţinem seama de faptul că $M'O\|FD$.) Cu aceasta soluţia problemei este completă.

VII.206. *Fie* I *centrul cercului înscris în* $\triangle ABC$ *cu* $AB<AC$. *Perpendiculara din* B *pe* AI *intersectează* CI *în* E. *Paralela prin* E *la* AC *intersectează* AB *în* D. *Demonstraţi că dreapta* DI *trece prin mijlocul laturii* BC.

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Notăm $\{A'\}=AI\cap BC$, $\{B'\}=BE\cap AC$ şi $\{M\}=DI\cap BC$. În $\triangle ABB'$, bisectoarea este şi înălţime, prin urmare $AB'=AB=c$; atunci $CB'=b-c$. Cu teorema bisectoarei, $\dfrac{BE}{EB'}=\dfrac{a}{b-c}\Rightarrow\dfrac{BD}{DA}=\dfrac{a}{b-c}$. Cum $BA'=\dfrac{ac}{b+c}$, aplicând teorema lui Menelaus în $\triangle ABA'$ cu transversala $D-I-M$, obţinem că $\dfrac{DA}{DB}\cdot\dfrac{MB}{MA'}\cdot\dfrac{IA'}{IA}=1$, de unde $\dfrac{MB}{MB-\dfrac{ac}{b+c}}=\dfrac{a}{b-c}\cdot\dfrac{b+c}{a}\Rightarrow MB(b-c)=MB(b+c)-ac\Rightarrow MB=\dfrac{a}{2}$ şi, cu aceasta, problema este rezolvată.



Clasa a VIII-a

VIII.200. *Dacă r şi R sunt razele sferelor înscrisă, respectiv circumscrisă aceluiaşi tetraedru, demonstraţi că* $\dfrac{R}{r}+\dfrac{r}{R}\geq\dfrac{10}{3}$.

Marius Olteanu, Rm. Vâlcea

Soluţie. În orice tetraedru are loc inegalitatea Euler-Durrande $R\geq 3r$. Inegalitatea de demonstrat este echivalentă cu $3(R^2+r^2)\geq 10Rr\Leftrightarrow(3R-r)(R-3r)\geq 0$ şi este, evident, adevărată.

VIII.201. *Prove that the number $2(n^4-n^2+1)$ is the sum of two squares for all $n\in\mathbb{N}$.*

Alessandro Ventullo, Milan, Italy

Soluţie. Avem: $2(n^4-n^2+1)=(n^4+2n^3-n^2-2n+1)+(n^4-2n^3-n^2+2n+1)=(n^2+n-1)^2+(n^2-n-1)^2$.

VIII.202. *Spunem că o mulţime nevidă E de numere reale este echilibrată dacă există un număr real α cu proprietatea că, pentru orice $x\in E$, rezultă că $\alpha-x\in E$.*

a) *Demonstraţi că, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$, există mulţimi echilibrate de cardinal n.*

b) *Daţi un exemplu de mulţime echilibrată infinită.*

Ovidiu Pop, Satu-Mare

Soluţie. a) Mulţimea $E_n=\{1,2,\ldots,n\}$, $n\in\mathbb{N}^*$, are cardinalul n şi este echilibrată: luând $\alpha=n+1$ şi $x\in E_n$, avem că $\alpha-x=n+1-x\in E_n$.

b) Mulţimea $E=[1,2]$ ete infinită şi echilibrată: pentru $\alpha=3$ şi $x\in[1,2]$, avem că $3-x\in[1,2]$.

VIII.203. *Arătaţi că numărul $x_n=\sqrt{1^3}+\sqrt{1^3+2^3}+\ldots+\sqrt{1^3+2^3+\ldots+n^3}$, $n\in\mathbb{N}^*$, este natural, iar $24(n+1)x_n+1$ este pătrat perfect.*

Ovidiu Pop, Satu-Mare

Soluţie. Cum $1^3+2^3+\ldots+k^3=\dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$, rezultă că $x_n=\dfrac{1}{2}(1^2+2^2+\ldots+n^2)+\dfrac{1}{2}(1+2+\ldots+n)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$ şi este evident că produsul a trei numere naturale consecutive se divide cu 6. Apoi, $24(n+1)x_n+1=4n(n+1)^2(n+2)+1=4(n^2+2n)^2+4(n^2+2n)+1=(2n^2+4n+1)^2$.

VIII.204. *Determinaţi numerele $a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$ astfel încât $abc=8$ şi*

$$\frac{8+ab}{1+c}+\frac{8+ac}{1+b}+\frac{8+cb}{1+a}=12.$$

Mihaela Berindeanu, Bucureşti

Soluţie. Observăm că $\dfrac{8+ab}{1+c}=\dfrac{abc+ab}{1+c}=ab$ şi analoagele, deci $ab+ac+bc=12$. Însă $12=3\sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot ca}\leq ab+bc+ca=12$, prin urmare se atinge egalitatea în inegalitatea mediilor. Deducem că $ab=bc=ca$, de unde $a=b=c=2$.

VIII.205. *Arătaţi că $a_1^2+a_2\sqrt{a_1a_2}\geq\dfrac{1}{2}(a_1+a_2)(a_1+\sqrt{a_1a_2})$, $\forall a_1,a_2\in\mathbb{R}_+^*$.*

Alina Tigae şi Carmen Terheci, Craiova

Soluţie. Cu notaţiile $a_1 = x_1$, $\sqrt{a_1a_2} = x_2$, inegalitatea de demonstrat devine:

$$\begin{aligned}x_1^2 + \frac{x_2^3}{x_1} \geq \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{x_2^2}{x_1}\right)(x_1 + x_2) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2(x_1^3 + x_2^3) - (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)^2 \geq 0,\end{aligned}$$

adevărat. Egalitatea se atinge când $x_1 = x_2$, deci pentru $a_1 = a_2$.

VIII.206. *Dacă x, y, z sunt numere reale pozitive, arătaţi că*

$$\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{y^2}{(1+x^2)(1+y^2)} + \frac{z^2}{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)} + \frac{1}{8xyz} \geq 1.$$

Daniel Sitaru şi Leonard Giugiuc, Drobeta-Tr. Severin

Soluţie. Din inegalitatea mediilor, $(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2) \geq 8xyz$; atunci $A = \frac{z^2}{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)} + \frac{1}{8xyz} \geq \frac{z^2+1}{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)} = \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}$. Apoi, $\frac{y^2}{(1+x^2)(1+y^2)} + A \geq \frac{y^2+1}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{1}{1+x^2}$. În sfârşit, suma din stânga va fi cel puţin egală cu $\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} = 1$, de unde cerinţa problemei. Egalitatea se atinge dacă şi numai dacă $x = y = z$.

Clasa a IX-a

IX.166. *Determinaţi perechile $(x, y) \in \mathbb{R}$ pentru care expresia $E(x, y) = (1 - \sin^2 x - \sin^2 y)(1 - \cos^2 x - \cos^2 y)$ are valoare maximă.*

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Evident că $E(x, y) = -(1 - \sin^2 x - \sin^2 y)^2 \leq 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Se constată că $1 - \sin^2 x - \sin^2 y = \cos(x + y)\cos(x - y)$, aşadar valoarea maximă 0 a expresiei $E(x, y)$ se atinge când $\cos(x + y) = 0$ sau când $\cos(x - y) = 0$. Perechile căutate sunt elementele mulţimii $\{(x, y)|x + y = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(x, y)|x - y = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

IX.167. *Fie p, d şi e semiperimetrul, suma diagonalelor şi lungimea segmentului care uneşte mijloacele diagonalelor patrulaterului inscriptibil $ABCD$. Arătaţi că $ABCD$ este patrulater circumscriptibil dacă şi numai dacă $2p^2 = d^2 + 4e^2$.*

Cătălin Calistru, Iaşi

Soluţie. Dacă d_1 şi d_2 sunt lungimile diagonalelor şi x, y, z, t sunt lungimile laturilor, atunci $4e^2 + d_1^2 + d_2^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ (*Euler*) şi $xz + yt = d_1d_2$ (*Ptolemeu*), de unde $4e^2 = (x + z)^2 + (y + t)^2 - (d_1 + d_2)^2$. Cum $ABCD$ este circumscriptibil dacă şi numai dacă $x + z = y + t = p$ (*Pithot*), concluzia se impune.

IX.168. *Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0, \infty)$ astfel încât*

$$\frac{a_1}{S - a_1 + 1} + \frac{a_2}{S - a_2 + 1} + \ldots + \frac{a_n}{S - a_n + 1} \leq 1,$$

unde $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. *Arătaţi că* $\dfrac{1}{S - a_1 + 1} + \dfrac{1}{S - a_2 + 1} + \ldots + \dfrac{1}{S - a_n + 1} \geq 1$.

Denisa Iulia Drăghia, elevă, Craiova

Soluţia 1. Avem: $1 = \sum \dfrac{a_1}{S - a_1 + 1} = \sum \dfrac{a_1^2}{Sa_1 - a_1^2 + a_1} \geq \dfrac{(\sum a_1)^2}{S^2 - \sum a_1^2 + S}$, prin urmare $S^2 - \sum a_1^2 + S \geq S^2$. Obţinem că $S \geq \sum a_1^2 = \sum \dfrac{a_1^2}{1} \geq \dfrac{(\sum a_1)^2}{n} = \dfrac{S^2}{n}$, de unde $n \geq S$. Rezultă că $\sum \dfrac{1}{S - a_1 + 1} \geq \dfrac{(\sum 1)^2}{nS - S + n} = \dfrac{n^2}{S(n-1) + n} \geq \dfrac{n^2}{n(n-1) + n} = 1$. (Pe parcurs, am aplicat în mod repetat inegalitatea lui *Bergström*.)

Soluţia 2 (**Pavel Beţiu**, elev, Craiova). Dăm lui x valoarea $f(x)$ şi obţinem:

$$f^{[k+1]}(x) + f^{[x]}(x) + \ldots + f^{[3]}(x) = kf(x)$$

şi deducem că $f^{[k+1]}(x) = (k+1)f(x) - kx$. Dând lui k valorile $0, 1, \ldots, k-1$ şi sumând relaţiile scrise, obţinem relaţia $kx = (1 + 2 + \ldots + k)f(x) - (1 + 2 + \ldots + (k-1))x$, de unde deducem că $f(x) = x$, $x \in \mathbb{N}$.

IX.169. *Dacă* x, y, z *sunt numere reale pozitive cu* $xy + yz + zx = 1$, *arătaţi că* $\sqrt{\dfrac{1 + yz}{1 + x^2}} + \sqrt{\dfrac{1 + zx}{1 + y^2}} + \sqrt{\dfrac{1 + xy}{1 + z^2}} \leq 3$.

Tidor Pricope, elev, Botoşani

Soluţie. Observăm că $\sum \dfrac{1 + yz}{1 + x^2} = \sum \dfrac{xy + yz + zx + yz}{xy + yz + zx + x^2} = \sum \dfrac{y(x+z) + z(x+y)}{(x+z)(x+y)}$ $= \sum \left(\dfrac{y}{x+y} + \dfrac{z}{x+z} \right) = 3$. Ar fi destul să mai arătăm că $\sum \sqrt{a} \leq 3$ atunci când $\sum a = 3$; pentru aceasta, folosim *C-B-S*: $(\sum \sqrt{a} \cdot 1)^2 \leq (\sum (\sqrt{a})^2) \cdot (\sum 1^2) = 9$ şi, cu aceasta, soluţia este completă.

IX.170. *Determinaţi numerele întregi a şi b pentru care* $a^5 = b^5 + 3b^4 + 8b^2 + 5b + 1$.

Ilinca Sebastian, Pîrşcoveni, Olt

Soluţie. Cum $3b^4 \geq 0$ şi $8b^2 + 5b + 1 = \left(2\sqrt{2}b + \dfrac{5}{4\sqrt{2}} \right)^2 + \dfrac{7}{32} > 0$, rezultă că $b^5 + 3b^4 + 8b^2 + 5b + 1 > b^5$; atunci $a^5 > b^5 \Rightarrow a > b \Rightarrow a \geq b + 1 \Rightarrow a^5 \geq (b+1)^5$. Deducem că $b^5 + 3b^4 + 8b^2 + 5b + 1 \geq b^5 + 5b^4 + 10b^3 + 10b^2 + 5b + 1$, de unde $2b^2(b^2 + 5b + 1) \leq 0$, aşadar $b = 0$ sau $b^2 + 5b + 1 = \left(b + \dfrac{5}{2} \right)^2 - \dfrac{21}{4} \leq 0$. Obţinem că $b \in \{-4, -3, -2, -1, 0\}$ şi, înlocuind în relaţia din enunţ, găsim unica soluţie $(a, b) = (1, 0)$.

Clasa a X-a

X.166. *Pe laturile* AB *şi* AC *ale triunghiului* ABC *se construiesc, în exterior, triunghiurile* ABE *şi* ACF *astfel încât* $AB = AF$, $AC = AE$, $m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{EAF}) = 180^\circ$ *şi* $Int\,\widehat{BAC} \cap Int\,\widehat{EAF} = \emptyset$. *Arătati că* $BF \perp CE$.

Florin Stănescu, Găeşti

Soluţie. Pentru a arăta că patrulaterul $BCFE$ este ortodiagonal, ar fi sufucient să demonstrăm că $BC^2+EF^2=BE^2+CF^2$. Dacă $\alpha=m(\widehat{BAC})$, atunci $BC^2+EF^2=(AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\alpha)+(AE^2+AF^2-2AE\cdot AF\cdot\cos(\pi-\alpha))=2(AB^2+AC^2)$ şi, analog, $BE^2+CF^2=2(AB^2+AC^2)$ (unghiurile $\widehat{BAE}$ şi $\widehat{CAF}$ sunt, de asemenea, suplementare).

X.167. *Dacă* $x_1,x_2,\ldots,x_n\in(0,\infty)$, $n\in\mathbb{N}^*$ *şi* $m\in\mathbb{N}$, *arătaţi că* $\dfrac{x_1^{m+2}+x_2^{m+2}}{x_1x_2}+\dfrac{x_2^{m+2}+x_3^{m+2}}{x_2x_3}+\ldots+\dfrac{x_n^{m+2}+x_1^{m+2}}{x_nx_1}\geq\dfrac{2}{n^{m-1}}(x_1+x_2+\ldots+x_n)^m$.

Neculai Roman, Mirceşti, Iaşi

Soluţia 1 (a autorului)**.** Dacă $x,y\in(0,\infty)$, atunci $\dfrac{x^{m+2}+y^{m+2}}{xy}\geq x^m+y^m$: după calcule, această inegalitate revine la evidenta $(x-y)^2(x^m+x^{m-1}y+\ldots+y^m)\geq 0$. Scriem n relaţii de acest tip şi, prin sumarea lor, obţinem că membrul stâng al inegalităţii din enunţ este cel puţin egal cu $2(x_1^m+x_2^m+\ldots+x_n^m)$. Inegalitatea lui Jensen aplicată funcţiei convexe $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^m$ conduce la $\dfrac{1}{n}\sum x_1^m\geq\left(\dfrac{1}{n}\sum x_1\right)^m$ şi, de aici, concluzia problemei.

Soluţia 2 (**Titu Zvonaru**)**.** Folosind inegalitatea $a^{m+2}+b^{m+2}\geq ab(a^m+b^m)$ (care revine la $(a-b)(a^{m+1}-b^{m+1})\geq 0$) şi inegalitatea lui Radon, avem:

$$\sum\frac{x_1^{m+2}+x_2^{m+2}}{x_1x_2}\geq 2\sum\frac{x_1^m}{1^{m-1}}\geq\frac{2}{n^{m-1}}\left(\sum x_1\right)^m.$$

X.168. *Determinaţi funcţiile* $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ *cu propritatea că* $f^{[k]}(x)+f^{[k-1]}(x)+\ldots+f^{[2]}(x)+f(x)=kx$, $\forall x\in\mathbb{N}$, *unde* k *este un număr natural nenul fixat şi* $f^{[i]}(x)=f(f(\ldots(x)))$.

Radu Miron, student, Iaşi

Soluţia 1 (a autorului)**.** Se constată uşor că f este injectivă. Din $f^{[k]}(0)+\ldots+f(0)=0$ şi $f(0)\in\mathbb{N}$, rezultă că $f(0)=0$. Cum f este injectivă, $f(x)\geq 1$ pentru $x\geq 1$ şi, din $f^{[k]}(1)+\ldots+f(1)=k$, obţinem că $f(1)=1$. Repetând raţionamentul, prin inducţie, deducem că $f(x)=x$, $\forall x\in\mathbb{N}$.

Soluţia 2 (**Pavel Beţiu**, elev, Craiova)**.** Dăm lui x valoarea $f(x)$ şi obţinem: $f^{[k+1]}(x)+f^{[k]}(x)+\ldots+f^{[2]}(x)=kf(x)$ şi deducem că $f^{[k+1]}(x)=(k+1)f(x)-kx$. Dând lui k valorile $0,1,\ldots,k-1$ şi sumând relaţiile obţinute, deducem că avem: $kx=(1+2+\ldots+k)f(x)-(1+2+\ldots+(k-1))x$, de unde rezultă că $f(x)=x, x\in\mathbb{N}$.

X.169. *Fie* $a,b,c\in\mathbb{C}$, $a\neq 0$; *demonstraţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *Ecuaţia* $az^2+bz+c=0$ *are exact o soluţie de modul* 1.

(ii) $|b\overline{c}-a\overline{b}|=\left||a|^2-|c|^2\right|\neq 0$.

Ce se poate spune despre soluţiile ecuaţiei dacă $|b\overline{c}-a\overline{b}|=\left||a|^2-|c|^2\right|=0$?

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. (i)⇒(ii) Fie u, v soluţiile ecuaţiei $az^2 + bz + c = 0$, cu $|u| = 1$ şi $|v| \neq 1$. Deoarece $\dfrac{|c|}{|a|} = |u| \cdot |v| = |v| \neq 1$, avem $|a| \neq |c|$, deci $\left||a|^2 - |c|^2\right| \neq 0$. Trecem la conjugate în egalitatea $au^2+bu+c = 0$ şi ţinem seama că $\overline{u} = \dfrac{1}{u}$; obţinem $\overline{c}u^2+\overline{b}u+\overline{a} = 0$. Reducem u^2 între cele două egalităţi şi rezultă că $(b\overline{c} - a\overline{b})u = |a|^2 - |c|^2$. Relaţia (ii) se obţine trecând la module şi folosind faptul că $|u| = 1$.

(ii)⇒(i) În ipoteza (ii), numărul $u = \dfrac{|a|^2 - |c|^2}{b\overline{c} - a\overline{b}}$ are modulul 1, prin urmare $\dfrac{1}{u} = \overline{u}$. Atunci

$$au + b + \frac{c}{u} = (|a|^2 - |c|^2)\left(\frac{a}{b\overline{c} - a\overline{b}} + \frac{c}{\overline{b}c - \overline{a}b}\right) + b =$$
$$= (|a|^2 - |c|^2) \cdot \frac{-b(|a|^2 - |c|^2)}{|b\overline{c} - a\overline{b}|^2} + b = 0,$$

deci u verifică ecuaţia $az^2 + bz + c = 0$. Dacă v este cea de-a doua soluţie a ecuaţiei, $|v| = |u| \cdot |v| = \dfrac{|c|}{|a|} \neq 1$, pentru că $||a|^2 - |c|^2| \neq 0 \Rightarrow |a| \neq |c|$.

În cazul în care $|b\overline{c} - a\overline{b}| = ||a|^2 - |c|^2| = 0$, avem că $b\overline{c} = a\overline{b}$ şi $a\overline{a} = c\overline{c}$, deci $\dfrac{a}{\overline{c}} = \dfrac{b}{\overline{b}} = \dfrac{c}{\overline{a}}$. Rezultă că ecuaţiile $az^2 + bz + c = 0$ şi $\overline{c}z^2 + \overline{b}z + \overline{a} = 0$ sunt echivalente, prin urmare soluţiile u şi v ale primei ecuaţii trebuie să coincidă, într-o anumită ordine, cu soluţiile $\dfrac{1}{\overline{u}}$ şi $\dfrac{1}{\overline{v}}$ ale celei de-a doua. Dacă $u = \dfrac{1}{\overline{u}}$ şi $v = \dfrac{1}{\overline{v}}$, atunci $|u| = |v| = 1$; dacă $u = \dfrac{1}{\overline{v}}$ şi $v = \dfrac{1}{\overline{u}}$, atunci $u\overline{v} = 1$.

X.170. *Dacă A, B, C sunt măsurile unghiurilor unui triunghi şi $x, y, z \in (0, 1)$, arătaţi că*

$$\frac{\operatorname{tg}^6 \frac{A}{2}}{x(1 - x^2)} + \frac{\operatorname{tg}^6 \frac{B}{2}}{y(1 - y^2)} + \frac{\operatorname{tg}^6 \frac{C}{2}}{z(1 - z^2)} \geq \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

Soluţie. Din inegalitatea mediilor, $2x^2(1 - x^2)^2 \leq \left(\dfrac{2x^2 + 1 - x^2 + 1 - x^2}{3}\right)^3 = \dfrac{8}{27}$, prin urmare $x(1 - x^2) \leq \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$, $\forall x \in (0, 1)$, cu egalitate când $2x^2 = 1 - x^2$, adică $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Rezultă că

$$\sum \frac{\operatorname{tg}^6 \frac{A}{2}}{x(1 - x^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \sum \operatorname{tg}^6 \frac{A}{2}. \tag{1}$$

Folosind inegalitatea lui Jensen, avem că $\dfrac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \geq \left(\dfrac{a + b + c}{3}\right)^3$ şi atunci

$m^6+n^6+p^6 \geq \frac{1}{9}(m^2+n^2+p^2)^3 \geq \frac{1}{9}(mn+np+pm)^3$. Deducem că

$$\sum \operatorname{tg}^6 \frac{A}{2} \geq \frac{1}{9} \cdot \left(\sum \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)^3. \tag{2}$$

Este binecunoscut faptul că, în orice triunghi, are loc egaliattea

$$\sum \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} = 1. \tag{3}$$

Relaţiile (1), (2) şi (3) conduc la concluzia problemei. Egalitatea se atinge când $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ şi $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Clasa a XI-a

XI.166. *Calculaţi limita şirului* $a_n = \frac{(1!)^{1!}+(2!)^{2!}+\ldots+(n!)^{n!}}{(n!)^{n!}}$.

Liviu Smarandache, Craiova

Soluţie. Evident că $a_n > 1$. Pe de altă parte,

$$a_n = \frac{(1!)^{1!}+(2!)^{2!}+\ldots+((n-1)!)^{(n-1)!}}{(n!)^{n!}} + 1 <$$
$$< \frac{(n-1)\cdot((n-1)!)^{(n-1)!}}{(n!)^{n!}} + 1 = b_n + 1,$$

iar $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Conform criteriului cleştelui, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

XI.167. *Rezolvaţi în* $\mathbb{R}$ *ecuaţiile:*

a) $(x-3)e^x+3x+3=0$;

b) $(x-3)3^x+3x+3=0$.

Ionel Tudor, Călugăreni

Soluţie. a) Dacă $f(x)=(x-3)e^x+3x+3$, funcţie indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$, atunci $f'(x)=(x-2)e^x+3$ şi $f''(x)=(x-1)e^x$. Observăm că f'' este negativă pe $(-\infty,1)$ şi pozitivă pe $(1,\infty)$, prin urmare f' este descrescătoare pe $(-\infty,1)$ şi crescătoare pe $(1,\infty)$. Cum $f'(1)=3-e>0$, f' va fi pozitivă pe $\mathbb{R}$, deci f este strict crescătoare. Avem că $f(0)=0$, aşadar $x=0$ este unica soluţie a ecuaţiei din enunţ.

b) Fie $g(x)=(x-3)3^x+3x+3$, funcţie indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$; atunci $g'(x)=3^x(1+(x-3)\ln 3)+3$ şi $g''(x)=3^x\ln 3\cdot(2+(x-3)\ln 3)$. Ecuaţia $g''(x)=0$ are unica soluţie $x=\frac{3\ln 3-2}{\ln 3}$, prin urmare ecuaţia $g'(x)=0$ va avea cel mult două soluţii, iar ecuaţia $g(x)=0$ va avea cel mult trei soluţii. Cum $g(0)=g(1)=g(2)=0$, mulţimea soluţiilor ecuaţiei este $S=\{0,1,2\}$.

XI.168. *Se consideră şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *definit prin:* $x_1=a>0$, $x_{n+1}=e^{x_n}+\frac{x_n}{n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. *Calculaţi* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{x_n}$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{nx_{n+1}}{x_n}\right)^{e^{-x_n}}$.

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

Soluţie. Folosind binecunoscuta $e^x \geq x+1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, se demonstrează inductiv că $x_n > n-1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Şirul $\left(\dfrac{n}{x_n}\right)_{n\geq 1}$ este descrescător şi are termeni pozitivi, deci este convergent; fie $L = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{x_n} \geq 0$. Utilizăm lema lui Stolz-Cesàro şi avem:

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_{n+1}-x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{x_n} + \frac{x_n}{n} - x_n} \leq \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{x_n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{x_n}}{\frac{n}{x_n}+1} = \frac{L}{L+1} \Rightarrow L^2 + L \leq L \Rightarrow \\
&\Rightarrow L^2 \leq 0 \Rightarrow L = 0.
\end{aligned}$$

Observăm că $\dfrac{nx_{n+1}}{x_n} = \dfrac{ne^{x_n}}{x_n} + 1 \geq \dfrac{n(x_n+1)}{x_n} + 1 = \dfrac{n}{x_n} + n + 1$, prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{nx_{n+1}}{x_n} = \infty$. Cea de-a doua limită este o nedeterminare de tip ∞^0 şi este egală cu e^A, unde $A = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{e^{x_n}} \ln\left(1 + \dfrac{n\cdot e^{x_n}}{x_n}\right) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{e^{x_n}} \cdot \dfrac{ne^{x_n}}{x_n} = 0$. Cum evident că $A \geq 0$, limita dorită este egală cu $e^0 = 1$.

XI.169. *Calculaţi determinantul matricei* $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ *definită prin* $a_{11} = 1$, $a_{ii} = i^2 + i - 1$, $\forall i \geq 2$ *şi* $a_{ij} = 2\min\{i,j\} - 1$, $\forall i \neq j$.

Lucian Tuţescu şi Petrişor Rocşoreanu, Craiova

Soluţie. Fie $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{pmatrix}$ şi $C = B^t$; atunci $A = B \cdot C$. Cum $\det B = \det C = n!$, rezultă că $\det A = (n!)^2$.

XI.170. *Fie A o matrice pătratică de ordin n cu elemente numere reale pozitive, având suma elementelor egală cu n^2. Demonstraţi că există n elemente ale matricei, situate pe linii şi pe coloane diferite, al căror produs este cel mult egal cu* 1.

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Vom spune că n elemente ale matricei situate pe linii şi pe coloane diferite alcătuiesc o *diagonală* a matricei; există $n!$ diagonale şi fiecare element al matricei apare în exact $(n-1)!$ dintre ele. Suma sumelor $s_1, s_2, \dots, s_{n!}$ ale elementelor de pe diagonale va fi egală cu $(n-1)! \cdot \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} = (n-1)! \cdot n^2 = n! \cdot n$. Rezultă că măcar o sumă $s_i = a_{1\sigma(1)} + a_{2\sigma(2)} + \dots + a_{n\sigma(n)}, \sigma \in S_n$, este cel mult egală cu n. Folosind inegalitatea mediilor, produsul elementelor de pe diagonala respectivă va fi cel mult egal cu 1.

Clasa a XII-a

XII.166. *Fe $f, g \in \mathbb{R}[X]$ polinoame neconstante cu proprietatea că $f(X^{2016} + X + 1) = f(X)g(X)$. Arătaţi că gradul polinomului f este par.*

Dumitru Săvulescu, Bucureşti

Soluţie. Dacă deg $f = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, atunci f ar avea măcar o rădăcină reală; fie r cea mai mare astfel de rădăcină. Cum $f(r^{2016}+r+1) = f(r)g(r) = 0$, numărul $r' = r^{2016}+r+1$ este rădăcină reală a lui f şi, evident, $r' > r$. Contradicţia obţinută arată că deg $f = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$.

XII.167. *Se consideră şirul* $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n \operatorname{arctg} x}{x^2+1}dx$. *Calculaţi* $\lim_{n\to\infty} I_n$ *şi* $\lim_{n\to\infty} nI_n$.

Stelian Piscan, Giurgiu

Soluţie. Dacă $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ este funcţie derivabilă cu derivata continuă şi $I_n = \int_0^1 x^n f(x)dx$, atunci $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$, iar $\lim_{n\to\infty} nI_n = f(1)$; propunem cititorului să justifice riguros aceste afirmaţii. În cazul nostru, prima limită este 0, iar a doua $\frac{\pi}{8}$.

XII.168. *Pentru* $n \in \mathbb{N}$, *calculaţi* $I_n = \int_0^\pi e^x \sin^n x dx$.

Adrian Corduneanu, Iaşi

Soluţie. Integrând de două ori prin părţi, obţinem relaţia de recurenţă $I_n = \frac{n(n-1)}{n^2+1} \cdot I_{n-2}$, $\forall n \geq 2$. Cum $I_0 = e^\pi - 1$ şi $I_1 = \frac{1}{2}(e^\pi+1)$, avem:

$$I_n = \frac{n!(e^\pi-1)}{(2^2+1)(4^2+1)\ldots(n^2+1)}, \quad \text{dacă } n \text{ este par şi}$$

$$I_n = \frac{n!(e^\pi+1)}{(1^2+1)(3^2+1)\ldots+(n^2+1)}, \quad \text{dacă } n \text{ este impar.}$$

XII.169. *Calculaţi* $\int_0^2 \frac{3-x^2}{x^4+6x^3+16x^2+18x+9}dx$.

Constantin Dragomir, Piteşti

Soluţie. Integrala din enunţ se poate scrie sub forma

$$I = \int_0^2 \frac{3-x^2}{(x^2+3x+3)^2+x^2}dx = \int_0^2 \frac{\varphi'(x)}{1+\varphi^2(x)}dx,$$

unde $\varphi(x) = \frac{x}{x^2+3x+3}$, $x \in [0,2]$. Funcţia φ este strict crescătoare pe $[0,\sqrt{3}]$ şi strict descrescătoare pe $[\sqrt{3},2]$ şi, pe fiecare dintre intervalele de monotonie, primitiva lui $\frac{\varphi'(x)}{1+\varphi^2(x)}$ este $F(x) = \operatorname{arctg}\varphi(x)$. Rezultă că $I = (F(\sqrt{3}) - F(0)) + (F(2) - F(\sqrt{3})) = F(2) - F(0) = \operatorname{arctg}\frac{2}{13}$.

XII.170. *Fie* $f : [0,1] \to [0,1]$ *o funcţie derivabilă, cu derivata continuă. Dacă* $M = \sup|f'(x)|$, *arătaţi că*

$$|2\int_0^1 xf^2(x)dx - (\int_0^1 f(x)dx)^2| \leq \frac{M}{3}.$$

Florin Stănescu, Găeşti

Soluţie. Avem: $|f'(x)| \leq M$, $\forall x \in [0,1] \Rightarrow |f'(x) \cdot x \int_x^1 f(t)dt| \leq M \cdot x \cdot \int_x^1 f(t)dt \Rightarrow |\int_0^1 (f'(x) \cdot x \cdot \int_x^1 f(t)dt)dx| \leq M \cdot \int_0^1 (x \int_x^1 f(t)dt)dx$. Însă $\int_0^1 (x \int_x^1 f(t)dt)dx = \int_0^1 \left(\left(\frac{x^2}{2} \right)' \int_x^1 f(t)dt \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 f(x)dx$, iar

$$\int_0^1 (f'(x) \cdot x \cdot \int_x^1 f(t)dt)dx = -\int_0^1 f(x) \cdot \left(\int_x^1 f(t)dt - xf(x) \right) dx =$$
$$= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 f(x)dx \right)^2 + \int_0^1 xf^2(x)dx.$$

Pentru a obţine concluzia problemei, este destul să mai observăm că $\int_0^1 x^2 f(x)dx \leq \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor propuse în 1/2016

A. Nivel gimnazial

G296. *Asterix şi Obelix scriu, alternativ, numerele naturale* $1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100$ *în căsuţele unui tablou* 3×3, *fiecare număr câte o singură dată. Asterix începe şi doreşte ca, la final, să existe o linie şi o coloană având produsele numerelor egale cu* 1000*; în caz contrar, câştigă Obelix. Care dintre jucători are strategie de câştig?*

Ioan Viorel Codreanu, Satulung, Maramureş

Soluţie. Asterix are strategie de câştig: el începe prin a scrie undeva numărul 10. Colorăm cu roşu cele două căsuţe rămase pe linia lui 10, cu galben cele două căsuţe rămase pe coloana lui 10 şi lăsăm albe celelalte patru căsuţe. Grupăm numerele care mai trebuie scrise în perechi cu produsul 100 : $(1, 100)$, $(2, 50)$, $(4, 25)$, $(5, 20)$. Indiferent ce joacă Obelix, Asterix va răspunde completând, pe aceeaşi culoare, cu celălalt număr din pereche. În acest fel, produsele numerelor de pe linia roşie şi de pe coloana galbenă vor fi 1000.

G297. *Determinaţi toate numerele naturale* m *cu proprietatea că numărul* $m^2 + 6$ *se scrie folosind numai cifre de* 2.

Ioan Viorel Codreanu, Satulung, Maramureş

Soluţie. Nu putem avea $m^2 + 6 = 2$, iar $m^2 + 6 = 22$ când $m = 4$. Dacă $m^2 + 6$ se scrie folosind cel puţin trei cifre de 2, terminaţia lui m^2 va fi $\overline{\ldots 216}$, deci un număr care se divide cu 8. Ar trebui atunci ca m să se divídă cu 4, prin urmare m^2 se va divide cu 16. Însă 216 şi 2216 nu se divid cu 16, aşadar rămâne unica soluţie $m = 4$.

G298. *Demonstraţi că nu există numere prime* p *şi* q *pentru care numărul* $3pq - 1$ *să fie cub perfect.*

Marian Voinea şi Florentin Vişescu, Bucureşti