oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$. Cum $S_k(n) = P_k(n)$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ şi relaţia precedentă are loc pentru o infinitate de valori ale lui n, rezultă că

$$(X+1)^{k+1} - (X+1) = C_{k+1}^1 P_k + C_{k+1}^2 P_{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k P_1, \ \ \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Atunci $P_k = \dfrac{1}{k+1}[(X+1)^{k+1} - (X+1) - (C_{k+1}^2 P_{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k P_1)]$ şi, evident, $P_1 = \dfrac{1}{2}X(X+1)$. Din acest moment, cerinţele problemei se demonstrează prin inducţie matematică.

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor propuse în nr. 1/2015

A. Nivel gimnazial

G276. *Determinaţi valoarea maximă a numărului real* α *pentru care* $\dfrac{x^3}{a} + \dfrac{y^3}{b} \geq \dfrac{\alpha xy(x+y)}{a+b}$, *oricare ar fi numerele reale pozitive* x, y, a *şi* b.

Alexandru Blaga, Satu Mare

Soluţie. În soluţia problemei **IX.152** (a se vedea *RecMat 1/2015*, p.63) s-a arătat că $\dfrac{x^3}{a} + \dfrac{y^3}{b} \geq \dfrac{2xy(x+y)}{a+b}$, $\forall x, y, z, b \in (0, \infty)$, deci $\alpha_{\max} \geq 2$. Pe de altă parte, pentru $a = b$ şi $x = y$, obţinem că $\dfrac{2x^3}{a} \geq \dfrac{2\alpha x^3}{2a}$, $\forall x, a \in (0, \infty)$, prin urmare $\alpha \leq 2$. În concluzie, valoarea maximă cerută a lui α este 2.

G277. *Fie* $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}$ *(unde* $n \in \mathbb{N}^*$*) numere reale pozitive cu* $\sum\limits_{i=1}^{2n+1} x_i = 2n+1$. *Arătaţi că* $\sum\limits_{i=1}^{2n+1} \dfrac{x_i}{nx_i^2 + n + 1} \leq 1$.

Lucian Tuţescu şi Teodora Rădulescu, Craiova

Soluţie. Din inegalitatea mediilor, $nx_1 + n + 1 \geq (2n+1) \cdot \sqrt[2n+1]{(x_1^2)^n \cdot 1^{n+1}}$. Atunci $\dfrac{x_1}{nx_1^2 + n + 1} \leq \dfrac{x_1}{(2n+1)\sqrt[2n+1]{x_1^{2n}}} = \dfrac{1}{2n+1}\sqrt[2n+1]{x_1} \leq \dfrac{1}{2n+1} \cdot \dfrac{x_1 + 1 + \ldots + 1}{2n+1} = \dfrac{x_1 + 2n}{(2n+1)^2}$. Scriem încă $2n$ inegalităţi similare şi, prin sumarea lor, obţinem că $\sum\limits_{i=1}^{2n+1} \dfrac{x_i}{nx_i^2 + n + 1} \leq \dfrac{1}{(2n+1)^2} \cdot \sum\limits_{i=1}^{2n+1} (x_i + 2n) = 1$. Se obţine egalitate pentru $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2n+1} = 1$.

G278. *Demonstraţi că nu există numere naturale nenule* n *pentru care numărul* $a_n = 5^n + 5^{n+1} + \ldots + 5^{2n-1}$ *să fie pătrat perfect.*

Radu Miron, elev, Iaşi

Soluţie. Presupunem, prin absurd, că a_n ar fi pătrat perfect pentru un anumit $n \in \mathbb{N}^*$. Cum $a_n = 5^n(1 + 5 + \ldots + 5^{n-1})$ şi numerele 5^n şi $b = 1 + 5 + \ldots + 5^{n-1}$

sunt prime între ele, rezultă că $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$, iar $b = c^2$, $c \in \mathbb{N}^*$. Dar $b = \dfrac{5^n - 1}{4} = \dfrac{5^k - 1}{2} \cdot \dfrac{5^k + 1}{2}$ şi, deoarece $\dfrac{5^k - 1}{2}$ şi $\dfrac{5^k + 1}{2}$ sunt numere naturale consecutive, deci relativ prime, obţinem că $5^k - 1 = 2x^2$ şi $5^k + 1 = 2y^2$. De aici, $y^2 - x^2 = 1$, aşadar $y = 1$, $x = 0$, contradicţie. Concluzia se impune.

G279. *Determinaţi cel mai mare număr natural n cu proprietatea că există numere naturale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ astfel încât $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 5(n-1)$ şi $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n} = 2$.*

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Cum $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{a_k}\right) \geq n^2$, rezultă că $10(n-1) \geq n^2$, de unde $(n-5)^2 \leq 15$. Deducem că $n \leq 8$ şi valoarea maximă căutată a lui n este chiar 8, deoarece putem considera $a_1 = 2$, $a_2 = a_3 = 4$, $a_4 = \ldots = a_8 = 5$.

G280. Arătaţi că există o infinitate de numere naturale n cu proprietatea că $n!$ se divide cu $n^3 + n^2 - 36$.

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Vom arăta că toate numerele de forma $n = m^2 - 1$, $m \geq 6$, m divizibil cu 3, au proprietatea dorită. Într-adevăr, observăm că $n^3 + n^2 = n^2(n+1) = (nm)^2 = (m^3 - m)^2$, deci $n^3 + n^2 - 36 = (m^3 - m - 6)(m^3 - m + 6) = (m-2)(m+2)(m^2 - 2m + 3)(m^2 + 2m + 3)$. În plus, $3 < m - 2 < m + 2 < \dfrac{m^2 + 2m + 3}{3} < m^2 - 2m + 3 < m^2 - 1$, oricare ar fi $m \geq 6$, m divizibil cu 3, prin urmare $n!$ se divide cu $n^3 + n^2 - 36$ pentru o infinitate de valori ale lui n.

G281. *Dreptunghiul $A_1A_2A_3A_4$ are lungimea $A_1A_2 = L$ şi lăţimea $A_2A_3 = l$, unde $L, l \in \mathbb{N}^*, L > l$ şi L nu se divide cu l. Se construiesc dreptunghiurile $A_3A_4A_5A_6, A_5A_6A_7A_8, \ldots, A_{2n-1}A_{2n}A_{2n+1}A_{2n+2}$, având aceleaşi dimensiuni cu dreptunghiul iniţial, unde $nl > L$. Notăm cu N_1 şi P_1 numărul, respectiv suma perimetrelor dreptunghiurilor de lungime L din figura obţinută şi cu N_2 şi P_2 numărul, respectiv suma perimetrelor dreptunghiurilor de lăţime L.*

a) *Există $n \geq 4$ pentru care $N_1 = N_2$?*

b) *Demonstraţi că $P_1 + P_2 < \dfrac{n(n+1)(n+5)}{6}(L+l)$.*

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

Soluţie. a) Notăm $x = \left[\dfrac{L}{l}\right]$. În figură apar n dreptunghiuri $L \times l$, $n-1$ dreptunghiuri $L \times 2l, \ldots, 1$ dreptunghi $L \times nl$, deci un total de $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ dreptunghiuri; rezultă că $N_1 + N_2 = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Numărul dreptunghiurilor de lungime L va fi $N_1 = n + (n-1) + \ldots + (n - x + 1) = \dfrac{x(2n - x + 1)}{2}$. Avem $N_1 = N_2$ dacă şi numai dacă $\dfrac{x(2n - x + 1)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{4}$, deci când $2x^2 - 2(2n+1)x + n^2 + n = 0$.

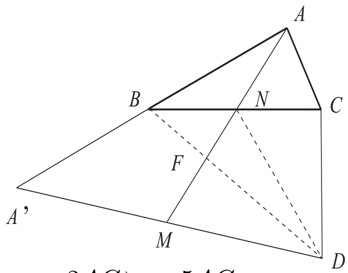
Această ecuaţie are discriminantul $\Delta = 4(2n^2 + 2n + 1)$ şi Δ este pătrat perfect pentru, de exemplu, $n = 20$ (se arată că $n = 20$ este minim astfel încât Δ sa fie pătrat perfect); pentru acest n, ecuaţia admite soluţia convenabilă $x = 6$ şi $N_1 = N_2 = 105$.

b) Avem: $P_1 = \sum\limits_{i=1}^{x}(n-i+1)(2L+2li)$, $P_2 = \sum\limits_{i=x+1}^{n}(n-i+1)(2L+2Li)$, deci $P_1 + P_2 = \sum\limits_{i=1}^{n}(n-i+1)(2L+2li) = \dfrac{n(n+1)}{3}(3L+2l+nl)$. Pentru a demonstra cerinţa problemei, ar fi destul să arătăm că $3L+2l+nl < \dfrac{n+5}{2}(L+l)$; după calcule, această inegalitate revine la $(n-1)(L-l) > 0$, adevărat.

G282. *Triunghiul ABC are $m(\widehat{A}) = 90°$ şi $m(\widehat{B}) = 30°$. Simetricul lui A faţă de B este A', punctul D este astfel încât $CD \perp BC$, $CD = AB$, iar A şi D sunt separate de BC, N este mijlocul lui BC şi $\{M\} = AN \cap A'D$. Demonstraţi că $2AM = 5AC$.*

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

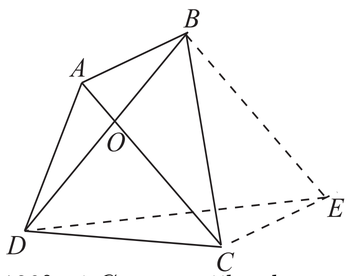
Soluţie. Cum $AC = CN$, $AB = CD$, rezultă că $\triangle ABC \equiv \triangle CDN$ (C.C.), prin urmare $m(\widehat{CND}) = 60° = m(\widehat{CNA})$. Deducem că $m(\widehat{DNM}) = 60°$ şi $m(\widehat{BNM}) = m(\widehat{ANC}) = 60°$, aşadar NF este bisectoarea unghiului $\widehat{BND}$. Din teorema bisectoarei, $\dfrac{BF}{FD} = \dfrac{BN}{ND} = \dfrac{BN}{BC} = \dfrac{1}{2}$; în plus, $NF = \dfrac{2\cdot NB\cdot ND}{NB+ND}\cdot\cos\dfrac{120°}{2} = \dfrac{2\cdot AC\cdot 2AC}{AC+2AC}\cdot\cos 60° = \dfrac{4AC}{3}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{2AC}{3}$. Punctul F este centrul de greutate al triunghiului $AA'D$, deoarece se află pe mediana BD şi $DF = 2BF$; atunci $AF = 2FM$, prin urmare $AM = \dfrac{3}{2}(AN+NF) = \dfrac{3}{2}\left(AC + \dfrac{2AC}{3}\right) = \dfrac{5AC}{2}$, de unde conlcuzia problemei.



G283. *În patrulaterul convex $ABCD$, cu $AC \cap BD = \{O\}$, se ştie că $m(\widehat{COD}) = 60°$, $m(\widehat{DAB}) = 110°$ şi $AB + CD = AC = BD$. Determinaţi măsurile unghiurilor patrulaterului.*

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

Soluţie. Construim paralelogramul $ABEC$; atunci $BE = AC = BD$, iar $m(\widehat{DBE}) = m(\widehat{DOC}) = 60°$, prin urmare $\triangle BDE$ este echilateral. Deducem că $DE = BD = DC + AB = DC + CE$, de unde rezultă că punctele C, D, E sunt coliniare. Apoi, $m(\widehat{OCD}) = m(\widehat{BED}) = 60°$, deci $\triangle COD$ este echilateral, aşadar $OC = CD$. Se arată acum uşor că $ABCD$ este trapez isoscel, cu măsurile unghiurilor de $110°$, $110°, 70°$ şi $70°$.

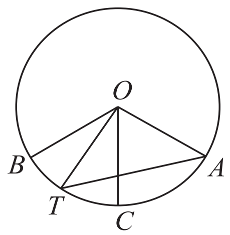


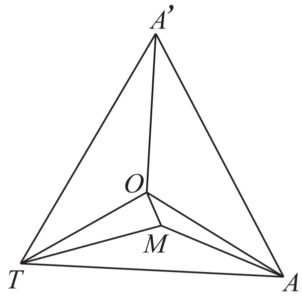
G284. *Pe circumferinţa unui cerc de centru O considerăm punctele A, B, C astfel încât $m(\widehat{AOB}) = 120°$ şi C este mijlocul arcului mic $\widehat{AB}$. Pentru un punct T situat pe arcul $\widehat{BC}$ care nu conţine punctul A, fie M un punct în interiorul triunghiului TOA cu proprietatea că $m(\widehat{MAT}) = 30°$ şi*

$\widehat{OTM} = 2 \cdot \widehat{OAM}$. *Să se determine locul geometric al punctului M, ştiind că punctul T este variabil pe arcul $\widehat{BC}$.*

Vasile Pravăţ şi Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Deoarece $\measuredangle AOB = 120°$ şi $\measuredangle AOC = 60°$, avem $60° < \measuredangle AOT < 120°$ ceea ce implică faptul că $\measuredangle OAT = \measuredangle OTA \in (30°, 60°)$. Fie $\measuredangle OAT = \alpha$. Construim triunghiul echilateral $AA'T$. Triunghiurile OAT şi $A'AT$ sunt isoscele, deci OA' este mediatoarea segmentului AT, adică şi bisectoarea $\measuredangle AA'T$.





Avem: $\measuredangle MAT = 30° = \measuredangle OA'T$; $AT = A'T$; $\measuredangle MTA = \measuredangle OTA - \measuredangle OTM = \alpha - 2 \cdot \measuredangle OAM = \alpha - 2(\alpha - 30°) = 60° - \alpha = \measuredangle A'TO$ şi rezultă că $\triangle MAT \equiv \triangle OA'T$, prin urmare $MT = OT$. Din faptul că triunghiul OMT este isoscel, obţinem: $\measuredangle TOM = \dfrac{1}{2}(180° - \measuredangle OTM) = \dfrac{1}{2}(180° - 2(\alpha - 30°)) = 120° - \alpha$; $\measuredangle MOA = \measuredangle TOA - \measuredangle TOM = 180° - 2\alpha - 120° + \alpha = 60° - \alpha$ şi $\measuredangle OMA = 180° - \measuredangle MOA - \measuredangle OAM = 180° - 60° + \alpha - (\alpha - 30°) = 150°$, adică locul geometric căutat este un arc de cerc capabil de unghiul dat de $150°$. Reciproc, orice punct al arcului mic mărginit de punctele O şi A aparţine locului, fapt care se demonstrează uşor.

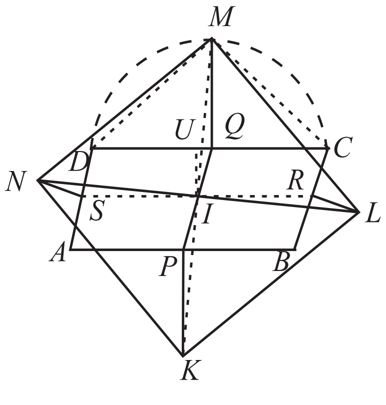
G285. *Pe laturile AB, BC, CD, DA ale paralelogramului $ABCD$ se construiesc în exterior semicercuri şi se notează cu K, L, M, respectiv N mijloacele acestor semicercuri. Arătaţi că:*

a) *patrulaterul $KLMN$ este pătrat;*

b) *vârfurile A, B, C, D sunt pe laturile pătratului dacă şi numai dacă $ABCD$ este dreptunghi.*

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. a) Fie P, Q mijloacele laturilor AB, CD, iar R, S mijloacele laturilor BC, DA. Fie a şi b lungimile laturilor AB şi BC. Evident, $PK = QM = \dfrac{a}{2}$ şi $PK \| QM$. Ca urmare, KM trece prin mijlocul I al segmentului PQ, adică prin punctul de intersecţie a diagonalelor paralelogramului. Analog, LN trece prin I, care este şi mijlocul său. Aşadar diagonalele KM şi LN ale patrulaterului $KLMN$ se înjumătăţesc în I, deci $KLMN$ este paralelogram.



Din faptul că $\triangle IMQ \equiv \triangle INS$ ($QM = IS = \dfrac{a}{2}$, $IQ = SN = \dfrac{b}{2}$, $m(\widehat{MQI}) = m(\widehat{ISN}) = 90° + m(\widehat{A})$)

rezultă că $IM = IN$, deci paralelogramul $KLMN$ are diagonalele egale şi este dreptunghi. Perpendiculara în I pe SR (sau DC) intersectează DC în U. Din congruenţa unghiurilor marcate pe figură, deducem că $\widehat{NIM} \equiv \widehat{SIU}$ şi, deci, $\widehat{NIM}$ este unghi drept. În consecinţă, dreptunghiul $KLMN$ este pătrat.

b) Notăm cu l şi d lungimile laturii şi diagonalei pătratului $KLMN$. Avem $l = \sqrt{2} \cdot \dfrac{d}{2}$, iar cu teorema cosinusului aplicată în $\triangle IMQ$ obţinem: $\dfrac{d^2}{4} = \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{b^2}{4} - 2\dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{b}{2} \cdot \cos(90^\circ + m(\widehat{A}))$ sau $d^2 = a^2 + b^2 + 2ab \sin A$.

Fie l_1 şi l_2 lungimile segmentelor DM şi DN. Condiţia ca A, B, C, D să fie pe laturile pătratului $KLMN$ revine la egalitatea $l = l_1 + l_2$. Avem:

$$\begin{aligned} l = l_1 + l_2 \Leftrightarrow l = \frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{\sqrt{2}}{2}b \Leftrightarrow 2l^2 = (a+b)^2 \Leftrightarrow d^2 = (a+b)^2 \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab \sin A = (a+b)^2 \Leftrightarrow \sin A = 1 \Leftrightarrow A = 90^\circ \\ \Leftrightarrow ABCD \text{ este dreptunghi.} \end{aligned}$$

B. Nivel liceal

Notă. După încheierea numărului 1/2015, am primit o soluţie corectă a problemei **L268** din partea elevului **Edis Memiş**, Constanţa.

L276. *Fie ABC un triunghi, I centrul cercului înscris în el şi A' punctul în care dreapta AI retaie cercul circumscris triunghiului. Să se arate că punctele de contact ale tangentelor din A şi A' la cercul înscris sunt vârfurile unui dreptunghi dacă şi numai dacă $2a = b + c$.*

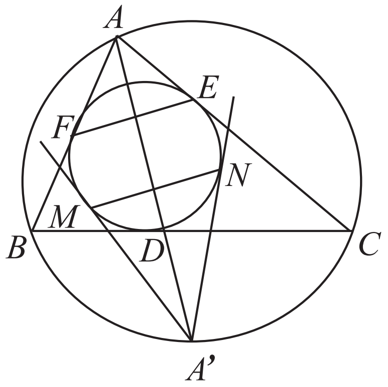
Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţia 1 (**Adrian Păunescu**, elev, Constanţa). Fie D piciorul bisectoarei din A, iar E, F, M, N sunt punctele de contact cu cercul înscris ale tangentelor din A şi A'. Presupunem că $EFMN$ este dreptunghi, înscris în cercul de centru I; atunci I va fi mijlocul lui ME, iar unghiurile $\widehat{IMA'}$ şi $\widehat{IEA}$ sunt drepte. Rezultă că triunghiurile AIE şi $A'IM$ sunt congruente (C.U.), prin urmare $AI = IA'$. Din puterea punctului D faţă de cercul circumscris, avem: $BD \cdot DC = AD \cdot DA' \Leftrightarrow BD \cdot DC = AD(2AI - AD) \Leftrightarrow BD \cdot DC + AD^2 = 2AD \cdot AI \Leftrightarrow \dfrac{ac}{b+c} \cdot \dfrac{ab}{b+c} + \dfrac{4b^2c^2}{(b+c)^2} \cos^2 \dfrac{A}{2} = \dfrac{8b^2c^2}{(b+c)(a+b+c)} \cos^2 \dfrac{A}{2} \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{4p(p-a)}{b+c} = \dfrac{8p(p-a)}{a+b+c} \Leftrightarrow 2a = b + c$.

Reciproc, presupunem că $2a = b + c$. Urmărind raţionamentul precedent în sens invers, obţinem că $AI = AI'$. Rezultă congruenţa triunghiurilor AIE şi $A'IM$ (conform I.U.), de unde $\widehat{AIE} \equiv \widehat{A'IM}$ şi atunci punctele E, I şi M vor fi coliniare. Analog, se arată că punctele F, I şi N sunt coliniare, deci $EFMN$ este dretunghi.

Soluţia 2 (a autorului). Avem $EF \| MN$, deoarece EF şi MN sunt perpendiculare pe AA'. Condiţia ca patrulaterul $EFMN$ să fie dreptunghi revine la $MN = EF$.

În $\triangle AEF$ avem: $EF = 2AF\sin\dfrac{A}{2} = 2r\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{A}{2}$, deci $EF = 2r\cos\dfrac{A}{2}$ $(*)$.



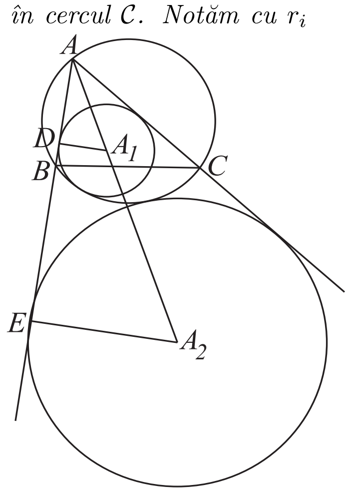
Pe de altă parte, utilizând teorema lui Ptolemeu în patrulaterul $A'MIN$, avem că $MN \cdot A'I = 2r \cdot A'M$ $(**)$. Cum $A'M = \sqrt{A'I - r^2}$ şi $A'I = 2R\sin\dfrac{A}{2}$ (T. Lalescu, 16.7, sau $A'I = A'B$ ($\triangle BA'I$ fiind isoscel) $= \dfrac{\frac{a}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$ (proiectând pe BC)$=\dfrac{2R\sin A}{2\cos\frac{A}{2}} = 2R\sin\dfrac{A}{2}$), prin înlocuire în $(**)$ obţinem:

$$(***)\qquad MN \cdot 2R\sin\frac{A}{2} = 2r\sqrt{4R^2\sin^2\frac{A}{2} - r^2}.$$

Ţinând seama de $(*)$ şi $(***)$, vom avea: $MN = EF \Leftrightarrow MN \cdot 2R\sin\dfrac{A}{2} = EF \cdot 2R\sin\dfrac{A}{2} \overset{(*),(***)}{\Longleftrightarrow} 2r\sqrt{4R^2\sin^2\dfrac{A}{2} - r^2} = 2r\cos\dfrac{A}{2}\cdot 2R\sin\dfrac{A}{2} \Leftrightarrow \sqrt{4R^2\sin^2\dfrac{A}{2} - r^2} = R\sin A \Leftrightarrow 4R^2\sin^2\dfrac{A}{2} - r^2 = R^2\sin^2 A \Leftrightarrow 4R^2\sin^2\dfrac{A}{2}(1-\cos^2\dfrac{A}{2}) = r^2 \Leftrightarrow 4\sin^4\dfrac{A}{2} = \dfrac{r^2}{R^2} \Leftrightarrow 2\sin^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{r}{R} \Leftrightarrow 2\sin^2\dfrac{A}{2} = 4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} \Leftrightarrow \sin\dfrac{A}{2} = 2\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} \Leftrightarrow \sin\dfrac{A}{2} = 2\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} \Leftrightarrow \dfrac{(p-b)(p-c)}{bc} = 4\dfrac{(p-a)(p-c)}{ac}\cdot\dfrac{(p-a)(p-b)}{ab} \Leftrightarrow a^2 = 4(p-a)^2 \Leftrightarrow a = 2(p-a) \Leftrightarrow a = -a+b+c \Leftrightarrow 2a = b+c$.

Notă. Soluţii corecte am primit din partea d-lor **Titu Zvonaru**, Comăneşti şi **Neculai Roman**, Mirceşti, Iaşi.

L277. *Fie poligonul $A_0A_1A_2\ldots A_{n+1}$, $n \geq 1$, înscris în cercul $\mathcal{C}$. Notăm cu r_i razele cercurilor tangente interior cercului $\mathcal{C}$ şi segmentelor A_0A_i, A_0A_{i+1}, $i = \overline{1,n}$ şi cu ρ_i razele cercurilor tangente exterior cercului $\mathcal{C}$ şi semidreptelor $(A_0A_i$, $(A_0A_{i+1}$, $i = \overline{1,n}$. Mai notăm cu r raza cercului tangent interior cercului $\mathcal{C}$ şi segmentelor A_0A_1, A_0A_{n+1} şi cu ρ raza cercului tangent exterior cercului $\mathcal{C}$ şi semidreptelor $(A_0A_1$, $(A_0A_{n+1}$.*



Să se arate că $\dfrac{r_1}{\rho_1}\cdot\dfrac{r_2}{\rho_1}\cdot\ldots\cdot\dfrac{r_n}{\rho_n} = \dfrac{r}{\rho}$.

Neculai Roman, Mirceşti, Iaşi

Soluţie. Demonstrăm mai întâi următoarea.

Lemă. Fie triunghiul ABC înscris în cercul $\mathcal{C}$, r raza cercului tangent interior cercului $\mathcal{C}$ şi segmentelor AB, AC şi ρ raza cercului tangent exterior cercului $\mathcal{C}$ şi semidreptelor $(AB$, $(AC$.

Atunci $\dfrac{r}{\rho} = \operatorname{tg}\dfrac{B}{2}\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}$.

Demonstrație. Notăm $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(A_1, r)$, $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}(A_2, \rho)$, $D \in AB \cap \mathcal{C}_1$, $E \in AB \cap \mathcal{C}_2$. Din $\triangle AA_1D \sim \triangle AA_2E$ rezultă:

$$\frac{A_1D}{A_2E} = \frac{AD}{AE} \Leftrightarrow \frac{r}{\rho} = \frac{AD}{AE} \tag{1}$$

Aplicăm teorema lui Casey cercurilor $A, B, \mathcal{C}_1, C (A, B, C$ degenerate): $AB \cdot (AC - AD) + AC \cdot (AB - AD) = AD \cdot BC \Leftrightarrow AD(AB + AC + BC) = 2AB \cdot AC \Leftrightarrow$

$$AD = \frac{bc}{p} \tag{2}$$

Aplicăm teorema lui Casey cercurilor $A, B, \mathcal{C}_2, C$ $(A, B, C$ degenerate) şi obţinem:

$$AB \cdot (AE - AC) + AC \cdot (AE - AB) = AE \cdot BC \Leftrightarrow AE(AB + AC - BC) =$$

$$= 2AB \cdot AC \Leftrightarrow AE = \frac{bc}{p-a}. \tag{3}$$

Din relaţiile (1), (2) şi (3) rezultă:

$$\frac{r}{\rho} = \frac{p-a}{p} \Leftrightarrow \frac{r}{\rho} = \operatorname{tg}\frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

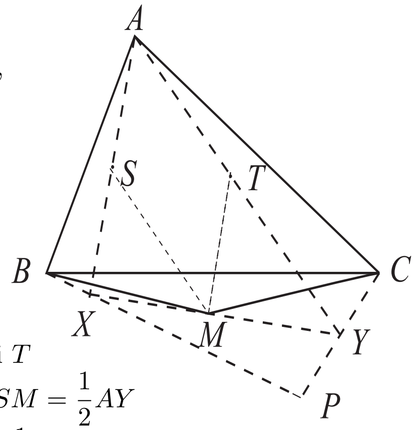
Soluţia problemei. Ţinând seama de lema demonstrată şi de faptul că perechile de unghiuri $\left(\widehat{A_0A_1A_2}, \widehat{A_0A_3A_2}\right)$, $\left(\widehat{A_0A_2A_3}, \widehat{A_0A_4A_3}\right)$, $\ldots$, $\left(\widehat{A_0A_{n-1}A_n}, \widehat{A_0A_{n+1}A_n}\right)$ sunt suplementare obţinem:

$$\frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} \cdot \ldots \cdot \frac{r_n}{\rho_n} = \operatorname{tg}\frac{\widehat{A_0A_1A_2}}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\widehat{A_0A_2A_1}}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\widehat{A_0A_2A_3}}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\widehat{A_0A_3A_2}}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\widehat{A_0A_3A_4}}{2} \cdot$$
$$\ldots \cdot \operatorname{tg}\frac{\widehat{A_0A_nA_{n+1}}}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\widehat{A_0A_{n+1}A_n}}{2} \Leftrightarrow \frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} \cdot \ldots \cdot \frac{r_n}{\rho_n} = \operatorname{tg}\frac{\widehat{A_0A_2A_1}}{2} \operatorname{tg}\frac{\widehat{A_0A_nA_{n+1}}}{2} \Leftrightarrow$$
$$\frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} \cdot \ldots \cdot \frac{r_n}{\rho_n} = \frac{r}{\rho}.$$

Notă. A rezolvat problema d-l **Titu Zvonaru**, Comăneşti.

L278. *Fie ABC un triunghi. Perpendiculara în B pe AB intersectează perpendiculara în C pe AC în punctul P. Două izogonale duse din vârful A taie dreptele BP şi CP în punctele X, respectiv Y. Dacă M este mijlocul segmentului XY, arătaţi că triunghiul MBC este isoscel.*

T. Zvonaru, Comăneşti şi **N. Stanciu**, Buzău



Soluţia 1 (**Ştefan Obadă**, elev, Iaşi). Fie S şi T mijloacele segmentelor AX, respectiv AY. Avem: $SM = \frac{1}{2}AY$ (deoarece SM este linie mijlocie în $\triangle AXY$), $CT = \frac{1}{2}AY$ (deoarece CT este mediana ipotenuzei în $\triangle ACY$), deci $SM = CT$. Analog se arată că $MT = BS$. Apoi,

$\widehat{BSX}$ este unghi exterior triunghiului isoscel ABS, deci $m(\widehat{BSX}) = 2m(\widehat{BAX})$; la fel se obţine că $m(\widehat{CTY}) = 2m(\widehat{CAY})$, prin urmare $\widehat{BSX} \equiv \widehat{CTY}$ şi atunci $\widehat{BSM} \equiv \widehat{CTM}$. Rezultă că $\triangle SMB \equiv \triangle TCM$ (L.U.L.), de unde $MB = MC$.

Soluţia 2 (**Neculai Roman**, Mirceşti, Iaşi)**.** Teorema medianei aplicată în triunghiul BXY arată că $4MB^2 = 2(BX^2 + BY^2) - XY^2$. Notând cu α măsura unghiului $\widehat{BAX}$ şi folosind teorema lui Pitagora în $\triangle ABX$ şi teorema cosinusului în $\triangle ABY$, avem că $BX^2 + BY^2 = AX^2 - AB^2 + AB^2 + AY^2 - 2AB \cdot AY \cos(A - \alpha)$, prin urmare $4MB^2 = 2(AX^2 + AY^2 - 2 \cdot AB \cdot AY \cos(A - \alpha)) - XY^2$. În mod analog se arată că $4MC^2 = 2(AX^2 + AY^2 - 2AC \cdot AX \cdot \cos(A - \alpha)) - XY^2$. Din asemănarea $\triangle ABX \sim \triangle ACY$ obţinem că $AB \cdot AY = AC \cdot AX$, aşadar $MB^2 = MC^2$, deci $\triangle MBC$ este isoscel.

L279. *Mediana AM a triunghiului ascuţitunghic ABC intersectează cercul celor nouă puncte asociat triunghiului în M şi N. Demonstraţi că $2AN < AM$.*

Corneliu Mănescu-Avram, Ploieşti

Soluţia 1 (**Călin Spiridon**, elev, Piatra Neamţ)**.** Triunghiul ABC fiind ascuţitunghic, punctul A va fi situat în exteriorul cercului celor nouă puncte. Pe de altă parte, punctul D de intersecţie dintre mediana AM şi linia mijlocie paralelă cu BC se află în interiorul cercului celor nouă puncte. Astfel, $N \in (AD)$ şi atunci $2AN < 2AD = AM$.

Soluţia 2 (**Titu Zvonaru**, Comăneşti, **Marius Olteanu**, Rm. Vâlcea şi **Ioan Viorel Codreanu**, Satulung, Maramureş)**.** Cercul celor nouă puncte trece prin mijloacele laturilor şi prin picioarele înălţimilor. Folosind puterea punctului A faţă de acest cerc, obţinem că $AM \cdot AN = \dfrac{bc\cos A}{2}$. Astfel, $2AN < AM \Leftrightarrow \dfrac{bc\cos A}{m_a} < m_a \Leftrightarrow bc \cdot \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} < \dfrac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} \Leftrightarrow a^2 > 0$, de unde concluzia problemei.

L280. *Cu notaţiile uzuale într-un triunghi, arătaţi că, pentru orice număr natural $n \geq 2$, sunt adevărate inegalităţile*:

a) $\sum \sqrt[n]{\dfrac{a}{-a + b + c}} \leq \dfrac{3n - 4}{n} + \dfrac{2R}{nr}$;

b) $\sum a \cdot \sqrt[n]{\dfrac{a}{-a + b + c}} \leq \dfrac{2p(R + (n - 2)r)}{nr}$.

Nicuşor Zlota, Focşani şi **Corneliu Mănescu-Avram**, Ploieşti

Soluţie (**Titu Zvonaru**, Comăneşti, **Marius Olteanu**, Rm. Vâlcea şi **Ioan Viorel Codreanu**, Satulung, Maramureş)**.** Cu substituţiile Ravi ($a = y + z, b = z + x, c = x + y$) avem:

$$\frac{R}{r} = \frac{(x + y)(y + z)(z + x)}{4xyz}$$

Aplicând inegalitatea mediilor obţinem:

$$\text{(1)} \qquad \sqrt[n]{\frac{y + z}{2x}} = \sqrt[n]{\frac{y + z}{2x} \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{n-1}} \leq \frac{\frac{y+z}{2x} + n - 1}{n} = \frac{y + z}{2nx} + \frac{n - 1}{n}.$$

a) Folosind inegalitatea (1) rezultă

$$\sum \sqrt[n]{\frac{a}{-a+b+c}} = \sum \sqrt[n]{\frac{y+z}{2x}} \leq \frac{1}{2n}\sum \frac{y+z}{x} + \frac{3n-3}{n} =$$
$$= \frac{1}{2n} \cdot \frac{x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+x^2z+xz^2+2xyz-2xyz}{xyz} + \frac{3n-3}{n} =$$
$$= \frac{1}{2n} \cdot \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz} - \frac{1}{n} + \frac{3n-3}{n} = \frac{3n-4}{n} + \frac{2R}{nr}.$$

b) Procedând ca mai sus, avem:

$$\sum a \cdot \sqrt[n]{\frac{a}{-a+b+c}} = \sum (y+z) \cdot \sqrt[n]{\frac{y+z}{2x}} \leq \frac{1}{2n}\sum \frac{(y+z)^2}{x} + \frac{n-1}{n}\sum (y+z),$$

şi rămâne de arătat că

$$\frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(y+z)^2}{x} + \frac{(z+x)^2}{y} + 4(x+y+z) \leq \frac{(x+y+z)(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz},$$

care este o identitate.

L281. *Cu notaţiile uzuale în triunghi, demonstraţi că*

$$\min\left\{\frac{m_am_b}{h_ah_b}, \frac{m_bm_c}{h_bh_c}, \frac{m_cm_a}{h_ch_a}\right\} \leq \frac{R}{2r} \leq \max\left\{\frac{m_am_b}{h_ah_b}, \frac{m_bm_c}{h_bh_c}, \frac{m_cm_a}{h_ch_a}\right\}.$$

Vasile Jiglău, Arad

Soluţie. Soluţie (**Marius Olteanu**, Rm. Vâlcea). Fără a retsrânge generalitatea, vom presupune că $a \geq b \geq c$. Arătăm că $\min A = \dfrac{m_cm_a}{h_ch_a}$, unde $A = \left\{\dfrac{m_am_b}{h_ah_b}, \dfrac{m_bm_c}{h_bh_c}, \dfrac{m_cm_a}{h_ch_a}\right\}$. Într-adevăr, avem:

$$\frac{m_bm_c}{h_bh_c} \geq \frac{m_cm_a}{h_ch_a} \Leftrightarrow m_bh_a \geq m_ah_b \Leftrightarrow m_b \cdot \frac{2S}{a} \geq m_a \cdot \frac{2S}{b}$$
$$\Leftrightarrow b^2m_b^2 \geq a^2m_a^2 \Leftrightarrow b^2[2(a^2+c^2)-b^2] \geq a^2[2(b^2+c^2)-a^2] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (b^2-a^2)(2c^2-a^2-b^2) \geq 0,$$

iar ultima inegalitate este, evident, adevărată. Analog se arată că $\dfrac{m_am_b}{h_ah_b} \geq \dfrac{m_cm_a}{h_ch_a}$. În aceste condiţii, prima inegalitate din problemă devine:

$$\frac{R}{2r} \geq \frac{m_cm_a}{h_ch_a} \Leftrightarrow \frac{pabc}{8S^2} \geq \frac{m_am_cac}{4S^2} \Leftrightarrow 4m_am_c \leq 2bp.$$

Fie A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor triunghiului ABC; aplicând inegalitatea lui Ptolemeu în patrulaterul $AC_1A_1B_1$, obţinem că $AA_1 \cdot CC_1 \leq AC_1 \cdot A_1C + A_1C_1 \cdot AC \Leftrightarrow m_am_c \leq \dfrac{b}{2} \cdot b + \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{c}{2} \Leftrightarrow 4m_am_c \leq 2b^2 + ac$. Rămâne să demonstrăm că $2b^2 + ac \leq 2bp$; după calcule, această inegalitate revine la $(b-a)(b-c) \leq 0$, fapt adevărat.

Pentru cea de-a doua inegalitate, observăm întâi că $\max A = \dfrac{m_a m_b}{h_a h_b}$, dacă $2b^2 \geq a^2 + c^2$ şi $\max A = \dfrac{m_b m_c}{h_b m_c}$, dacă $2b^2 \leq a^2 + c^2$. Ne vom plasa în primul caz ($2b^2 \geq a^2 + c^2$), calculele fiind similare pentru cel de-al doilea. Trebuie deci să dovedim că

$$\begin{aligned}
&\frac{m_a m_b}{h_a h_b} \geq \frac{R}{2r} \Leftrightarrow \frac{m_a m_b ab}{4S^2} \geq \frac{pabc}{8S^2} \Leftrightarrow \\
&\qquad \Leftrightarrow 4m_a m_b \geq p \cdot c \Leftrightarrow 16m_a^2 m_b^2 \geq c^2(a+b+c)^2 \Leftrightarrow \\
&\qquad \Leftrightarrow [2(b^2+c^2) - a^2][2(a^2+c^2) - b^2] \geq c^2(a+b+c)^2 \Leftrightarrow \\
&\qquad \Leftrightarrow (ab - c^2)^2 + (ac - c^2)^2 + (bc - c^2)^2 - 2(a^2 - b^2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \\
&\qquad \Leftrightarrow (xy - 1)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 - 2(x^2 - y^2) \geq 0,
\end{aligned}$$

unde $x = \dfrac{a}{c}$, $y = \dfrac{b}{c}$ verifică $x \geq y \geq 1$ şi $2y^2 \geq x^2 + 1$, altfel spus $x \geq y \geq \sqrt{\dfrac{x^2+1}{2}} \geq 1$. Ultima inegalitate revine la

$$-2y^4 + y^2(5x^2+1) - y(2x+2) + (3 - 2x + x^2 - 2x^4) \geq 0.$$

Fixăm variabila x şi considerăm funcţia $f : \left[\sqrt{\dfrac{a^2+1}{2}}, a\right] \to \mathbb{R}$, $f(y) = -2y^2 + y^2(5a^2+1) - 2y(a+1) + (3 - 2a + a^2 - 2a^4)$, unde $a \geq 1$. Avem: $f'(y) = 2[(a-y)(4y(a+y)-1) + (a^2y - 1)] \geq 0$ (deoarece $a, y \geq 1$), deci f este strict crescătoare pe domeniul său de definiţie; rezultă că $f(y) \geq f\left(\sqrt{\dfrac{a^2+1}{2}}\right) = 3a^2 - 2a + 3 - \sqrt{2}(a+1)\sqrt{a^2+1}$. Ar rămâne să mai arătăm că ultima cantitate este nenegativă, fapt care revine, după calcule, la $(a-1)^2(7a^2 + 7 - 2a) \geq 0$, evident adevărat. Cu aceasta, soluţia problemei este încheiată.

L282. *Să se arate că, pentru orice $x, y, z > 0$, are loc inegalitatea*

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} + \sqrt[3]{\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}} \geq 2.$$

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

Soluţia 1 (Gheorghe Iurea, Iaşi**).** Notăm $a = y+z$, $b = z+x$, $c = x+y$; Rezultă că a, b, c sunt laturile unui triunghi ABC. Folosind notaţiile obişnuite, deducem că $x = p - a$, $y = p - b$, $z = p - c$. Inegalitatea din enunţ revine la

$$\frac{p-a}{a} + \frac{p-b}{b} + \frac{p-c}{c} + \sqrt[3]{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}} \geq 2.$$

Cu ajutorul relaţiilor $rp = S$, $abc = 4RS$ şi $ab + bc + ca = r^2 + p^2 + 4Rr$, după calcule, inegalitatea devine:

$$\frac{r^2 + p^2 + 4Rr}{4Rr} + \sqrt[3]{\frac{r}{4R}} \geq 5 \Leftrightarrow \frac{r^2+p^2}{4Rr} + \sqrt[3]{\frac{r}{4R}} \geq 4.$$

Folosind inegalitatea lui Blundon:

$$p^2 \geq 2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R-2r)\sqrt{R(r-2r)},$$

este suficient să demonstrăm că

$$\frac{2R^2 + 10Rr - 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}}{4Rr} + \sqrt[3]{\frac{3}{4R}} \geq 4.$$

Cu notaţia $\frac{R}{2r} = x \geq 1$, aceasta se scrie $x + \dfrac{5}{2} - (x-1)\sqrt{1 - \dfrac{1}{x}} + \dfrac{1}{2\sqrt[3]{x}} \geq 4$. Notăm $\sqrt[3]{x} = t \geq 1$ şi avem de demonstrat că $t^3 - (t^3-1)\sqrt{1 - \dfrac{1}{t^3}} + \dfrac{1}{2t} \geq \dfrac{3}{2}$, $t \geq 1 \Leftrightarrow$ $2t^4 - 3t + 1 - 2(t^3-1)\sqrt{\dfrac{t^3-1}{t}} \geq 0 \Leftrightarrow (t-1)(2t^3+2t^2+2t-1-2(t^2+t+1)\sqrt{\dfrac{t^3-1}{t}}) \geq 0$. Cum $t \geq 1$, este suficient să arătăm că $2t^3 + 2t^2 + 2t - 2(t^2+t+1)\sqrt{\dfrac{t^3-1}{t}} \geq 1 \Leftrightarrow$ $2(t^2+t+1)\left(t - \sqrt{\dfrac{t^3-1}{t}}\right) \geq 1 \Leftrightarrow 2(t^2+t+1)\left(t^2 - \dfrac{t^3-1}{t}\right) \geq t + \sqrt{\dfrac{t^3-1}{t}} \Leftrightarrow$ $2(t^2+t+1) \geq t^2 + t\sqrt{\dfrac{t^3-1}{t}} \Leftrightarrow t^2 + 2t + 2 \geq t\sqrt{\dfrac{t^3-1}{t}}$, evident adevărat, deoarece $\sqrt{\dfrac{t^3-1}{t}} < t$ pentru $t > 1$.

Egalitatea se atinge când $t = 1$, deci când $R = 2r$, adică pentru $\triangle ABC$ echilateral. Acest lucru se petrece dacă $a = b = c$, aşadar pentru $x = y = z$.

Soluţia 2 (a autorului). Notând $a = \dfrac{x}{y+z}$, $b = \dfrac{y}{z+x}$ şi $c = \dfrac{z}{x+y}$, observăm că $\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{b+1} + \dfrac{1}{c+1} = \dfrac{y+z}{x+y+z} + \dfrac{z+x}{x+y+z} + \dfrac{x+y}{x+y+z} = 2$. După calcule, această egalitate conduce la $2abc + ab + bc + ca = 1$. Din inegalitatea mediilor, obţinem că

$$\frac{1}{4} = \frac{2abc + ab + bc + ca}{4} \geq \sqrt[4]{2abc \cdot ab \cdot bc \cdot ca} = \sqrt[4]{2(abc)^3},$$

de unde $abc \leq \dfrac{1}{8}$. Apoi, din inegalitatea lui Bergström,

$$2 = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \geq \frac{9}{a+b+c+3} \Rightarrow a + b + c \geq \frac{3}{2}.$$

Aplicăm din nou inegalitatea lui Bergström:

$$2 = \sum \frac{1}{a+1} = \sum \frac{(b+c)^2}{(a+1)(b+c)^2} \geq \frac{4(\sum a)^2}{\sum (a+1)(b+c)^2}.$$

După calcule, ţinând seama de egalităţile $(\sum a) \cdot (\sum ab) = \sum ab^2 + \sum a^2 b + 3abc$ şi $\sum ab = 1 - 2abc$, inegalitatea precedentă revine la $a + b + c \geq \dfrac{2 - 7abc}{1 - 2abc}$. Pentru a obţine concluzia, ar fi suficient să arătăm că

$$\frac{2-7abc}{1-2abc}+\sqrt[3]{abc}\geq 2 \Leftrightarrow \frac{2-7t^3}{1-2t^3}+t\geq 2,$$

unde $t=\sqrt[3]{abc}\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$. Această inegalitate este echivalentă cu $t(1-2t)(t+1)^2\geq 0$, $t\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$, care este, evident, adevărată. Egalitatea se atinge pentru $t=\frac{1}{2}$, deci pentru $x=y=z$, fapt care se întâmplă când $a=b=c$.

Soluţia 3 (**Titu Zvonaru**, Comăneşti)**.** Folosim metoda SOS. Avem:

$$\frac{1}{8}-\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}=\sum\frac{z(x-y)^2}{8(x+y)(y+z)(z+x)},$$

şi atunci

$$\frac{1}{2}-\sqrt[3]{\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}}=\frac{\frac{1}{8}-\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}t+t^2}=$$
$$=\sum\frac{z(x-y)^2}{2(x+y)(y+z)(z+x)(1+2t+4t^2)},$$

unde am notat $t=\sqrt[n]{\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}}$.

Deoarece $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}-\frac{3}{2}=\sum\frac{(x-y)^2}{2(x+z)(y+z)}$ inegalitatea de demonstrat se scrie

$$\sum\frac{(x-y)^2}{2(x+z)(y+z)}\geq\sum\frac{z(x-y)^2}{2(x+y)(y+z)(z+x)}(1+2t+4t^2)$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2S_z+(y-z)^2S_z+(z-x)^2S_y\geq 0,$$

unde $S_x=(y+z)(1+2t+4t^2)-x$, $S_y=(z+x)(1+2t+4t^2)-y$, $S_z=(x+y)(1+2t+4t^2)-z$.

Putem presupune că $x\geq y\geq z$. Rezultă că $S_y\geq 0$, $S_x+S_y\geq 0$ şi $S_y+S_z\geq 0$, deci inegalitatea dorită este adevărată.

Soluţia 4 (**Nicuşor Zlota**, Focşani). Cum $\prod(x+y)\geq\prod 2\sqrt{xy}$, rezultă că $\frac{xyz}{\prod(x+y)}\leq\frac{1}{8}$, de unde $\sqrt[3]{\frac{xyz}{\prod(x+y)}}\geq 4\frac{xyz}{\prod(x+y)}$; vom demonstra deci inegalitatea $\sum\frac{x}{y+z}+4\frac{xyz}{\prod(x+y)}\geq 2$. Notând $p=x+y+z$, $q=xy+yz+zx$, $r=xyz$, inegalitatea precedentă revine la $\frac{p^3-2pq+2r}{pq-r}+\frac{4r}{pq-r}\geq 2\Leftrightarrow p^3-4pq+9r\geq 0$, care este, de fapt, inegalitatea Schur de gradul 3.

Soluţia 5 (**Marius Olteanu**, Rm. Vâlcea)**.** Din inegalitatea mediilor, avem:

$$\sqrt[3]{(x+y)(x+z)(y+z)} \leq \frac{2(x+y+z)}{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(x+z)}} \geq \frac{3\sqrt[3]{xyz}}{2(x+y+z)}$$
$$\Rightarrow \sum \frac{x}{y+z} + \sqrt[3]{\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(x+z)}} \geq \sum \frac{x}{y+z} + \frac{3\sqrt[3]{xyz}}{2(x+y+z)}.$$

Dar $\sum \frac{x}{y+z} + \frac{3\sqrt[3]{xyz}}{2(x+y+z)} \geq 2$, conform problemei 8.3.7 din Pham Kim Hung - *Secrets in inequalities* - vol. I, GIL, Zalău, 2007 şi de aici rezultă cerinţa problemei.

Soluţia 6 (**Ioan Viorel Codreanu**, Satulung, Maramureş)**.** Vom demonstra o inegalitate ,,mai tare" decât cea dată. Arătăm că

$$\sum \frac{x}{y+z} \geq \sqrt{4 - \frac{14\prod x}{\prod(x+y)}}.$$

Notăm $a = \frac{x}{y+z}$, $b = \frac{y}{z+x}$, $c = \frac{z}{x+y}$. Ultima inegalitate se scrie

$$\sum a \geq \sqrt{4 - 14\prod a}.$$

Folosind identitatea $\sum xy(x+y) + 2\prod x = \prod(x+y)$, rezultă că $\sum ab + 2\prod a = 1$. Ridicând la pătrat, avem de demonstrat că

$$\sum a^2 + 2\sum ab \geq 4 - 14\prod a \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sum a^2 + 2\sum ab \geq 4(\sum ab + 2\prod a) - 14\prod a \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6\prod a \geq 2\sum ab - \sum a^2.$$

Din **inegalitatea Nesbitt** $\sum \frac{x}{y+z} \geq \frac{3}{2}$, obţinem că $\sum a \geq \frac{3}{2}$ şi atunci $6\prod a \geq \frac{9\prod a}{\sum a}$. Mai rămâne de demonstrat că $\frac{9\prod a}{\sum a} \geq 2\sum ab - \sum a^2$, care este o formă a inegalităţii Schur $\sum a^3 + 3\prod a \geq \sum ab(a+b)$. Pentru a demonstra afirmaţia din debutul soluţiei mai rămâne să arătăm că

$$\sqrt{4 - 14\prod a} + \sqrt[3]{\prod a} \geq 2,$$

care, după ridicare la pătrat şi reducerea termenilor, se scrie

$$14\prod a \leq 2\sqrt{4 - 14\prod a} \cdot \sqrt[3]{\prod a} + \sqrt[3]{(\prod a)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{\prod a}} + 2\sqrt{\frac{4}{\prod a} - 14} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{\prod a}} \geq 14,$$

care rezultă imediat, dacă ţinem seama de inegalitatea $\prod(x+y) \geq 8\prod x$, adică $\prod a \leq \frac{1}{8}$.

L283. *Arătaţi că* $\frac{1}{1-a^4b}+\frac{1}{1-b^4c}+\frac{1}{1-c^4d}+\frac{1}{1-d^4a} \geq \frac{1}{1-a^2bcd}+\frac{1}{1-ab^2cd}+\frac{1}{1-abc^2d}+\frac{1}{1-abcd^2}$, *oricare ar fi numerele reale* $a,b,c,d \in [0,1)$.

Marius Olteanu, Râmnicu Vâlcea

Soluţie. Pentru $x,y,z,t \geq 0$, are loc inegalitatea $x^4y+y^4z+z^4t+t^4x \geq xyzt(x+y+z+t)$. (A se vedea, de exemplu, problema 923, p. 133 din L. Panaitopol, M. Lascu, V. Băndilă - *Inegalităţi*, GIL, Zalău, 1996.) Înlocuim $x=a^i, y=b^i, z=c^i, t=d^i, i=\overline{1,n}$ şi, sumând, obţinem că

$$\sum\left(1+\sum_{i=1}^{n}(a^4b)^i\right) \geq \sum\left(1+\sum_{i=1}^{n}(a^2bcd)^i\right),\ \forall a,b,c,d \in [0,1),$$

unde sumarea se face ciclic după a,b,c,d. Trecem la limită după $n \to \infty$ şi, cum $1+\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} q^i = \frac{1}{1-q}$, $q \in [0,1)$, rezultă inegalitatea din enunţ. Se atinge egalitate când $a=b=c=d$.

Notă. În aceeaşi manieră a rezolvat problema d-l **Nicuşor Zlota**, Focşani.

L284. *Fie* a,b *numere reale pozitive. Arătaţi că sistemul de ecuaţii* $x^2+y^2=a^2+b^2$, $x^3+y^3=a^3+b^3$ *are şi alte soluţii reale decât soluţiile evidente* (a,b) *şi* (b,a). *Există asemenea soluţii cu ambele componente pozitive?*

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Fie $S=x+y$ şi $P=xy$, deci $S^2-2P=a^2+b^2$ şi $S^3-3SP=a^3+b^3$. Prin eliminarea lui P între aceste două ecuaţii obţinem pentru S:

(1) $$S^3-3S(a^2+b^2)+2(a^3+b^3)=0.$$

Împreună cu $P=\frac{1}{2}(S^2-(a^2+b^2))$, această ecuaţie formează un sistem echivalent cu cel din enunţ. Obţinem deci soluţii ale sistemului iniţial, de forma

$$(x,y)=\left(\frac{S\pm\sqrt{2(a^2+b^2)-S^2}}{2},\frac{S\mp\sqrt{2(a^2+b^2)-S^2}}{2}\right),$$

dacă S verifică (1). Se vede astfel că obţinem soluţii reale pentru acele valori ale lui S pentru care $S^2 \leq 2(a^2+b^2)$.

Ecuaţia (1) se mai scrie sub forma $(S-(a+b))(S^2+(a+b)S-2(a^2-ab+b^2))=0$. Soluţia $S=a+b$ conduce la $P=ab$ şi, apoi, la $\{x,y\}=\{a,b\}$. Celelalte două soluţii sunt $-\frac{1}{2}(a+b\pm\sqrt{9a^2-6ab+9b^2})$ şi se vede uşor că acestea sunt reale, distincte şi diferă de soluţia $a+b$. Rămâne să arătăm că aceste valori ale lui S verifică $S^2 \leq 2(a^2+b^2)$. Într-adevăr, pentru $S=-\frac{1}{2}(a+b-\sqrt{9a^2-6ab+9b^2})$, avem

$S^2 = \dfrac{1}{2}(5a^2 - 2ab + 5b^2 - (a+b)\sqrt{9a^2 - 6ab + 9b^2})$, iar inegalitatea $S^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ revine, succesiv, la $a^2 - 2ab + b^2 \leq (a+b)\sqrt{9a^2 - 6ab + 9b^2} \Leftrightarrow a^4 + 2a^3b + 2ab^3 + b^4 \geq 0$, ceea ce este adevărat pentru a, b pozitive.

Remarcăm că, de fapt, avem chiar $S^2 < a^2 + b^2$, această inegalitate fiind echivalentă, după calcule ca cele de mai sus, cu $24a^3b + 24ab^3 > 16a^2b^2 \Leftrightarrow ab(3a^2 + 3b^2 - 2ab) > 0$, fapt adevărat. Această evaluare arată că $P < 0$, deci nu vom obţine soluţii cu ambele componente pozitive.

Notă. Soluţie similară am primit din partea d-lui **Titu Zvonaru**, Comăneşti.

L285. a) *Fie* $n \geq 2$ *un număr natural şi* p *cel mai mare divizor prim al lui* $n(n+1)$. *Fie* $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ *sumele simetrice fundamentale ale numerelor* $1, 2, \ldots, n$. *Să se arate că* $\sigma_1, \ldots, \sigma_{p-2}$ *se divid cu* p.

b) *Dacă* p *este un număr prim şi* $n \equiv -1$ *(mod* p^2*), atunci* $\sigma_1, \ldots, \sigma_{p-2}, \sigma_{p-1}$ *se divid cu* p.

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. a) Fie $S_k(n) = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$ pentru $k \geq 1$ număr natural; arătăm în primul rând, că $S_k(n)$ se divide cu p pentru orice $1 \leq k \leq p-2$. Folosim formulele cunoscute

$$\binom{k+1}{1}S_1(n) + \binom{k+2}{2}S_2(n) + \ldots + \binom{k+1}{k}S_k(n) = (n+1)^{k+1} - (n+1)$$

şi inducţia după $k \leq p-2$ pentru a dovedi acest lucru.

Într-adevăr, $S_1(n) = n(n+1)/2$ se divide cu p (p divide $n(n+1)$, care are cel puţin un divizor prim impar pentru $n \geq 2$; cu atât mai mult cel mai mare divizor prim al său este impar). Dacă am arătat că $S_1(n), \ldots, S_{k-1}(n)$ se divid toate cu p, folosind formula anterioară şi faptul că $(n+1)^{k+1} - (n+1) = (n+1)((n+1)^k - 1)$ se divide cu $n(n+1)$ (deci cu p), obţinem că se divide cu p şi $(k+1)S_k(n)$. Pentru $k \leq p-2$ avem $k+1 \leq p-1$, deci $k+1$ este prim cu p şi concluzia $p|S_k(n)$ rezultă.

Pentru a rezolva problema mai folosim formulele lui Newton:

$$S_k(n) - \sigma_1 S_{k-1}(n) + \sigma_2 S_{k-2}(n) - \ldots + (-1)^{k-1}\sigma_{k-1}S_1(n) + (-1)^k k\sigma_k = 0,$$

valabile pentru $1 \leq k \leq n$ şi o inducţie de acelaşi tip ca să deducem $p|\sigma_k$ pentru $1 \leq k \leq p-2$, ceea ce trebuie demonstrat.

b) Să observăm că inducţia făcută nu ne permite să deducem şi că p divide pe $S_{p-1}(n)$, dar dacă acest lucru ar fi adevărat, a doua inducţie ar putea fi şi ea împinsă cu un pas mai departe, pentru a deduce şi $p|\sigma_{p-1}$.

Este exact ce se întâmplă atunci când $n = sp^2 - 1$. Evident avem îndeplinite condiţiile de la punctul a) (adică σ_k se divide cu p pentru $k \leq p-2$) şi, în plus, spunem noi, în acest caz avem şi că $S_{p-1}(n)$ se divide cu p (deci şi σ_{p-1} se divide cu p). Astfel, ne mai rămâne doar să arătăm că p divide pe $S_{p-1}(n)$.

Asta are loc deoarece $S_{p-1}(n) \equiv n - [n/p] \pmod{p}$ (conform teoremei lui Fermat), iar, pentru n de forma $sp^2 - 1$, avem

$$n - [n/p] = sp^2 - 1 - (sp - 1) = sp(p-1) \equiv 0 \pmod{p},$$

ceea ce încheie demonstraţia.