PROBLEME ŞI SOLUŢII

Soluţiile problemelor propuse în nr. 1/2015

Clasele primare

P311. *Scrie în casete toate numerele de la* 10 *la* 19*, o singură dată fiecare, astfel încât să obţii rezultatul dat:* $\square + \square = \square + \square = \square + \square = \square + \square = \square + \square = 29$.

(*Clasa I*) **Ana Stoica, elevă, Iaşi**

Soluţie. $10 + 19 = 11 + 18 = 12 + 17 = 13 + 16 = 14 + 15 = 29$.

P312. *Scrie numerele de la* 0 *la* 9 *în grupe de câte patru astfel încât, în fiecare grupă, numerele scrise să fie în ordine descrescătoare şi vecine.*

(*Clasa I*) **Daniela Mititelu, elevă, Iaşi**

Soluţie. $9876, 8765, 7654, 6543, 5432, 4231, 3210$.

P313. *Fratele meu este cu* 3 *ani mai mic decât mine, iar eu am* 8 *ani. Care va fi suma vârstelor noastre peste* 2 *ani?*

(*Clasa I*) **Denisa Apetrei, elevă, Iaşi**

Soluţie. Peste doi ani suma vârstelor va fi 10 ani + 7 ani = 17 ani.

P314. *Două numere îndeplinesc condiţiile: a) suma lor este* 81 *şi b) dacă din primul număr se scade* 9*, rezultatul va fi dublul celui de-al doilea. Aflaţi numerele.*

(*Clasa a II-a*) **Maria Racu, Iaşi**

Soluţie. $a + b = 81$, $a = 9 + 2b \Rightarrow 2b + 9 + b = 81 \Rightarrow 3b + 9 = 81 \Rightarrow 3b = 72 \Rightarrow b = 24, a = 57$.

P315. *Un număr de două cifre se numeşte ordinar dacă are suma cifrelor mai mare decât suma cifrelor vecinului său mai mic. Scrieţi toate numerele ordinare care au suma cifrelor* 8.

(*Clasa a II-a*) **Georgiana Avădanei, elevă, Iaşi**

Soluţie. Numerele de două cifre care au suma cifrelor 8 sunt: $17, 26, 35, 44, 53, 62, 71, 80$. Numărul 80 nu este ordinar deoarece $7 + 9 = 16, 8 + 0 = 8$, $16 > 8$. Celelalte şapte numere sunt ordinare.

P316. *Completaţi un pătrat* 4×4 *cu numerele* $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ *astfel încât ele să fie scrise crescător şi consecutiv pe fiecare linie şi fiecare coloană. De câte ori apare numărul* 5*?*

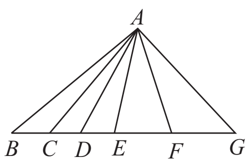
(*Clasa a II-a*) **Bianca Gimiga, elevă, Iaşi**

2	3	4	5
3	4	5	6
4	5	6	7
5	6	7	8

Soluţie. Singura completare posibilă este cea din figura alăturată. Numărul 5 apare de patru ori.

P317. *Câte triunghiuri sunt în figura alăturată?*

(*Clasa a III-a*) **Ecaterina Brînzac, elevă, Iaşi**



Soluţie. Sunt atâtea triunghiuri câte segmente distincte se pot forma cu punctele B, C, D, E, F, G, adică $5+4+3+2+1 = 15$.

P318. *Găsiţi numerele naturale* $\overline{ab}$ *astfel încât* $\overline{ab} = b + b \times b + b \times b \times b$.

(*Clasa a III-a*) **Nicolae Ivăşchescu, Craiova**

Soluţie. Dacă $b \geq 5$, suma din dreapta este un număr de trei cifre. Verificând celelalte valori posibile, obţinem singura soluţie $b = 4$, $a = 8$: $84 = 4+4\times4+4\times4\times4$.

P319. *Să se arate că niciun număr din şirul* $5, 10, 15, 20, \ldots, 100$ *nu poate avea suma cifrelor egală cu* 15.

(*Clasa a III-a*) **Alexandra Mădălina Ciobanu, elevă, Iaşi**

Soluţie. Un număr din acest şir poate avea ultima cifră 0 sau 5. Suma cifrelor este maximă dacă cifra unităţilor este 5, iar cifra zecilor este 9. Concluzionăm că suma poate fi maximum 14.

P320. *Putem găsi şase numere consecutive de forma* $7 \times n$ *a căror sumă să fie un număr par?* (*Exemplu:* $14, 21, 28$ *sunt numere consecutive de forma* $7 \times n$.)

(*Clasa a III-a*) **Cristina Chelaru, elevă, Iaşi**

Soluţie. Fie $7 \cdot a$, $7 \cdot (a+1)$, $7 \cdot (a+2)$, $7 \cdot (a+3)$, $7 \cdot (a+4)$, $7 \cdot (a+5)$ cele şase numere consecutive de forma $7 \cdot n$. Printre numerele $a, a+1, a+2, a+3, a+4, a+5$, trei numere sunt impare. Deoarece numărul 7 este impar, atunci trei dintre numerele considerate vor fi pare, iar celelalte trei vor fi impare. Rezultă că suma celor şase numere este de fiecare dată un număr impar.

P321. *Mama şi cei cinci copii ai săi au împreună* 86 *ani. Vârstele copiilor sunt numere pare consecutive. La naşterea celui mai mic copil, mama avea triplul vârstei celui de-al treilea copil. Aflaţi vârstele celor şase.*

(*Clasa a IV-a*) **Nicolae Vieru, Iaşi**

Soluţie. Vârstele copiilor în ordine descrescătoare sunt: $a+8$, $a+6$, $a+4$, $a+2$, a. În prezent mama are vârsta $3 \cdot (a+4) + a = 4a + 12$. Înseamnă că $9a + 32 = 86$, de unde rezultă $a = 6$ (ani). Vârstele copiilor sunt: 6 ani, 8 ani, 10 ani, 12 ani şi 14 ani. Mama are $4 \cdot 6 + 12 = 36$ (ani).

P322. *Numerele naturale* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *au proprietatea că fiecare dintre ele, începând cu al doilea, este jumătatea sumei tuturor numerelor scrise înaintea lui. Aflaţi* n *ştiind că* $x_n = 9$.

(*Clasa a IV-a*) **Doina Ivaşcu, elevă, Iaşi**

Soluţie.

$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} = 2 \cdot 9 = 18$

$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-2} = 18 : 3 \times 2 = 12$

$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-3} = 12 : 3 \times 2 = 8$

Deoarece 8 nu se împarte exact la 3, înseamnă că $x_1 = 8, x_2 = 4, x_3 = 6, x_4 = 9$ şi $n = 4$.

P323. *Daţi un exemplu de* 39 *numere pare, consecutive, mai mari ca* 39 *şi a căror sumă se împarte exact la* 4.

(*Clasa a IV-a*) **Andreea Munteanu, elevă, Iaşi**

Soluţie. Fiecare din cele 39 numere se împarte exact la 2. Este necesar ca suma câturilor să se împartă exact la 2. Acest lucru este posibil dacă 20 câturi sunt impare şi 19 câturi sunt pare. Rezultă că primul şi ultimul cât trebuie să fie impare.

Exemplu de astfel de numere: $42, 44, 46, \ldots, 118$.

P324. *Un dreptunghi format din pătrăţele având latura de* 1 *cm are perimetrul de* 20 *cm. Se completează pătrăţelele dreptunghiului respecând regulile următoare:*

1) *după ce se completează prima linie se trece la completarea liniei a doua ş.a.m.d;* 2) 1 *se scrie o singură dată,* 2 *de două ori,* $\ldots, n$ *se scrie de* n *ori. Să se afle* n*, ştiind că procedând în acest fel toate pătrăţelele au fost completate.*

(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

Soluţie. Dreptunghiul are $1+2+3+\ldots+n = n(n+1):2$ pătrăţele. Pe de altă parte, numărul pătrăţelelor este $L\cdot l$. Înseamnă că $n\cdot(n+1) = 2\cdot L\cdot l$. Deoarece $2\cdot L\cdot l$ este produsul a două numere consecutive şi $L+l=10$, iar $2\cdot 7\cdot 3 = 6\cdot 7$, urmează că $n=6$. Alte soluţii nu mai sunt.

Clasa a V-a

V.186. *Determinaţi ultimele două cifre ale numărului* $A = 7+7^2+7^3+\ldots+7^{2015}$.

Iulian Oleniuc, elev, Iaşi

Soluţie. Observăm că $1+7+7^2+7^3=400$. Atunci $A = 7+7^2+7^3+(1+7+7^2+7^3)\cdot(7^4+7^8+\ldots+7^{2012}) = 399+M_{100}$, deci utlimele două cifre ale numărului A sunt 99.

V.187. *Stabiliţi în câte zerouri se termină scrierea zecimală a produsului* $A = 1016^2\cdot 1017^2\cdot\ldots\cdot 2015^2$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Soluţie. Observăm că $A=B^2$, unde $B = 1016\cdot 1017\cdot\ldots\cdot 2015$. Produsul B conţine 200 de factori care se divid cu 5. Dintre acestea, 40 se divid cu 25, 8 se divid chiar cu 125 şi 2 se divid cu 625. Prin urmare, exponentul lui 5 în descompunerea în factori primi a lui B este $200+40+8+2=250$. Factorul 2 apare la un exponent mai mare, prin urmare B se termină în 250 de zerouri. Rezultă că scrierea zecimală a lui A se termină în 500 zerouri.

V.188. *Arătaţi că* $\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2014}{2015}\right)^2 > \frac{1}{2015}$.

Viorica Momiţă, Iaşi

Soluţie. Cum $\frac{2}{3}>\frac{1}{2}, \frac{4}{5}>\frac{3}{4}, \ldots, \frac{2014}{2015}>\frac{2013}{2014}$, rezultă că $\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2014}{2015}\right)^2$ $> \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2013}{2014}\cdot\frac{2014}{2015} = \frac{1}{2015}$.

V.189. *Demonstraţi că nu există numere naturale nenule* m, n *şi* k *pentru care* $4^{2m}+9^{2n+1} = k^2+k+1$.

Ionuţ Ivănescu, Craiova

Soluţie. Cum $U(4^{2m})=6$ şi $U(9^{2n+1})=9$, rezultă că $U(4^{2m}+9^{2n+1})=5$, deci numărul $4^{2m}+9^{2m+1}$ se divide cu 5. Pe de altă parte, avem:

restul împărţirii lui k la 5	0	1	2	3	4
restul împărţirii lui k^2 la 5	0	1	4	4	1
restul împărţirii lui k^2+k+1 la 5	1	3	2	3	1

Rezultă că numărul k^2+k+1 nu poate fi divizibil cu 5 şi, de aici, concluzia problemei.

V.190. *Arătaţi că există o infinitate de perechi* $(n, n+1)$*, cu* $n\in\mathbb{N}$*, astfel încât atât* n*, cât şi* $n+1$ *se pot scrie ca sumă de trei pătrate perfecte nenule.*

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

Soluţie. Dacă $n = 26k^2$, $k \in \mathbb{N}$, atunci $n = k^2 + (4k)^2 + (3k)^2$, iar $n + 1 = 1^2 + k^2 + (5k)^2$.

V.191. *Demonstraţi că orice număr natural mai mare ca* 5 *se poate scrie ca suma dintre un număr prim şi un număr compus.*

Mariana-Liliana Popescu, Suceava

Soluţie. Dacă n este număr par, atunci $n = 2 + 2\left(\frac{n}{2} - 1\right)$, cu $\frac{n}{2} - 1 \geq 2$. Dacă $n = 6k + 1$, $k \geq 1$, atunci $n = 3 + 2(3k - 1)$, cu $3k - 1 \geq 2$. Dacă $n = 6k + 3$, $k \geq 1$, putem considera pentru n chiar această scriere. În sfârşit, dacă $n = 6k + 5$, $k \geq 1$, avem că $n = 2 + 3(2k + 1)$, cu $2k + 1 \geq 3$.

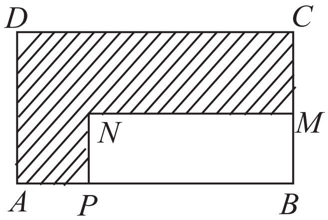
V.192. *Determinaţi valorile numărului natural a pentru care există numere naturale distincte x şi y astfel încât $3x + 7y = 10a$.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Pentru $a \geq 7$ există $x = a-7$ şi $y = a+3$ astfel încât $3(a-7)+7(a+3) = 10a$. Cum $3 \cdot 10 + 7 \cdot 0 = 3 \cdot 10$, $3 \cdot 11 + 7 \cdot 1 = 4 \cdot 10$, $3 \cdot 12 + 7 \cdot 2 = 5 \cdot 10$ şi $3 \cdot 13 + 7 \cdot 3 = 6 \cdot 10$, valorile $a \in \{3, 4, 5, 6\}$ sunt, de asemenea, soluţii ale problemei. Se observă că numerele $a \in \{0, 1, 2\}$ nu convin. În concluzie, $a \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$.

Clasa a VI-a

VI.186. *O grădină are forma dreptunghiului $ABCD$ ($AB > CD$) şi este împărţită în două parcele: dreptunghiul $MNPB$ şi ,,colţul" haşurat. Se ştie că $AP = CM$, iar partea haşurată are aria de două ori mai mare şi perimetrul cu* 40 *mai mare decât aria, respectiv perimetrul dreptunghiului $MNPB$. Aflaţi lungimile segmentelor AB şi CD ştiind că se exprimă, în metri, prin numere naturale.*



Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Notăm $AP = CM = x$, $BP = a$ şi $BM = b$. Din $\mathcal{P}_{APNMCD} = \mathcal{P}_{MNPB} + 40$ obţinem că $x = 10(m)$ şi, de aici, rezultă că $a, b \in \mathbb{N}$. Din $\mathcal{A}_{ABCD} = 3 \cdot \mathcal{A}_{MNPB}$ deducem că $(a + 10)(b + 10) = 3ab$, de unde $(a - 5)(b - 5) = 75$. Cum $a > b$, putem avea $(a, b) \in \{(80, 6); (30, 8); (20, 10)\}$. În concluzie, $(AB, CD) \in \{(90, 16); (40, 18); (30, 20)\}$.

VI.187. *Determinaţi restul împărţirii numărului $N = 2015^4 \cdot 4^{2015}$ prin* 9.

Viorica Dogaru, Giurgiu

Soluţie. Avem: $2015^4 = (M_9 - 1)^4 = M_9 + (-1)^4 = M_9 + 1$; $4^{2015} = (4^3)^{671} \cdot 4^2 = (M_9 + 1)^{671} \cdot 16 = (M_9 + 1) \cdot 16 = M_9 + 7$, deci $N = (M_9 + 1)(M_9 + 7) = M_9 + 7$.

VI.188. *Fie p un numar natural cu proprietatea că, oricare ar fi numerele $a, b \in \{1, 2, \ldots, p - 1\}$, produsul ab nu este divizibil cu p. Arătaţi că p este număr prim.*

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. Evident, $p = 1$ nu verifică ipoteza problemei. Fie $p \geq 2$ ca în enunţ şi să presupunem că p nu ar fi număr prim. Atunci p va avea o pereche de divizori proprii (nu neapărat distincţi) de forma $\left(d, \frac{p}{d}\right)$, cu $d \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$. Ar rezulta că produsul $d \cdot \dfrac{p}{d} = p$ nu se divide cu p, contradicţie. Astfel, rămâne adevărată concluzia problemei.

VI.189. *Determinaţi numerele prime p şi q pentru care $p^2 + q = 201q^2 + p$.*

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Dacă $p = 2$ avem $201q^2 - q - 2 = 0$ şi nu obţinem soluţii, iar dacă $q = 2$ avem $p^2 - p - 802 = 0$ şi, de asemenea, nu avem soluţii. Rezultă că p şi q sunt impare.

Relaţia dată se poate scrie sub forma $p^2 - q^2 - (p - q) = 200q^2$, deci $(p - q)(p + q - 1) = 200q^2$. Cum $p - q$ nu se divide cu q, atunci $p = kq + 1$ şi rezultă că $(p - q)(k + 1) = 200q$. Cu acelaşi argument, $k = tq - 1$ şi atunci $p = tq^2 - q + 1$ şi $(tq^2 - 2q + 1)t = 200$. Dacă t ar fi par, atunci $p = tq^2 - q + 1$ ar fi par, contradicţie. Rămâne că $t \in \{1, 5, 25\}$. Prin verificare directă, convine doar varianta $t = 5$, când $p = 43$ şi $q = 3$.

VI.190. *Considerăm a, b, c şi d cifre nenule în baza 10 (la litere diferite corespund cifre diferite) astfel încât numărul $N = \overline{abc}_{(d)} - \overline{cba}_{(d)}$ este multiplu de 63. Stabiliţi câte astfel de 4-uple (a, b, c, d) există.*

Neculai Stanciu, Buzău

Soluţie. Se impun condiţiile $d > a$, $d > b$, $d > c$ (pentru că a, b, c sunt cifre în baza d) şi $a > c$ (pentru a putea fi efectuată scăderea). Avem: $N = (ad^2 + bd + c) - (cd^2 + bd + a) = d^2(a - c) - (a - c) = (a - c)(d - 1)(d + 1)$. Cum $N \vdots 7$, avem variantele:

(i) $a - c = 7$; atunci $(a, c) = (8, 1)$, deci $d = 9$ şi $N = 7 \cdot 8 \cdot 10$ nu se divide cu 63.

(ii) $d - 1 = 7$; atunci $d = 8$, deci $N = 63 \cdot (a - c) \vdots 63$. Perechea (a, c) poate fi aleasă în $\dfrac{7 \cdot 6}{2} = 21$ moduri (pentru că $a, c \in \{1, 2, \ldots, 7\}$ şi $a > c$) şi, în fiecare caz, valoarea lui b poate fi aleasă în câte 5 moduri. Rezultă $21 \cdot 5 = 105$ soluţii.

(iii) $d + 1 = 7$; atunci $d = 6$, deci $N = 35(a - c)$. Cum $a, c \leq 5$, nu este posibil ca $a - c$ să se dividă cu 9, deci nu avem soluţii în acest caz.

În conlcuzie, există 105 4-uple cu proprietăţile dorite.

VI.191. *Fie n un număr natural nenul. Determinaţi numărul soluţiilor întregi $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ale ecuaţiei $x_1 \cdot x_2^2 \cdot \ldots \cdot x_n^n + 1 = 0$.*

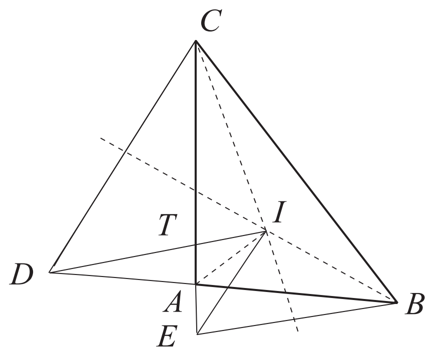
Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Dacă $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ este soluţie a ecuaţiei din enunţ, atunci $a_i \in \{-1, 1\}$, $\forall i = \overline{1, n}$. Pentru $n = 2k$, egalitatea $a_1 \cdot a_2^2 \cdot \ldots \cdot a_{2k}^{2k} + 1 = 0$ este echivalentă cu $a_1 a_3 \cdot \ldots \cdot a_{2k-1} + 1 = 0$. Putem elege $a_1, a_3, \ldots, a_{2k-3}$ în mod arbitrar, iar a_{2k-1} va fi bine determinat prin $a_{2k-1} = -a_1 a_3 \ldots a_{2k-3}$. Cum $a_2, a_4, \ldots, a_{2k}$ pot fi arbitrar alese din mulţimea $\{-1, 1\}$, rezultă că ecuaţia dată are $2^{2k-1} = 2^{n-1}$ soluţii. Dacă $n = 2k + 1$, procedând analog, găsim tot 2^{n-1} soluţii ale ecuaţii din enunţ.

VI.192. *Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Notăm cu D simetricul lui C faţă de dreapta BI şi cu E simetricul lui B faţă de dreapta CI. Demonstraţi că $ID \| BE$ dacă şi numai dacă $IE \| CD$.*

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Fie $m(\widehat{B}) = 2b$, $m(\widehat{C}) = 2c$. Din motive de simetrie, deducem uşor că punctul D aparţine dreptei AB, iar punctul E aparţine dreptei AC; notăm $\{T\} = AC \cap DI$. Deoarece $\triangle BCD$ este isoscel ($BC = BD$) şi BI, CI sunt bisectoarele unghiurilor $\widehat{B}$, respectiv $\widehat{C}$, avem că $m(\widehat{BCD}) = 90° - b$, $m(\widehat{ICD}) = m(\widehat{IDC}) = 90° - b - c$, $m(\widehat{TCD}) = 90° - b - 2c$ şi, analog, $m(\widehat{BEC}) = 90° - c$. Cum $\widehat{ITC}$ este unghi exterior $\triangle TCD$, rezultă că $m(\widehat{ITC}) = m(\widehat{IDC}) + m(\widehat{TCD}) = 90° - b - c + 90° - b - 2c = 180° - 2b - 3c$. Astfel, avem $ID \| BE \Longleftrightarrow \widehat{ITC} \equiv \widehat{BEC} \Leftrightarrow 180° - 2b - 3c = 90° - c \Leftrightarrow b + c = 45°$. Analog se arată că $IE \| CD \Leftrightarrow b + c = 45°$, de unde concluzia problemei.



Clasa a VII-a

VII.186. *Dacă n este număr natural nenul, arătaţi că numerele $2\underbrace{00\ldots0}_{n}\underbrace{99\ldots9}_{n}$ şi $2\underbrace{00\ldots0}_{n+1}\underbrace{99\ldots9}_{n}$ sunt compuse.*

Titu Zvonaru, Comăneşti

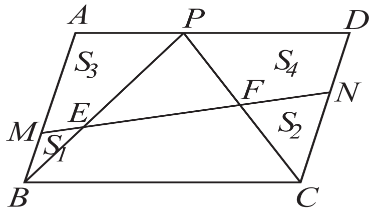
Soluţie. Avem: $2\underbrace{00\ldots0}_{n}\underbrace{99\ldots9}_{n} = 2\cdot 10^{2n} + 10^n - 1 = (2\cdot 10^n - 1)(10^n + 1)$ şi $2\underbrace{00\ldots0}_{n+1}\underbrace{99\ldots9}_{n} = 2\cdot 10^{2n+1} + 10^n - 1 = 20\cdot 10^{2n} + 10^n - 1 = (4\cdot 10^n + 1)(5\cdot 10^n - 1)$, ceea ce arată că numerele din enunţ sunt compuse.

VII.187. *Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, arătaţi că $a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 \geq 12abc$.*

Romeo Cernat, Iaşi

Soluţie. Este imediată inegalitatea $\dfrac{(a+b)^2}{ab} \geq 4$. Scriem încă două inegalităţi similare şi, prin adunarea lor, obţinem o relaţie echivalentă cu cea din enunţ.

VII.188. *Pe laturile AB, CD şi AD ale paralelogramului $ABCD$ se consideră punctele M, N, respectiv P şi fie $\{E\} = BP \cap MN$, $\{F\} = CP \cap MN$. Notăm cu S, S_1, S_2, S_3 şi S_4 ariile suprafeţelor $ABCD, BME, CNF, AMEP$, respectiv $DNFP$. Demonstraţi că $S \geq 4(\sqrt{S_1S_2} + \sqrt{S_3S_4})$.*



Mihai Haivas, Iaşi

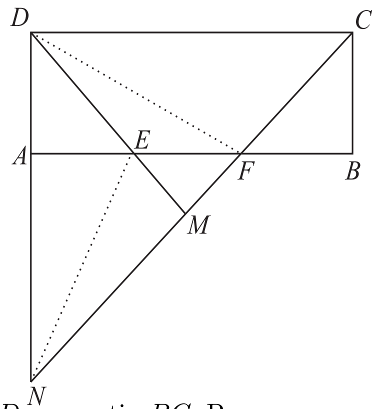
Soluţie. Cum $\mathcal{A}_{PBC} = \dfrac{1}{2}\mathcal{A}_{ABCD}$, înseamnă că $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \dfrac{1}{4}S$. Atunci $S = 2(S_1 + S_2 + S_3 + S_4) \geq 4(\sqrt{S_1S_2} + \sqrt{S_3S_4})$, conform inegalităţii mediilor $MA \geq MG$.

VII.189. *Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $AB = 3BC$ şi punctele $E, F \in (AB)$ astfel încât $AE = EF = FB$. Dacă $\{N\} = CF \cap AD$, arătaţi că $NE \perp DF$.*

Cătălin Cristea, Craiova

Soluţie. Triunghiurile ADE şi BCF sunt dreptunghice isoscele, prin urmare

$m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{BCF}) = m(\widehat{DCN}) = 45°$. Rezultă că $m(\widehat{DNC}) = 180° - 90° - m(\widehat{DCN}) = 45°$, deci $m(\widehat{DMN}) = 180° - m(\widehat{ADE}) - m(\widehat{DNC}) = 90°$, unde $\{M\} = DE \cap CN$. Astfel, DM este înălţime în $\triangle NDF$ şi, cum FA este tot înălţime, punctul E va fi ortocentrul acestui triunghi. De aici rezultă că $NE \perp DF$.



VII.190. *Fie $ABCD$ un patrulater cu $AB+CD = BC+AD$. Arătaţi că $AB \| CD$ dacă şi numai dacă cercurile de diametre BC, respectiv AD sunt tangente.*

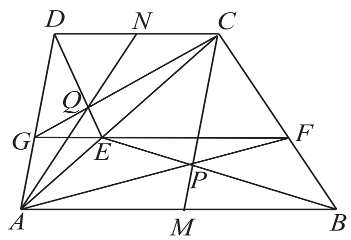
Ioan Săcăleanu, Hârlău, Iaşi

Soluţie. Notăm cu O_1 şi O_2 mijloacele laturilor AD, respectiv BC. Presupunem întâi că $AB \| CD$; cum O_1O_2 este linie mijlocie în trapezul/paralelogramul $ABCD$, rezultă că $O_1O_2 = \dfrac{AB+CD}{2} = \dfrac{AD+BC}{2} = r_1 + r_2$, deci cercurile de diametre AB şi BC sunt tangente. Reciproc, presupunem că cele două cercuri sunt tangente şi fie S mijlocul lui BD. Avem: $O_1O_2 = r_1 + r_2 = \dfrac{AD+BC}{2} = \dfrac{AB}{2} + \dfrac{CD}{2} = O_1S + O_2S$, conform teoremei liniei mijlocii aplicată în triunghiurile ABD şi ABC. Deducem că $S \in O_1O_2$, de unde $O_1O_2 \| AB \| CD$.

VII.191. *Fie M mijlocul bazei mari AB a trapezului $ABCD$ şi E un punct pe diagonala AC. Notăm $\{P\} = CM \cap BE$, $\{F\} = AP \cap BC$, $\{G\} = FE \cap AD$, $\{Q\} = CG \cap DE$, $\{N\} = AQ \cap CD$. Arătaţi că N este mijlocul bazei mici CD.*

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

Soluţie. Aplicând teorema lui Ceva în $\triangle ABC$, obţinem că $\dfrac{CE}{EA} \cdot \dfrac{AM}{MB} \cdot \dfrac{BF}{FC} = 1$, de unde $\dfrac{CE}{EA} = \dfrac{CF}{FB}$. Deducem că $EF \| AB$, deci $GE \| CD$, prin urmare $\dfrac{AG}{GD} = \dfrac{AE}{EC}$. Însă, din teorema lui Ceva aplicată în $\triangle ACD$, obţinem că $\dfrac{AG}{GD} \cdot \dfrac{DN}{NC} \cdot \dfrac{EC}{AE} = 1$. Rezultă că $\dfrac{DN}{NC} = 1$, adică N este mijlocul lui CD.



VII.192. *Un dreptunghi are perimetrul de $58m$. Este posibil să luăm zece puncte pe conturul dreptunghiului astfel încât distanţa dintre oricare două puncte consecutive să fie de $5m$?*

Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Răspunsul este afirmativ: fie $ABCD$ dreptunghiul şi $X_1, X_2, X_3 \in AB$, $X_4, X_5 \in BC$, $X_6, X_7, X_8 \in CD$, $X_9, X_{10} \in DA$ astfel încât $AX_1 = BX_4 = CX_6 = DX_9 = 3$m, $AX_{10} = BX_3 = CX_5 = DX_8 = 4$ m şi $X_1X_2 = X_2X_3 = X_4X_5 = X_6X_7 = X_7X_8 = X_9X_{10} = 5$m. Pentru această configuraţie, toate cerinţele din enunţ sunt îndeplinite.

Clasa a VIII-a

VIII.186. *Pe planul triunghiului ABC cu $m(\widehat{A}) = 90°$ se ridică perpendiculara AP. Notăm cu M şi N proiecţiile punctului A pe PB, respectiv PC. Demonstraţi că $\widehat{ABN} \equiv \widehat{ACM}$ dacă şi numai dacă $PB = PC$.*

Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Cum $AC \perp AP$ şi $AC \perp AB$, rezultă că $AC \perp (PAB)$, deci $AC \perp PB$. Avem şi $AM \perp PB$, aşadar $PB \perp (CAM)$. Analog se arată că $PC \perp (BAN)$. Fie $\{H\} = BN \cap CM$; atunci $AH = (CAM) \cap (BAN)$ şi, din cele de mai sus, obţinem că $PB \perp AH$ şi $PC \perp OH$, adică $AH \perp (PBC)$.

În triunghiul PBC, CM şi BN sunt înălţimi. Se obţine uşor că $PB = PC$ dacă şi numai dacă $CM = BN$. Unghiurile $\widehat{ABN}$ şi $\widehat{ACM}$ sunt congruente dacă şi numai dacă $AB = AC$ (via triunghiurile dreptunghice HAB şi HAC), fapt care se petrece dacă şi numai dacă $BN = CM$ (via triunghiurile dreptunghice ABN şi ACM).

VIII.187. *Determinaţi numerele reale x, y şi z, ştiind că $x^4 + 27y = -3(y^3 + 27)$, $y^4 + 27z = -3(z^3 + 27)$ şi $z^4 + 27x = -3(x^3 + 27)$.*

Vasile Chiriac, Bacău

Soluţie. Adunând membru cu membru relaţiile din enunţ, obţinem că $\sum(x^4 + 3x^3 + 27x + 81) = 0$, adică $\sum(x + 3)^2(x^2 - 3x + 9) = 0$. Cum $(x + 3)^2 \geq 0$ şi $x^2 - 3x + 9 > 0$, rezultă că $x + 3 = y + 3 = z + 3 = 0$, aşadar $x = y = z = -3$.

VIII.188. *Dacă x şi y sunt numere reale pentru care au sens radicalii, arătaţi că $44\sqrt{x - 2y + 760} + 6\sqrt{1510 - 4x + 2y} + \sqrt{7x + 7y + 3500} \leq 2015$.*

Cristian Pătraşcu şi Andrei Spătaru, elevi, Craiova

Soluţia 1 (**Păucă Georgiana-Sânziana**, **Hălăucă Andrei**, elevi, Truşeşti (Botoşani))**.** Se aplică inegalitatea mediilor pentru fiecare termen al sumei din membrul stâng:
$44\sqrt{x - 2y + 760} \leq \dfrac{44^2 + (x - 2y + 760)}{2}$, $6\sqrt{1510 - 4x + 2y} \leq \dfrac{72 + (755 - 2x + y)}{2}$, $\sqrt{7x + 7y + 3500} \leq \dfrac{7 + (x + y + 500)}{2}$. Prin adunarea acestor inegalităţi, se obţine imediat inegalitatea cerută.

Soluţia 2 (a autorilor)**.** Notăm cu A numărul din membru stâng al inegalităţii din enunţ. Folosind inegalitatea C-B-S, avem: $A^2 \leq (44^2 + (6\sqrt{2})^2 + (\sqrt{7})^2)((x - 2y + 760) + (755 - 2x + y) + (x + y + 500)) = 2015 \cdot 2015$, de unde cerinţa problemei.

VIII.189. *Dacă x, y, z sunt numere reale, arătaţi că $(3x - 2y + z)^4 + (x + 3y - 2z)^4 + (2x - y - 3z)^4 \geq \dfrac{16}{27}(x + y + z)^4$.*

Constantin Dragomir, Piteşti

Soluţie. Cum $3(u^2 + v^2 + w^2) \geq (u + v + w)^2, \forall u, v, w \in \mathbb{R}$, avem că $3(a^4 + b^4 + c^4) \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq \left(\dfrac{(a + b + c)^2}{3}\right)^2 = \dfrac{(a + b + c)^4}{9}$, deci $a^4 + b^4 + c^4 \geq \dfrac{(a + b + c)^4}{27}$. Luăm $a = 3x - 2y + z$, $b = x + 3y - 2z$ şi $c = -2x + y + 3z$ şi obţinem inegalitatea din enunţ. Avem egalitate când $a = b = c$, deci pentru $x = y = z$.

VIII.190. *Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [-1, 0) \cup (0, 1]$ şi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [1, \infty)$, astfel* *încât* $\sqrt{x_1 - a_1^2} + \sqrt{x_2 - a_2^2} + \ldots + \sqrt{x_n - a_n^2} = \dfrac{x_1}{2|a_1|} + \dfrac{x_2}{2|a_2|} + \ldots + \dfrac{x_n}{2|a_n|}$. *Arătaţi că* $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq 2n$. *Când se atinge egalitatea?*

Cecilia Deaconescu, Piteşti

Soluţie. Observăm că $\sqrt{x_k - a_k^2} \leq \dfrac{x_k}{2|a_k|}$ (această inegalitate revine, după calcule, la $(x_k - 2a_k^2)^2 \geq 0$), cu egalitate dacă şi numai dacă $x_k = 2a_k^2$. Ţinând cont de egalitatea din enunţ, decucem că $x_1 = 2a_1^2$, $x_2 = 2a_2^2$, $\ldots, x_n = 2a_n^2$ şi atunci $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 2(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) \leq 2(1 + 1 + \ldots + 1) = 2n$. Avem egalitate dacă şi numai dacă $a_k \in \{-1, 1\}$ şi $x_k = 2$, oricare ar fi $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

VIII.191. *Rezolvaţi în numere întregi ecuaţia* $13x^2 + 14x + 1 = 9^x$.

Dan Popescu, Suceava

Soluţia 1 (**Păucă Georgiana-Sânziana**, Truşeşti (Botoşani))**.** Evident, $x = 0$ este soluţie a ecuaţiei. Căutăm soluţiile $x \in \mathbb{N}^*$. Scriind ecuaţia în forma $(x+1)(13+1) = 9^x$ sau, încă, $(x + 1)[12z + (x + 1)] = 9^x$, deducem că $3|x + 1$, adică $x = 3k - 1$, $k \in \mathbb{N}^*$. Înlocuind în ecuaţia precedentă, obţinem ecuaţia: $k(13k - 4) = 9^{3k-2}$. Cum $k = 1$ este o soluţie, rezultă că ecuaţia iniţială are soluţia $x = 2$. Arătăm acum că ecuaţia în k nu are soluţii $k \neq 1$. Într-adevăr, dacă ar exista un astfel de k, am avea $k|9^{3k-2}$ şi $13k - 4|9^{3k-2}$. De aici, ţinând seama şi de faptul că $13k - 4 \neq 1$, rezultă că $3|k$ şi $3|13k - 4$. Dar $13k - 4 = (12k - 3) + (k - 1)$, deci $3|k - 1$, în contradicţie cu $3|k$. În concluzie, ecuaţia dată are soluţiile 0 şi 2.

Soluţia 2 (a autorilor)**.** Se obervă că $x = 0$ este soluţie. Ecuaţia nu admite soluţii negative, deoarece membrul stâng ar fi număr întreg, în timp ce $9^x \in \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{Z}^*_-$. Dacă $x \in \mathbb{N}$, ecuaţia se scrie sub forma $(x + 1)(13x + 1) = 3^{2x}$; rezultă că $x + 1 = 3^a$, $13x+1 = 3^b$, cu $a, b \in \mathbb{N}^*$, $a+b = 2x$, $a < b$. Deducem că $12x = 3^b - 3^a = 3^a(3^{b-a} - 1)$ şi, cum $x = 3^a - 1 \not\vdots\, 3$, obţinem că $a = 1$, de unde $x = 2$. În concluzie, soluţiile ecuaţiei date sunt $x \in \{0, 2\}$.

Soluţia 3 (**Hălăucă Andrei**, elev, Truşeşti (Botoşani))**.** Se constată direct că $x = 0$ şi $x = 2$ sunt soluţii ale ecuaţiei. Acestea sunt singurele soluţii, căci parabola $f(x) = 13x^2 + 14x + 1$ şi exponenţiala $g(x) = 9^x$, $x \in \mathbb{R}$, nu pot avea mai mult de două puncte de intersecţie.

VIII.192. *Dacă n este număr natural nenul, arătaţi că* $A = 2^{n-1}(2^n-1)(2^{n+1}-1)$ *nu poate fi cub perfect.*

Lucian Tuţescu şi Liviu Smarandache, Craiova

Soluţia 1 (**Hălăucă Andrei**, elev, Truşeşti (Botoşani))**.** Vom arăta că $(2^n-1)^3 < A < (2^n)^3$, de unde va rezulta afirmaţia cerută. Într-adevăr, avem $A < 2^{n-1} \cdot 2^n \cdot 2^{n+1} = 2^{3n} = (2^n)^3$, iar faptul că $A > (2^n - 1)^3$, adică $2^{n-1}(2^n - 1)(2^{n+1} - 1) > (2^n - 1)^3$, se verifică prin calcul direct.

Soluţia 2 (a autorilor)**.** Pentru $n = 1$, obţinem $A = 3$, care nu este cub perfect. Fie $n \geq 2$ şi presupunem, prin absurd, că A este cub perfect; cum 2^{n-1} este par şi 2^{n-1}, $2^{n+1} - 1$ sunt impare, rezultă că $n = 3k+1$, unde $k \in \mathbb{N}^*$. Se observă că $2^n - 1$ şi $2^{n+1} - 1$ sunt prime între ele, deci vom avea $2^n - 1 = m^3$ şi $2^{n+1} - 1 = p^3$. Atunci $m^3 + 1 = 2^n$, deci $(m + 1)(m^2 - m + 1) = 2^n$; însă $m^2 - m + 1$ este număr impar şi se impune ca $m^2 - m + 1 = 1$, de unde $m = 1$, adică $n = 1$, contradicţie.

Clasa a IX-a

IX.156. *Pentru $a,b \in \mathbb{R}$, se consideră ecuaţia $x^2+ax+b=0$ şi funcţia $f : \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{a}{2}\right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{ax+2b}{2x+a}$. Ştiind că ecuaţia are soluţiile reale distincte x_1 şi x_2, arătaţi că, pentru orice $t \in \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{a}{2}, x_1, x_2\right\}$, între t şi $f(t)$ se află exact una dintre soluţiile ecuaţiei.*

Mihai Dicu, Craiova

Soluţie. Considerăm funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2+ax+b$. Prin calcul, se arată că $g(f(t)) = -\frac{\Delta \cdot g(t)}{(2t+a)^2}$; cum $\Delta > 0$, rezultă că $g(t)$ şi $g(f(t))$ au semne contrare şi, de aici, concluzia problemei.

IX.157. *Fie a, b şi c numere reale astfel încât $a+b+c = abc$. Demonstraţi că $\sqrt{1+\frac{1}{a^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{b^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{c^2}} \geq 2\sqrt{3}$.*

Andrei Nicolaescu şi Cristian Pătraşcu, elevi, Craiova

Soluţia 1 (a autorilor). Cum $a+b+c = abc$, există un triunghi ABC astfel încât $a = \operatorname{tg} A$, $b = \operatorname{tg} B$ şi $C = \operatorname{tg} C$. Inegalitatea din enunţ revine la $\sum \frac{1}{\sin A} \geq 2\sqrt{3}$. Folosind inegalitatea lui Bergström şi binecunoscuta $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$, obţinem că $\sum \frac{1}{\sin A} \geq \frac{(1+1+1)^2}{\sum \sin A} \geq \frac{9 \cdot 2}{3\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ şi, astfel, soluţia este completă.

Soluţia 2 (**Titu Zvonaru**). Observăm că $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2(ab+bc+ca)}{abc} \geq \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+2 = 3$. Folosind definiţia modulului unui număr complex şi inegalitatea triunghiului, avem:

$$\sum \sqrt{1+\frac{1}{a^2}} = \sum \left|1+\frac{1}{a}i\right| \geq \left|3+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)i\right| =$$
$$= \sqrt{9+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2} \geq \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}.$$

IX.158. *Se consideră triunghiul ABC cu $m(\widehat{A}) \geq 60^\circ$. Arătaţi că $\frac{2\sqrt{3}}{3}a \geq \max\{b, c\}$.*

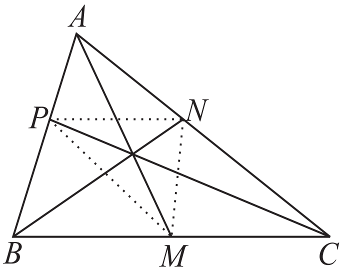
Ovidiu Pop, Satu Mare

Soluţie. Cum $m(\widehat{A}) \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right)$, avem $\cos A \in \left(-1, \frac{1}{2}\right]$, deci $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \leq \frac{1}{2}$, aşadar $b^2+c^2-bc \leq a^2$. Dar $b^2+c^2-bc = \left(b-\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c\sqrt{3}}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{c\sqrt{3}}{2}\right)^2$, prin urmare $a^2 \geq \left(\frac{c\sqrt{3}}{2}\right)^2$, adică $\frac{2\sqrt{3}}{3}a \geq c$. Analog se arată că $\frac{2\sqrt{3}}{3}a \geq b$.

IX.159. *Pe laturile AB, BC şi CA ale triungiului ABC se consideră punctele P, M, respectiv N astfel încât $3AP = 2BP$, iar cevienele AM, BN şi CP să fie* *concurente. Dacă raportul ariilor triunghiurilor MNP şi ABC este $\frac{6}{25}$, arătaţi că una dintre cevienele AM şi BN este mediană.*

Andi Brojbeanu, elev, Târgovişte

Soluţie. Dacă $\frac{BM}{MC} = k$, din teorema lui Ceva obţinem că $\frac{CN}{NA} = \frac{3}{2k}$. Avem: $\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = 1 - \frac{S_{APN}}{S_{ABC}} - \frac{S_{BMP}}{S_{ABC}} - \frac{S_{CMN}}{S_{ABC}} = 1 - \frac{AP}{AB} \cdot \frac{AN}{NC} - \frac{BP}{BA} \cdot \frac{BM}{BC} - \frac{CM}{CB} \cdot \frac{CN}{CA} = 1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{2k}{2k+3} - \frac{3}{5} \cdot \frac{k}{k+1} - \frac{3}{2k+3} \cdot \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{10k^2 + 13k + 15}{2k^2 + 5k + 3}$. Egalând $\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}}$ cu $\frac{6}{25}$ şi efectuând calculele, obţinem ecuaţia $2k^2 - 5k + 3 = 0$, cu soluţiile $k_1 = 1$ şi $k_2 = \frac{3}{2}$. În primul caz, $BM = MC$, în cel de-al doilea, $CN = NA$.



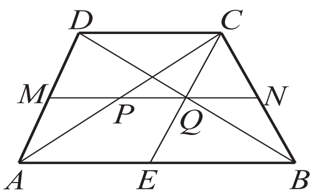
IX.160. *Fie AB baza mare a trapezului $ABCD$, iar M, N, P şi Q mijloacele segmentelor AD, BC, AC, respectiv BD.*

a) *Demonstraţi că $ABCD$ este patrulater circumscriptibil dacă şi numai dacă $\frac{PQ}{MN} = \frac{\sin(A+B)}{\sin A + \sin B}$.*

b) *Arătaţi că $ABCD$ este trapez isoscel circumscriptibil dacă şi numai dacă $\frac{PQ}{MN} = \cos A$.*

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

Soluţie. a) Ducem $CE \| AD$, cu $E \in AB$; din $\triangle BCE$, folosind teorema sinusurilor, obţinem că $\frac{BC}{\sin A} = \frac{CE}{sinB} = \frac{BE}{\sin \widehat{BCE}}$. Însă $CE = AD$, $BE = AB - CD$ şi $\sin \widehat{BCE} = \sin(\pi - (\widehat{A} + \widehat{B})) = \sin(\widehat{A} + \widehat{B})$, deci $BC = (AB - CD) \cdot \frac{\sin A}{\sin(A+B)}$ şi $AD = (AB - CD) \cdot \frac{\sin B}{\sin(A+B)}$. Astfel, $ABCD$ este circumscriptibil $\Leftrightarrow AB + CD = BC + AD \Leftrightarrow AB + CD = (AB - CD) \cdot \frac{\sin A + \sin B}{\sin(A+B)} \Leftrightarrow 2MN = 2PQ \cdot \frac{\sin A + \sin B}{\sin(A+B)} \Leftrightarrow \frac{PQ}{MN} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin(A+B)}$.



b) Avem $\frac{\sin(A+B)}{\sin A + \sin B} = \cos A \Leftrightarrow \sin A \cos B + \cos A \sin B = \sin A \cos A + \sin B \cos A \Leftrightarrow \sin A(\cos B - \cos A) = 0 \Leftrightarrow \cos A = \cos B \Leftrightarrow A = B$, de unde cerinţa problemei.

Clasa a X-a

X.156. *Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuatia* $\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x} + \frac{\sqrt{x-\sqrt{x}}}{x} = \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

Soluţie. Din condiţiile de existenţă pentru radicali găsim că $x \in [1, \infty)$. Notăm $\sqrt{x} = t$, deci $x = t^2$, $t \in [1, \infty)$; ecuaţia devine $\sqrt{t^2 + t} + \sqrt{t^2 - t} = t\sqrt{t^2 + t}$, sau $\sqrt{t^2 + t}(t - 1) = \sqrt{t^2 - t}$, adică $t(t + 1)(t - 1)^2 = t(t - 1)$. Obţinem că $t \in \{1, \sqrt{2}\}$, de unde $x \in \{1, 2\}$.

X.157. *Fie $a, b \in (0, 1) \cup (1, \infty)$, cu $ab \neq 1$. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $a^x \log_{ab} a + b^x \log_{ab} b = a^x b^x$.*

Mihai Dicu, Craiova

Soluţie. Împărţind în ambii membri prin $a^x b^x$, ecuaţia se scrie sub forma $f(x) = 1$, unde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este definită prin $f(x) = \left(\frac{1}{b}\right)^x \log_{ab} a + \left(\frac{1}{a}\right)^x \log_{ab} b$. Considerând cazurile: (i) $a > 1$, $b > 1$; (ii) $a < 1, b < 1$; (iii) $a < 1 < b$ (sau $b < 1 < a$) şi $ab < 1$; (iv) $a < 1 < b$ (sau $b < 1 < a$) şi $ab > 1$, se arată că f este, de fiecare dată, funcţie strict monotonă, deci injectivă. Astfel, ecuaţia $f(x) = 1$ are cel mult o soluţie. Cum $f(0) = 1$, rezultă că $x = 0$ este unica soluţie a ecuaţiei.

X.158. *Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia $z^3 + az + b = 0$ să aibă trei soluţii complexe distincte şi cu acelaşi modul. Arătaţi că aceste soluţii sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.*

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

Soluţia 1 (**Hălăucă Andrei**, elev, Truşeşti (Botoşani))**.** Fie punctele $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$. Ele sunt trei puncte distincte pe cercul $\mathcal{C}(O, R)$, unde $R = |z_1| = |z_2| = |z_3|$. Centrul de greutate al triunghiului ABC are afixul $z_0 = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3) = 0$, conform uneia dintre relaţiile Viète relativ la ecuaţia $z^3 + az + b = 0$. Aşadar, pentru triunghiul ABC originea este atât centrul cercului circumscris cât şi centrul său de greutate, deci el este echilateral.

Soluţia 2 (a autorilor)**.** Dacă z_1, z_2 şi z_3 sunt soluţiile ecuaţiei din enunţ, atunci $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, $z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = a$ şi $z_1z_2z_3 = -b$. Dacă $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r$, atunci: $\overline{z}_1 + \overline{z}_2 + \overline{z}_3 = 0 \Rightarrow \frac{r^2}{z_1} + \frac{r^2}{z_2} + \frac{r^2}{z_3} = 0 \Rightarrow \frac{r^2(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)}{z_1z_2z_3} = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow z_1, z_2, z_3$ sunt rădăcinile cubice complexe ale lui $-b$. Astfel, este adevărată cerinţa problemei.

X.159. *Dacă a, b, c, d şi e sunt numere reale pozitive, arătaţi că $\sum \frac{a^5}{bcde} \geq \sum a$.*

Mihai Crăciun, Paşcani

Soluţia 1. Din inegalitatea mediilor, obţinem că $\frac{a^5}{bcde} + b + c + d + e \geq 5\sqrt[5]{\frac{a^5}{bcde} \cdot bcde} = 5a$ şi încă patru relaţii similare. Adunând membru cu membru, rezultă că $\sum \frac{a^5}{bcde} + 4\sum a \geq 5\sum a$, de unde inegalitatea dorită.

Soluţia 2. Funcţia putere este convexă; din inegalitatea lui Jensen, $\frac{\sum a^6}{5} \geq \left(\frac{\sum a}{5}\right)^6$. Atunci $\sum \frac{a^5}{bcde} = \frac{\sum a^6}{abcde} \geq \frac{5\left(\frac{\sum a}{5}\right)^6}{abcde} = \frac{(\sum a)(\frac{\sum a}{5})^5}{abcde} \geq (\sum a) \cdot \frac{(\sqrt[5]{abcde})^5}{abcde} = \sum a$.

X.160. *Demonstraţi că, în orice triunghi ascuţitunghic, este adevărată inegalitatea* $\cos^4\frac{A}{2}+\cos^4\frac{B}{2}+\cos^4\frac{C}{2}\geq\frac{23}{16}+\frac{r}{2R}$.

Neculai Roman, Mirceşti, Iaşi

Soluţie. Avem: $\cos^4\frac{A}{2}=\frac{1}{8}(\cos 2A+4\cos A+3)$ şi încă două relaţii similare. Atunci $\sum\cos^4\frac{A}{2}=\frac{1}{8}\left(\sum\cos 2A+4\sum\cos A+9\right)=\frac{1}{8}\Big[(-1-4\cos A\cos B\cos C)+4\left(1+\frac{r}{R}\right)+9\Big]=\frac{1}{8}(12-4\cos A\cos B\cos C+\frac{4r}{R})\geq\frac{1}{8}\left(12-\frac{1}{2}+\frac{4r}{R}\right)=\frac{23}{16}+\frac{r}{2R}$.

Clasa a XI-a

XI.156. *Fie* $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. *Spunem că matricele* $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *sunt legate dacă* $AB+BA=O_n$.

a) *Arătaţi că există două matrice legate care nu comută.*

b) *Dacă A şi B sunt legate, demonstraţi că* $det(A^2+B^2)\geq 0$.

Dumitru Crăciun, Fălticeni

Soluţie. a) De exemplu, luăm

$$A=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0&0\\0&0&\dots&0&0\\\dots\\0&0&\dots&0&0\\0&0&\dots&0&-1\end{pmatrix}\quad\text{şi}\quad B=\begin{pmatrix}0&0&\dots&0&1\\0&0&\dots&0&0\\\dots\\0&0&\dots&0&0\\1&0&\dots&0&0\end{pmatrix}.$$

b) Dacă $AB+BA=O_n$, atunci $(A+B)^2=A^2+B^2$, prin urmare $\det(A^2+B^2)=[\det(A+B)]^2\geq 0$.

XI.157. *Fie* $\alpha,\beta\in\mathbb{R},\alpha\leq\beta$ *şi şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *definit prin* $x_1=\alpha$, $x_2=\beta$ *şi* $x_{n+2}+x_n\geq 2x_{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. *Dacă şirul dat este convergent, arătaţi că* $\alpha=\beta$.

Răzvan Drînceanu şi Liviu Smarandache, Craiova

Soluţie. Din $\sum\limits_{k=1}^{n}(x_{k+2}+x_k)\geq 2\sum\limits_{k=1}^{n}x_{k+1}$ obţinem că $x_{n+2}+x_1\geq x_{n+1}+x_2$, deci $x_{n+2}-x_{n+1}\geq\beta-\alpha$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+2}-x_{n+1})\geq\beta-\alpha$, de unde $0\geq\beta-\alpha$. Însă $\beta-\alpha\geq 0$, prin urmare $\alpha=\beta$.

XI.158. *Dacă* $x,y\in\mathbb{R},x\geq 1$, *arătaţi că* $x^{\sin^2 y}+x^{\cos^2 y}\leq x+1$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

Soluţie. Pentru $a\in[0,1]$, definim $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^a+x^{1-a}-x-1$. Cum $f'(x)=ax^{a-1}+(1-a)x^{-a}-1$ şi $f''(x)=a(a-1)(x^{a-2}+x^{-a-1})\leq 0,\forall x\geq 1$, deducem că f' este descrescătoare, deci $f'(x)\leq f'(1)=0$. Atunci f este descrescătoare, prin urmare $f(x)\leq f(1)=0$. În concluzie, $x^a+x^{1-a}\leq x+1$, $\forall x\in[1,\infty)$, $\forall a\in[0,1]$, cu egalitate pentru $x=1$ sau $a\in\{0,1\}$. Luând $a=\sin^2 y$, obţinem cerinţa problemei.

XI.159. *Fie* $a\in\mathbb{R}\backslash\{-1,0\}$ *şi* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *o funcţie continuă în* 0, *cu* $f(0)=0$ *şi astfel încât* $af(ax)+f(x)=f(a^2x)+af(a^{-1}x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. *Arătaţi că* $f(a^kx)=a^k\cdot f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall k\in\mathbb{Z}$.

Sven Cortel, Manchester, UK

Soluţie. Considerăm funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(ax) - f(a^{-1}x)$; relaţia din enunţ se scrie sub forma $ag(x) = g(ax)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Prin inducţie, se arată că $a^k \cdot g(x) = g(a^k x)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

I. Dacă $a = 1$, concluzia este evidentă.

II. Dacă $a \in (-1, 0) \cup (0, 1)$, arătăm întâi, prin inducţie, că $f(a^{2n}x) - f(x) = g(a^{2n-1}x) + g(a^{2n-3}x) + \ldots + g(ax)$. Atunci $f(a^{2n}x) - f(x) = ag(x) \cdot (1 + a^2 + \ldots + a^{2n-2}) = ag(x) \cdot \dfrac{a^{2n} - 1}{a^2 - 1}$. Trecem la limită după n şi obţinem că $f(x) = \dfrac{a}{a^2 - 1} g(x) = \dfrac{1}{a^2 - 1} g(ax) = \dfrac{1}{a^2 - 1}(f(a^2x) - f(x))$, deci $a^2 f(x) = f(a^2 x)$. Trecem $x \mapsto a^{-1}x$ şi deducem că $af(a^{-1}x) = a^{-1}f(ax)$, prin urmare $af(x) + f(x) = a^2 f(x) + a^{-1}f(ax)$, de unde $(1 - a^2)f(x) = a^{-1}(1 - a^2)f(ax)$, prin urmare $af(x) = f(ax)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Se arată acum uşor, prin inducţie, că are loc cerinţa problemei.

III. Dacă $a \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, notăm $b = a^{-1} \in (-1, 1)$ şi demonstrăm prin inducţie, că $f(x) - f(u^{2n}x) = g(u^{2n-1}x) + g(u^{2n-3}x) + \ldots + g(ux)$ şi soluţia continuă ca în cazul II.

XI.160. *Fie $(x_n), (y_n)$ şi (z_n) şiruri de numere întregi definite prin relaţiile $x_{n+1} = y_n + z_n$, $y_{n+1} = x_n + z_n$ şi $z_{n+1} = x_n + y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, unde x_1, y_1, z_1 sunt numere întregi date. Demonstraţi că există $a, b, c, d, e, f, g \in \mathbb{Z}$ (care se pot alege într-o infinitate de moduri esenţial distincte) pentru care*

$$ax_n^2 + by_n^2 + cz_n^2 + dx_ny_n + ex_nz_n + fy_nz_n = g,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Considerăm şirul (g_n) de termen general $g_n = ax_n^2 + by_n^2 + cz_n^2 + dx_ny_n + ex_nz_n + fy_nz_n$. Impunem condiţia $g_{n+1} = g_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$; folosind relaţiile de recurenţă obţinem, identificând coeficienţii lui $x_n^2, y_n^2, \ldots, y_nz_n$, sistemul de ecuaţii

$$b + c + f = a,\ a + c + e = b,\ a + b + d = c,$$
$$2a + d + e = 0,\ 2b + d + f = 0,\ 2c + e + f = 0.$$

Cum acest sistem admite soluţia $(a, b, c, -a - b + c, -a + b - c, a - b - c)$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$, concluzia rezultă; desigur, odată ce am fixat a, b, c, d, e, f, trebuie ales $g_1 = ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 + dx_1y_1 + ex_1z_1 + fy_1z_1$.

Clasa a XII-a

XII.156. *Determinaţi funcţiile derivabile $y = y(x)$, $x \in (0, \infty)$, cu proprietatea că $x(x + 1) \cdot y'(x) + y(x) = e^x(x + 1)^2$.*

Adrian Corduneanu, Iaşi

Soluţie. Observând că $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)' = \dfrac{1}{(x+1)^2}$, ecuaţia se scrie sub forma $\left(\dfrac{x}{x+1} y\right)' = e^x$. Rezultă că există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $\dfrac{x}{x+1} y = e^x + c$, prin urmare funcţile căutate sunt cele de forma $y_c(x) = \dfrac{(x+1)(e^x + c)}{x}$, $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$.

XII.157. *Calculaţi* $I = \int \frac{x^2+4x+10}{(x+2)^4}\cos x\,dx$, *unde* $x \in (-2,\infty)$.

Mihaela Berindeanu, Bucureşti

Soluţie. Avem:
$\int \frac{(x+2)^2+6}{(x+2)^4}\cos x\,dx = \int \frac{\cos x}{(x+2)^2}dx + 6\int \left(\frac{(x+2)^{-3}}{-3}\right)'\cos x\,dx = \int \frac{\cos x}{(x+2)^2}dx - \frac{2\cos x}{(x+2)^3} - 2\int (x+2)^{-3}\sin x\,dx = \int \frac{\cos x}{(x+2)^2}dx - \frac{2\cos x}{(x+2)^3} - 2\int \left(\frac{(x+2)^{-2}}{-2}\right)'\sin x\,dx = \int \frac{\cos x}{(x+2)^2}dx - \frac{2\cos x}{(x+2)^3} + \frac{\sin x}{(x+2)^2} - \int \frac{\cos x}{(x+2)^2}dx = \frac{\sin x}{(x+2)^2} - \frac{2\cos x}{(x+2)^3} + \mathcal{C}$.

XII.158. *Considerăm* $a_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^{2n}x}{1+\sin^{2n}x}\cdot \operatorname{ctg} x\,dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. *Determinaţi limita şirului* $(a_n)_{n\geq 1}$.

Ionel Tudor, Călugăreni şi Stelian Piscan, Giurgiu

Soluţie. Cu substituţia $\sin x = t$, obţinem că
$a_n = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1-t^{2n}}{1+t^{2n}}\cdot\frac{dt}{t} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{t^{2n-1}(1-t^{2n})}{t^{2n}(1+t^{2n})}dt = (t^{2n}=y) = \frac{1}{2n}\int_{\frac{1}{2^{2n}}}^{1}\frac{1-y}{y(1+y)}dy = \frac{1}{2n}(\ln y - 2\ln(1+y))\Big|_{\frac{1}{2^{2n}}}^{1} = \frac{1}{n}\left(\ln\left(1+\frac{1}{2^{2n}}\right) + n\ln 2 - \ln 2\right)$, prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ln 2$.

XII.159. *Fie* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă astfel încât* $\int_0^1 f(x)dx = 0$. *Demonstraţi că* $2\cdot\left(\int_0^1 xf(x)dx\right)^2 \leq \int_0^1 (1-x^2)f^2(x)dx$.

Florin Stănescu, Găeşti

Soluţie. Folosind formula de integrare prin părţi,
$\int_0^1 \left(\int_x^1 f(t)dt\right)dx = \int_0^1 x'\left(\int_x^1 f(t)dt\right)dx = \int_0^1 xf(x)dx$. Utilizând C-B-S (forma integrală), obţinem că $\left(\int_0^1 xf(x)dx\right)^2 = \left(-\int_0^1\left(\int_0^x f(t)dt\right)dx\right)^2 \leq \int_0^1 1^2dx\cdot \int_0^1\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2dx \leq \int_0^1\left(\int_0^x 1^2dt\cdot\int_0^x f^2(t)dt\right)dx = \int_0^1 x\left(\int_0^x f^2(t)dt\right)dx = \int_0^1\left(\frac{x^2}{2}\right)'\left(\int_0^x f^2(t)dt\right)dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f^2(x)dx - \int_0^1 x^2f(x)dx\right)$, de unde concluzie problemei.

XII.160. *Fie* $P_k \in \mathbb{R}[X]$, $k \in \mathbb{N}^*$, *cu proprietatea că* $P_k(n) = S_k(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, *unde* $S_k(n) = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$. *Demonstraţi că* P_k *este polinom de grad* $k+1$, *care se divide cu* $X(X+1)$.

Ovidiu Pop, Satu-Mare

Soluţie. Avem că $(x+1)^{k+1} - x^{k+1} = C_{k+1}^1 x^k + C_{k+1}^2 x^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k x + C_{k+1}^{k+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$. Dând lui x valorile $1, 2, \ldots, n$ şi sumând egalităţile obţinute, deducem că

$$(n+1)^{k+1} - (n+1) = C_{k+1}^1 S_k(n) + C_{k+1}^2 S_{k-1}(n) + \ldots + C_{k+1}^k S_1(n),$$

oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$. Cum $S_k(n) = P_k(n)$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ şi relaţia precedentă are loc pentru o infinitate de valori ale lui n, rezultă că

$$(X+1)^{k+1} - (X+1) = C_{k+1}^1 P_k + C_{k+1}^2 P_{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k P_1, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Atunci $P_k = \dfrac{1}{k+1}[(X+1)^{k+1} - (X+1) - (C_{k+1}^2 P_{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k P_1)]$ şi, evident, $P_1 = \dfrac{1}{2}X(X+1)$. Din acest moment, cerinţele problemei se demonstrează prin inducţie matematică.

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor propuse în nr. 1/2015

A. Nivel gimnazial

G276. *Determinaţi valoarea maximă a numărului real α pentru care $\dfrac{x^3}{a} + \dfrac{y^3}{b} \geq \dfrac{\alpha xy(x+y)}{a+b}$, oricare ar fi numerele reale pozitive x, y, a şi b.*

Alexandru Blaga, Satu Mare

Soluţie. În soluţia problemei **IX.152** (a se vedea *RecMat 1/2015*, p.63) s-a arătat că $\dfrac{x^3}{a} + \dfrac{y^3}{b} \geq \dfrac{2xy(x+y)}{a+b}$, $\forall x, y, z, b \in (0, \infty)$, deci $\alpha_{\max} \geq 2$. Pe de altă parte, pentru $a = b$ şi $x = y$, obţinem că $\dfrac{2x^3}{a} \geq \dfrac{2\alpha x^3}{2a}$, $\forall x, a \in (0, \infty)$, prin urmare $\alpha \leq 2$. În concluzie, valoarea maximă cerută a lui α este 2.

G277. *Fie $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}$ (unde $n \in \mathbb{N}^*$) numere reale pozitive cu $\sum\limits_{i=1}^{2n+1} x_i = 2n+1$. Arătaţi că $\sum\limits_{i=1}^{2n+1} \dfrac{x_i}{nx_i^2 + n + 1} \leq 1$.*

Lucian Tuţescu şi Teodora Rădulescu, Craiova

Soluţie. Din inegalitatea mediilor, $nx_1 + n + 1 \geq (2n+1) \cdot \sqrt[2n+1]{(x_1^2)^n \cdot 1^{n+1}}$. Atunci $\dfrac{x_1}{nx_1^2 + n + 1} \leq \dfrac{x_1}{(2n+1)\sqrt[2n+1]{x_1^{2n}}} = \dfrac{1}{2n+1}\sqrt[2n+1]{x_1} \leq \dfrac{1}{2n+1} \cdot \dfrac{x_1 + 1 + \ldots + 1}{2n+1} = \dfrac{x_1 + 2n}{(2n+1)^2}$. Scriem încă $2n$ inegalităţi similare şi, prin sumarea lor, obţinem că $\sum\limits_{i=1}^{2n+1} \dfrac{x_i}{nx_i^2 + n + 1} \leq \dfrac{1}{(2n+1)^2} \cdot \sum\limits_{i=1}^{2n+1}(x_i + 2n) = 1$. Se obţine egalitate pentru $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2n+1} = 1$.

G278. *Demonstraţi că nu există numere naturale nenule n pentru care numărul $a_n = 5^n + 5^{n+1} + \ldots + 5^{2n-1}$ să fie pătrat perfect.*

Radu Miron, elev, Iaşi

Soluţie. Presupunem, prin absurd, că a_n ar fi pătrat perfect pentru un anumit $n \in \mathbb{N}^*$. Cum $a_n = 5^n(1 + 5 + \ldots + 5^{n-1})$ şi numerele 5^n şi $b = 1 + 5 + \ldots + 5^{n-1}$