$\sqrt{4\cos^2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)} = 2\cos\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Atunci $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos\left(x-\frac{\pi}{8}\right)} dx =$ $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{3\pi}{16}\right)\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln\left(\operatorname{ctg}^2\frac{3\pi}{16}\right)$.

XII.148. *Fie $a, b \in [1, \infty)$, $a < b$ şi funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de clasă C^2, astfel încât $f(a) = f(b)$. Demonstraţi că $\min_{x\in[a,b]} |f''(x)| \leq \frac{2b}{b-a} \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.*

Ionuţ Ivănescu, Craiova

Soluţie. Integrând prin părţi, obţinem că $\int_a^b xf''(x)dx = xf'(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)dx =$ $bf'(b) - af'(a)$. Pe de altă parte, conform teoremei de medie, $\int_a^b xf''(x)dx = (b-a)c\cdot$ $f''(c)$, cu $c \in (a, b)$. Rezultă că $(b-a)\cdot c\cdot|f''(c)| = |bf'(b)-af'(a)| \leq b\cdot|f'(b)|+a\cdot|f'(a)|$. Cum $c > a \geq 1$, avem că $(b-a)c \cdot |f''(c)| \geq (b-a)|f''(c)| \geq (b-a) \min_{x\in[a,b]} |f''(x)|$. Apoi, $b \cdot |f'(b)| + a \cdot |f'(a)| \leq b \cdot |f'(b)| + b|f'(a)| \leq 2b \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$. Am arătat astfel că $(b-a) \min_{x\in[a,b]} |f''(x)| \leq 2b \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$, de unde concluzia problemei.

XII.149. *Rezolvaţi în $\mathbb{C}$ ecuaţia $x^7 - 5x^6 + 11x^5 - 15x^4 + 15x^3 - 13x^2 + 5x - 3 = 0$.*

Ionel Tudor, Călugăreni

Soluţie. Ecuaţia se factorizează sub forma $(x^2+1)[(x-1)^5-2]=0$ şi are soluţiile complexe $\pm i$, respectiv $1 + \varepsilon_k \cdot \sqrt[5]{2}$, unde $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}$, $k = \overline{0, 4}$.

XII.150. *Fie G un grup comutativ de ordin 2014 şi $A = \{f_n : G \to G | f_n(x) = x^n, n = \overline{1, 2013}\}$. Determinaţi numărul automorfismelor lui A.*

Cristian Lazăr, Iaşi

Soluţie. Cum orice funcţie f_n este morfism, rămâne să vedem în ce condiţii f_n este bijecţie. Observăm că $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$; din teorema lui Cauchy, există elementele a, b, c ale lui G de ordine $2, 19$ respectiv 53. Atunci $a \in \operatorname{Ker} f_n \Leftrightarrow n = M_2$; $b \in \operatorname{Ker} f_n \Leftrightarrow n = M_{19}$; $c \in \operatorname{Ker} f_n \Leftrightarrow n = M_{53}$, deci o funcţie f_n de indice n cu $(n, 2014) \neq 1$ nu poate fi injectivă. În cazul în care $(n, 2014) = 1$, funcţia f_n este injectivă şi, implicit, bijectivă. În concluzie, numărul automorfismelor din A este $\varphi(2014) = 2014\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{19}\right)\left(1-\frac{1}{53}\right) = 936$.

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor propuse în nr. 1/2014

A. Nivel gimnazial

G256. *Fie $p \geq 3$ un număr prim. Arătaţi că numărul $p \cdot 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, se scrie în mod unic ca sumă (având măcar doi termeni) de numere naturale consecutive.*

Elena Iurea, Iaşi

Soluţie. Căutăm $a, t \in \mathbb{N}$, $t \geq 2$, astfel încât $p \cdot 2^n = a + (a+1) + \ldots + (a+t-1)$; atunci $p \cdot 2^{n+1} = t(2a+t-1)$. Numerele $t \geq 2$ şi $2a+t-1$ având parităţi diferite, avem situaţiile: 1) $t = p$, $2a+t-1 = 2^{n+1}$, deci $a = \dfrac{2^{n+1}-p+1}{2}$; 2) $2a+t-1 = 1$, $t = p \cdot 2^{n+1}$, imposibil; 3) $2a+t-1 = p$, $t = 2^{n+1}$, deci $a = \dfrac{p-2^{n+1}+1}{2}$. Cum $a \in \mathbb{N}$, dacă $p \leq 2^{n+1}$ convine doar primul caz, iar dacă $p > 2^{n+1}$ convine doar cel de-al treilea. În concluzie, scrierea dorită există şi este unică.

G257. *Fie $a, n \in \mathbb{N}$, a impar şi $n \geq 2$. Aflaţi restul împărţirii numărului a^n prin $\dfrac{a^2+1}{2}$.*

Lucian Tuţescu, Craiova şi Dumitru Săvulescu, Bucureşti

Soluţie. Dacă $n = 2$, atunci $a^2 = \dfrac{a^2+1}{2} + \dfrac{a^2-1}{2}$, cu $\dfrac{a^2-1}{2} < \dfrac{a^2+1}{2}$, deci restul împărţirii este $\dfrac{a^2-1}{2}$ (şi câtul este 1). Dacă $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$, atunci $a^n = a^{2k} = \left(2 \cdot \dfrac{a^2+1}{2} - 1\right)^{2k} = M_{\frac{a^2+1}{2}} + 1$. Restul împărţirii va fi 1 dacă $a \geq 3$, iar când $a = 1$ restul căutat este 0.

Fie $n = 4k+1$, $k \in \mathbb{N}$; atunci $a^n = a^{4k} \cdot a = (M_{\frac{a^2+1}{2}} + 1)a = M_{\frac{a^2+1}{2}} + a$. Restul dorit este a dacă $a \geq 3$, respectiv 0 când $a = 1$.

În sfârşit, fie $n = 4k+3$, $k \in \mathbb{N}$; atunci $a^n = a(a^2)^{2k+1} = a\left(2\dfrac{a^2+1}{2} - 1\right)^{2k+1} = a\left(M_{\frac{a^2+1}{2}} - 1\right) = M_{\frac{a^2+1}{2}} - a = M_{\frac{a^2+1}{2}} - \dfrac{a^2+1}{2} + \dfrac{a^2+1}{2} - a = M_{\frac{a^2+1}{2}} + \dfrac{(a-1)^2}{2}$. Restul dorit este $\dfrac{(a-1)^2}{2}$.

G258. *Determinaţi numerele $\overline{abcde}$ (în baza 10), ştiind că $a+b+c = e$ şi $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d} = \dfrac{10}{e}$.*

Cătălin Calistru, Iaşi

Soluţie. Înmulţind membru cu membru relaţiile din enunţ, obţinem că $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) + \dfrac{a+b+c}{d} = 10$. Însă $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) \geq 9$ (cu egalitate când $a = b = c$) şi atunci $a+b+c \leq d \leq 9$. Cifrele a, b, c fiind în mod necesar nenule, rezultă că $a+b+c \in \{3, 4, \ldots, 9\}$; presupunem, pentru început, că $a \leq b \leq c$. Dacă $a+b+c = 3$, atunci $a = b = c = 1$ şi $d = e = 3$. Dacă $a+b+c = 4$, atunci $a = b = 1$, $c = 2$, deci $4 \cdot \dfrac{5}{2} + \dfrac{4}{d} = 10$, de unde $\dfrac{4}{d} = 0$, imposibil. Continuând în aceeaşi manieră, găsim numerele $11133, 22266$ şi 33399.

G259. *Descompuneţi numărul $5^{2015} - 1$ în produs de trei factori mai mari decât 5^{400}.*

Constantin Dragomir, Piteşti

Soluţie. Notăm $m = 5^{201}$, $p = 5m^2 = 5^{403}$; atunci $5^{2015} - 1 = p^5 - 1 = (p-1)(p^4+p^3+p^2+p+1)$. Însă $p^4+p^3+p^2+p+1 = (p^2+3p+1)^2 - 5p(p+1)^2 =$

$(p^2+3p+1)^2 - 25m^2(p+1)^2 = A \cdot B$, unde $A = p^2+3p+1-5m(p+1)$, iar $B = p^2+3p+1+5m(p+1)$. Astfel, $5^{2015}-1 = (p-1)\cdot A \cdot B$ şi se observă uşor că fiecare dintre cei trei factori este mai mare decât 5^{400}.

G260. *Fie a, b, c şi d numere naturale nenule disctincte, astfel încât numărul $abcd$ să fie pătrat perfect. Demonstraţi că numărul $a^4+b^4+c^4+d^4$ se poate scrie ca sumă de cinci pătrate perfecte nenule.*

Dan Nedeianu, Drobeta-Turnu Severin

Soluţie. Este adevărată identitatea $a^4+b^4+c^4+d^4 = (a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2+(ab-cd)^2+(ab-cd)^2+(2k)^2$, unde $k^2 = abcd$, $k \in \mathbb{N}^*$. Din faptul că a, b, c, d sunt distincte, primele două paranteze vor fi nenule. În cazul în care $ab-cd=0$, vom avea că $ad-bc \neq 0$ (situaţia $ab-cd=0=ad-bc$ conduce la $b=d$, imposibil) şi atunci $a^4+b^4+c^4+d^4 = (a^2-d^2)^2+(b^2-c^2)^2+(ad-bc)^2+(ad-bc)^2+(2k)^2$.

G261. *Determinaţi numerele $x \in [1,\infty)$ cu proprietatea că $[(x-1)^3] = [x-1]^3 = [(x-1)(x-2)(x-3)]$, unde $[a]$ este partea întreagă a numărului real a.*

Alexandru Blaga, Satu Mare

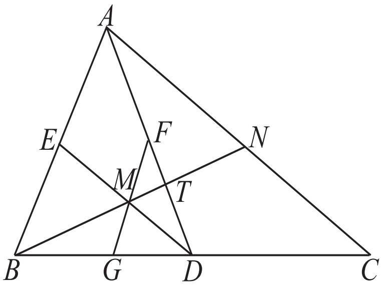
Soluţie. Dacă $x \in [1,2)$, atunci $[(x-1)^3] = [x-1]^3 = 0$ şi, cum $0 \le (x-1)(x-2)(x-3) = 4(x-1)\frac{2-x}{2}\cdot\frac{3-x}{2} \le \frac{4}{27}\left(x-1+\frac{2-x}{2}+\frac{3-x}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}$, avem că $[(x-1)(x-2)(x-3)] = 0$. Rezultă că orice număr $x \in [1,2)$ convine. Se verifică faptul că $x=2$ nu convine. Dacă $x \in (2,3]$, atunci $[(x-1)^3] \ge 1$, în timp ce $[(x-1)(x-2)(x-3)] \le 0$. Dacă $x \in (3,4]$, atunci $[(x-1)^3] \ge 8$, iar $[(x-1)(x-2)(x-3)] \le 6$. Dacă $x \in (n, n+1]$, cu $n \ge 4$, atunci $[(x-1)^3] \ge (n-1)^3$, în timp ce $[(x-1)(x-2)(x-3)] \le n(n-1)(n-2)$, iar $(n-1)^3 > n(n-1)(n-2)$.

În final, numerele căutate sunt cele din intervalul $[1,2)$.

G262. *Fie ABC un triunghi, iar D, F şi N mijloacele segmentelor BC, AD respectiv AC. Considerăm punctele $E \in (AB)$ şi $G \in (BD)$ şi notăm $\{M\} = DE \cap FG$. Dacă punctele B, M şi N sunt coliniare, arătaţi că dreptele AD şi EG sunt paralele.*

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

Soluţie. Aplicăm de trei ori teorema lui Menelaus: în $\triangle ADC$ (cu transversala $B-T-N$, unde $\{T\} = BN \cap AD$), în $\triangle BDT$ (cu transversala $G-M-F$) şi în $\triangle ABT$ (cu transversala $E-M-D$). Obţinem: $\frac{AT}{TD}\cdot\frac{DB}{BC}\cdot\frac{CN}{NA} = 1$, de unde $\frac{AT}{TD} = 2$ şi, de aici, $\frac{DF}{FT} = 3$ şi $\frac{AD}{DT} = 3$; $\frac{BG}{GD}\cdot\frac{DF}{FT}\cdot\frac{TM}{MB} = 1$, deci $\frac{BG}{GD} = \frac{MB}{3MT}$; în sfârşit, $\frac{BE}{EA}\cdot\frac{AD}{DT}\cdot\frac{TM}{MB} = 1$, prin urmare $\frac{BE}{EA} = \frac{MB}{3MT}$.

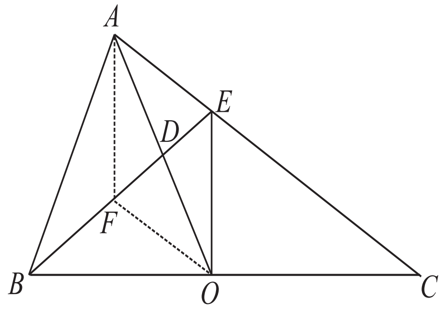


Deducem că $\frac{BG}{GD} = \frac{BE}{EA}$ şi, conform reciprocei teoremei lui Thales, $AD \| EG$.

G263. *Se consideră triunghiul ABC, O – mijlocul laturii BC, D – mijlocul segmentului AO, iar $BD \cap AC = \{E\}$. Demonstraţi că $OE = 2DE$ dacă şi numai dacă unghiul $\widehat{A}$ este drept.*

Geanina Hăvârneanu, Iaşi

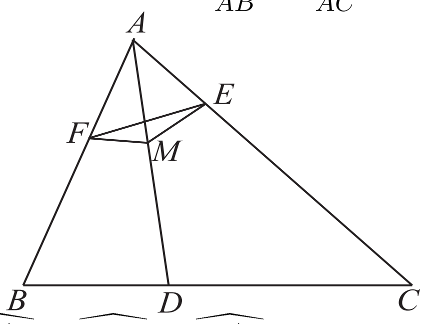
Soluţie. Notăm cu F simetricul punctului E faţă de D. Aplicând teorema lui Menelaus în $\triangle AOC$ cu transversala $B-D-E$, obţinem că $\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{1}{2}$. Apoi, cu teorema lui Menelaus în $\triangle BCE$ cu transversala $A-D-O$, găsim că $\dfrac{DE}{BD}=\dfrac{1}{3}$; de aici, rezultă că F este mijlocul lui BE. Pe de altă parte, $AEOF$ este paralelogram (diagonalele se înjumătăţesc), prin urmare $AF=EO$. Avem: $OE=2DE\Leftrightarrow AF=FE\Leftrightarrow AF=\dfrac{1}{2}BE\Leftrightarrow m(\widehat{A})=90^\circ$, deoarece mediana unui triunghi este egală cu jumătatea laturii pe care cade dacă şi numai dacă pleacă dintr-un unghi drept.



G264. *Considerăm triunghiul ABC, D un punct situat pe latura BC, iar E şi F sunt puncte pe AC, respectiv AB, astfel încât EF este antiparalelă la BC. Cercurile circumscrise triunghiurilor BDF şi CDE se intersectează a doua oară în punctul M. Demonstraţi că $ME=MF$ dacă şi numai dacă AD este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$.*

Bogdan Ioniţă, Bucureşti şi Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Deoarece EF şi BC sunt antiparalele, avem că $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AF}{AC}$, deci $AE\cdot AC=AF\cdot AB$, adică punctul A are aceeaşi putere faţă de cercurile circumscrise triunghiului BDF şi CDE. Deducem că axa radicală a celor două cercuri este AD, iar punctul M va fi situat pe dreapta AD. Din inscriptibilitatea patrulaterelor $BDMF$ şi $CDME$ rezultă că $m(\widehat{FME})+m(\widehat{FAE})=m(\widehat{FMA})+m(\widehat{EMA})+m(\widehat{BAC})=m(\widehat{B})+m(\widehat{C})+m(\widehat{BAC})=180^\circ$, aşadar patrulaterul $AFME$ este inscriptibil. Atunci $\widehat{MFE}\equiv\widehat{MAE}$ şi $\widehat{MEF}\equiv\widehat{MAF}$, prin urmare $ME=MF$ dacă şi numai dacă AD este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$.



G265. *Considerăm triunghiul ABC înscris în cercul $\mathcal{C}$. Cercul $\mathcal{C}_1$ este tangent cercului $\mathcal{C}$ şi segmentelor AB şi BC în punctele M, L şi respectiv K. Dreapta AC intersectează cercurile circumscrise triunghiurilor AML şi CMK în R şi S, iar punctele E şi F sunt mijloacele arcelor $\widehat{RM}$ şi $\widehat{SM}$. Arătaţi că punctele A, C, E şi F sunt conciclice.*

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

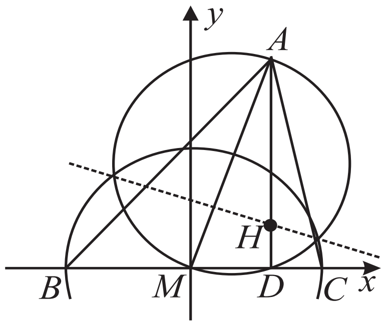
Soluţie. Notăm cu P al doilea punct de intersecţie a cercurilor circumscrise triunghiurilor AML şi CMK. Avem: $m(\widehat{BLP})+m(\widehat{BKP})=m(\widehat{AMP})+m(\widehat{CMP})=180^\circ-m(\widehat{B})=m(\widehat{BLK})+m(\widehat{BKL})$. Deducem că $P\in KL$ şi $m(\widehat{AMP})=m(\widehat{BLK})=90^\circ-\dfrac{1}{2}m(\widehat{B})$, iar $m(\widehat{CMP})=m(\widehat{BKL})=90^\circ-\dfrac{1}{2}m(\widehat{B})$, adică MP este bisectoarea unghiului $\widehat{AMC}$. Din ipoteză, CF şi AE sunt bisectoarele unghiurilor $\widehat{ACM}$, respectiv $\widehat{CAM}$, aşadar dreptele MP, AE şi CF sunt concurente într-un punct I. Folosind puterea punctului faţă de cerc, obţinem că $MI \cdot IP = AI \cdot IE = CI \cdot IF$, prin urmare punctele A, C, E şi F vor fi conciclice.

B. Nivel liceal

L256. *Fie M mijlocul laturii BC a triunghiului ABC. Arătaţi că axa radicală a cercurilor de diametre BC şi AM trece prin ortocentrul triunghiului ABC.*

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

Soluţia 1 (dată de autorul problemei şi de **Corneliu-Mănescu-Avram**, Ploieşti). Presupunem, fără a restrânge generalitatea, că $AB > AC$. Fie $AD \perp BC$, $D \in BC$ şi notăm cu H punctul în care AD intersectează axa radicală din enunţ. Raportăm planul la un reper cu originea în M şi care are dreapta BC ca axă Ox; fie $A(a, b)$, cu $b > 0$. Cercul de diametru BC este $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 1$, iar cercul de diametru AM este $\mathcal{C}_1$: $x^2 + y^2 - ax - by = 0$. Ecuaţia axei radicale este $ax + by = 1$, prin urmare $x_H = a$ şi $y_H = \dfrac{1 - a^2}{b}$. Pentru $a \neq \pm 1$, panta dreptei CH este $m_{CH} = -\dfrac{a+1}{b}$, panta dreptei AB este $m_{AB} = \dfrac{b}{a+1}$, prin urmare $CH \perp AB$ şi, astfel, H este ortocentrul $\triangle ABC$. Dacă $a = 1$, atunci $C = H$ şi proprietatea este evidentă; analog pentru $a = -1$.



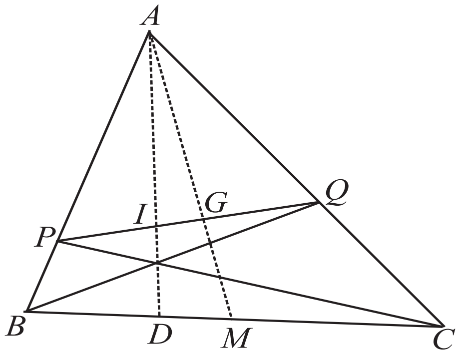
Soluţia 2 (dată de **Ioan Viorel Codreanu**, Satulung, Maramureş, **Titu Zvonaru**, Comăneşti, **Neculai Stanciu**, Buzău şi **Daniel Văcaru**, Piteşti). Fie H ortocentrul triunghiului şi P mijlocul medianei AM. Trebuie să arătăm că punctul H are aceeaşi putere faţă de cele două cercuri, deci că $HP^2 - \frac{1}{4}AM^2 = HM^2 - \frac{1}{4}BC^2 (1)$. Teorema medianei aplicată în triunghiurile AHM, BHC şi ABC arată că $4HP^2 = 2AH^2 + 2HM^2 - AM^2$, $4HM^2 = 2BH^2 + 2CH^2 - BC^2$, respectiv $4AM^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$. Înlocuind în (1) şi efectuând callculele, această relaţie revine la $2(AH^2 + a^2) = BH^2 + b^2 + CH^2 + c^2$ şi această egalitate este adevărată, deoarece $AH = 2R\cos A$, $a = 2R\sin A$ şi $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.

L257. *Fie ABC un triunghi în care $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ şi $c < a < b$. Dreapta lui Nagel (determinată de centrul cercului înscris şi de centrul de greutate) intersectează laturile AB şi AC în punctele P, respectiv Q. Demonstraţi că dreptele BQ şi CP se intersectează pe bisectoarea din A dacă şi numai dacă a este media armonică a numerelor b şi c.*

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Fie I centrul cercului înscris, G centrul de greutate, $D \in (BC)$ piciorul bisectoarei din A şi M mijlocul lui BC. Avem: $BD = \dfrac{ac}{b+c}$, $CD = \dfrac{ab}{b+c}$, $DM = BM - BD = \dfrac{a(b-c)}{2(b+c)}$ şi, folosind teorema lui Van Aubel, obţinem că $\dfrac{AI}{ID} = \dfrac{b+c}{a}$, iar

$\dfrac{AG}{GM} = 2$. Notăm $x = \dfrac{AP}{PB}$, $y = \dfrac{AQ}{QC}$. Aplicând relaţia (R_2) din *RecMat 2/2011*, p. 108 pentru $\triangle ABM$, apoi pentru $\triangle ADC$, obţinem:



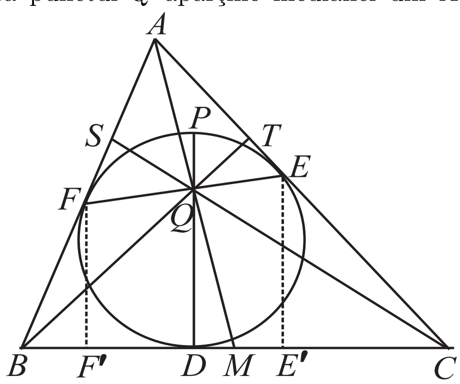
$$\frac{AI}{ID} = \frac{BM \cdot \frac{AP}{PB} \cdot \frac{AG}{GM}}{BD \cdot \dfrac{AP}{PB} + DM \cdot \dfrac{AG}{GM}} \Rightarrow x = \frac{b-c}{a-c},$$

respectiv $\dfrac{AG}{GM} = \dfrac{DC \cdot \frac{AI}{ID} \cdot \frac{AQ}{QC}}{DM \cdot \frac{AI}{ID} + MC \cdot \frac{AQ}{QC}} \Rightarrow y = \dfrac{b-c}{b-a}$. Cu teorema lui Ceva (directă şi reciprocă), rezultă că dreptele BQ, CP şi AD sunt concurente dacă şi numai dacă $\dfrac{DB}{DC} \cdot \dfrac{QC}{QA} \cdot \dfrac{PA}{PB} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{c}{b} \cdot \dfrac{b-a}{b-c} \cdot \dfrac{b-c}{a-c} = 1 \Leftrightarrow a = \dfrac{2bc}{b+c}$.

L258. *Cercul înscris în triunghiul ABC este tangent laturilor BC, CA şi AB în punctele D, E respectiv F. Perpendiculara în D pe BC taie EF în punctul Q şi cercul înscris în P. Dacă $\{T\} = BQ \cap AC$ şi $\{S\} = CQ \cap AB$, demonstraţi că punctele S, P şi T sunt coliniare.*

Bogdan Ioniţă, Bucureşti

Soluţia 1 (dată de autorul problemei şi de **Neculai Roman**, Mirceşti)**.** Folosim notaţiile uzuale în triunghi. Demonstrăm că punctul Q aparţine medianei din A a triunghiului ABC. Fie $\{M\} = AQ \cap BC$, $E' = Pr_{BC}E$ şi $F' = Pr_{BC}F$. Avem: $F'D = BD - BF' = (p-b) - (p-b)\cos B = 2(p-b)\sin^2 \dfrac{B}{2} = \dfrac{2(p-a)(p-b)(p-c)}{ac}$ şi, analog, $E'D = \dfrac{2(p-a)(p-b)(p-c)}{ab}$. Aplicând relaţia (R_2) din *RecMat 1/2005*, p. 15, obţinem că $\dfrac{AF}{AB} \cdot \dfrac{BM}{MC} \cdot \dfrac{AC}{AE} \cdot \dfrac{QE}{QF} = 1$, deci $\dfrac{BM}{MC} = \dfrac{c}{p-a} \cdot \dfrac{p-a}{b} \cdot \dfrac{2(p-a)(p-b)(p-c)}{ac} \cdot \dfrac{ab}{2(p-a)(p-b)(p-c)} = 1$, aşadar $BM = MC$.



Folosind acum relaţia (R_2) din *RecMat 1/2005*, p. 15, rezultă că

$\dfrac{AQ}{QM} = \dfrac{a\frac{p-a}{p-b} \cdot \frac{p-a}{p-c}}{\frac{a}{2} \cdot \frac{p-a}{p-b} + \frac{a}{2} \cdot \frac{p-a}{p-c}} = \dfrac{2(p-a)}{a}$. Cu teorema lui Menelaus în $\triangle AMC$, cu transversala $B - Q - T$, avem că $\dfrac{BM}{BC} \cdot \dfrac{TC}{TA} \cdot \dfrac{QA}{QM} = 1$, deci $\dfrac{TA}{TC} = \dfrac{p-a}{a}$. Analog se arată că $\dfrac{AS}{SB} = \dfrac{p-a}{a}$, prin urmare $ST \| BC$.

Rămâne de demonstrat că distanţa dintre dreptele paralele BC şi ST este $2r$. Acest lucru revine la $\dfrac{p-a}{a} = \dfrac{h_a - 2r}{2r} \Leftrightarrow \dfrac{p}{a} = \dfrac{h_a}{2r} \Leftrightarrow 2pr = ah_a$, egalitate adevărată.

Soluţia 2 (**Corneliu Mănescu-Avram**, Ploieşti)**.** Raportăm planul la un reper cartezian având cercul înscris în triunghi drept cerc unitate şi axa Ox paralelă cu BC; avem: $B(b,-1)$, $C(c,-1)$, $D(0,-1)$, $P(0,1)$, cu $b<-1$, $c>1$. Apoi, $E(e,\sqrt{1-e^2})$, $F(f,\sqrt{1-f^2})$, cu $0<e<1$, $-1<f<0$. Ecuaţiile tangentelor la cerc prin E şi F sunt $ex+\sqrt{1-e^2}\cdot y=1$, $fx+\sqrt{1-f^2}\cdot y=1$ şi impunem condiţiile ca ele să treacă prin B, respectiv prin C; obţinem $e=\dfrac{2c}{c^2+1}$, $f=\dfrac{2b}{b^2+1}$, iar ecuaţia dreptei EF va fi $(b+c)x+(bc-1)y=bc+1$.

Perpendiculara în D pe BC are ecuaţia $x=0$ şi taie EF în $Q\left(0,\dfrac{bc+1}{bc-1}\right)$. Dreptele AC şi BQ au ecuaţiile $2cx+(c^2-1)y=c^2+1$, respectiv $2cx+(bc-1)y=bc+1$ şi se intersectează în $T\left(\dfrac{1}{c},1\right)$. Analog, se obţine că $S\left(\dfrac{1}{b},1\right)$. Se constată că punctele S,P,T aparţin dreptei $y=1$ (tangenta la cercul înscris paralelă cu BC) ceea ce încheie soluţia problemei.

L259. *Considerăm mulţimea* $A=\{1,2,3,\ldots,10\}$. *Pentru orice submulţime nevidă* X *a lui* A, *definim*

$$M(X)=\{t|t=xy,x\in X,y\in Y=A\backslash X\}.$$

Arătaţi că $\max\limits_{\emptyset\neq X\subset A}|M(X)|=24$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Fie $a=|X|$, $b=|Y|$, cu $a,b=\overline{1,10}$, $a+b=10$; atunci $|M(X)|\leq ab$. Dacă $a\leq 4$, atunci $ab\leq 24$, prin urmare $M(X)$ ar putea avea 25 de elemente numai dacă $a=b=5$ şi toate produsele xy cu $x\in X$, $y\in Y$ sunt distincte. Vom arăta că acest lucru nu este posibil.

Fie $X\subset A$ cu $|X|=5$. Deosebim situaţiile:

i) Atât X, cât şi Y conţin elemente de forma n şi $2n$: există $x,2x\in X$ şi $y,2y\in Y$; atunci $x\cdot 2y=y\cdot 2x$, deci $|M(X)|\leq 24$.

ii) Cel puţin una dintre mulţimile X şi Y (fie aceasta X) nu conţine nicio o pereche de forma $(n,2n)$. Dacă X conţine cel puţin două numere pare $2x,2y$, atunci $x,y\in Y$ şi avem $2x\cdot y=2y\cdot x$, deci $|M(X)|\leq 24$. Dacă X nu conţine numere pare, atunci $X=\{1,3,5,7,9\}$, $Y=\{2,4,6,8,10\}$ şi $1\cdot 6=3\cdot 2$, deci $|M(X)|\leq 24$. În sfârşit, dacă X conţine un singur număr par, luăm fiecare situaţie în parte. De exemplu, dacă $X=\{8,\ldots\}$ şi $Y=\{2,4,6,8,10,\ldots\}$, avem cazurile: 1) $1,3\in X$; atunci $2,6\in Y$ şi $1\cdot 6=3\cdot 2$, deci $|M(X)|\leq 24$; 2) $1\in X,3\in Y$; atunci $X=\{8,1,5,7,9\}$, $Y=\{2,4,6,10,2\}$ şi $1\cdot 10=5\cdot 2$, deci $|M(X)|\leq 24$; 3) $1,3\in Y$; atunci $X=\{8,3,5,7,9\}$, $Y=\{2,4,6,10,1\}$ şi $3\cdot 10=5\cdot 6$, deci $|M(X)|\leq 24$. Analog se procedează în celelalte situaţii.

Am arătat că $|M(X)|\leq 24$. Considerând $X=\{2,3,4,6,10\}$ şi $Y=\{1,5,7,8,9\}$, se constată că $|M(X)|=24$, prin urmare $\max\limits_{\emptyset\neq X\subset A}|M(X)|=24$.

Notă. Au rezolvat problema **Titu Zvonaru**, Comăneşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău.

L260. *Spunem că numerele raţionale nenule* $a_1,a_2,\ldots,a_n$ *formează un grup unit dacă* $a_1+2a_2+\ldots+na_n=0$ *şi* $n!\cdot a_1a_2\cdots a_n$ *este număr natural pătrat perfect.*

Arătaţi că există o infinitate de numere naturale n pentru care există grupuri unite cu n elemente.

Alexandru Blaga, Satu Mare

Soluţia 1 (a autorului)**.** Vom arăta că există grupuri unite cu n termeni pentru toate numerele n de forma $n = 3p$, $p \in \mathbb{N}^*$. Pentru $p = 1$, putem considera $a_1 = 4$, $a_2 = -1$, $a_3 = -\frac{2}{3}$. Apoi, când $k = \overline{1,p}$, luăm $a_{3k+1} = \frac{1}{3k+1} \cdot a_1$, $a_{3k+2} = \frac{2}{3k+2} \cdot a_2$, $a_{3k+3} = \frac{3}{3k+3} \cdot a_3$ şi avem: $a_1 + 2a_2 + \ldots + 3pa_{3p} = p(a_1 + 2a_2 + 3a_3) = 0$, $(3p)! \cdot a_1 a_2 \ldots a_{3p} = (a_1 \cdot 2a_2 \cdot 3a_3)^p$, număr care este pătrat perfect.

Soluţia 2 (**Ioan Viorel Codreanu**, Satulung, Maramureş, **Gheorghe Stoica**, Petroşani)**.** Fie $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}^*$ şi $a_i = (-1)^i \cdot \frac{1}{i}$, $i = \overline{1, 4k}$. Avem $\sum\limits_{i=1}^{4k} ia_i = 0$ şi $(4k)! \prod\limits_{i=1}^{4k} \left((-1)^i \cdot \frac{1}{i}\right) = 1$ este pătrat perfect.

Soluţia 3 (**Daniel Văcaru**, Piteşti, **Titu Zvonaru**, Comăneşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău)**.** Considerăm $n = 4k$ şi $a_1 = 4k$, $a_{4k} = -1$, $a_2 = 4k - 1$, $a_{4k-1} = -2, \ldots, a_{2k} = 2k+1$, $a_{2k+1} = -2k$. Evident că prima relaţie este îndeplinită, iar $n! a_1 a_2 \ldots a_n = (-1)^{2k}(n!)^2 = (n!)^2$.

L261. *Într-un şir de numere reale, un termen se numeşte acceptabil dacă poate fi scris ca suma câtorva termeni (nu neapărat distincţi) ai şirului.*

a) *Dacă toţi termenii şirului sunt numere naturale, cel puţin două relativ prime, atunci toţi termenii şirului, cu excepţia unui număr finit, sunt acceptabili.*

b) *Daţi exemplu de şir care nu are niciun termen acceptabil.*

Radu Miron, elev, Iaşi

Soluţie. a) Fie p, q termeni ai şirului, cu $p, q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$. Pentru $n \in \mathbb{N}$ suficient de mare avem că $n = xp + yp$, cu $x, y \in \mathbb{N}$. Rezultă că toţi termenii $x_i \geq n$ sunt acceptabili.

b) Considerăm $x_n = 1 + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Cum $x_i + x_j > 2 \geq x_k$, $\forall i, j, k \in \mathbb{N}^*$, şirul considerat nu are termeni acceptabili.

Notă. Au rezolvat problema **Titu Zvonaru**, Comăneşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău.

L262. *Considerăm şirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin: $x_0 = 0, x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 6$, iar $x_{n+4} = 2x_{n+3} + x_{n+2} - 2x_{n+1} - x_n$. Arătaţi că $\frac{x_1^2}{1^2} + \frac{x_2^2}{2^2} + \ldots + \frac{x_n^2}{n^2} = \frac{x_n x_{n+1}}{n(n+1)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.*

Constantin Dragomir, Piteşti

Soluţie. Se arată prin inducţie că $x_n = nF_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, unde F_n este al n-lea termen al şirului Fibonacci. Atunci relaţia de demonstrat revine la $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$ şi se demonstrează uşor, tot prin inducţie.

Notă. Am primit soluţii corecte de la **Ioan Viorel Codreanu**, Satulung, Maramureş, **Daniel Văcaru**, Piteşti, **Corneliu Mănescu-Avram**, Ploieşti, **Titu Zvonaru**, Comăneşti, **Neculai Stanciu**, Buzău şi **Gheorghe Stoica**, Petroşani.

L263. *Demonstraţi că dacă a, b, c sunt numere reale strict pozitive, atunci este adevărată inegalitatea*

$$\frac{8}{9}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)+\frac{abc}{2(a^3+b^3+c^3)}\geq\frac{3}{2}.$$

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Folosind identităţile $\left(\sum\frac{a}{b+c}\right)-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\sum\frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}$ şi $(\sum a^3)-3abc=\frac{1}{2}(\sum a)(\sum(a-b)^2)$, inegalitatea de demonstrat se scrie succesiv:

$$\begin{aligned}\frac{8}{9}\left(\sum\frac{a}{b+c}-\frac{3}{2}\right)&\geq\frac{1}{6}-\frac{abc}{2(a^3+b^3+c^3)}\\ &\Leftrightarrow\frac{4}{9}\sum\frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}\geq\frac{1}{12}\cdot\frac{a+b+c}{a^3+b^3+c^3}\sum(a-b)^2\\ &\Leftrightarrow 16\sum\frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}\geq 3\frac{a+b+c}{a^3+b^3+c^3}\sum(a-b)^2.\end{aligned}$$

Observăm că este suficient să demonstrăm că

$$\frac{16(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}\geq\frac{3(a+b+c)(a-b)^2}{a^3+b^3+c^3}. \tag{1}$$

Dacă $a=b$, în (1) avem egalitate. Presupunem că $a\neq b$ şi atunci inegalitatea (1) devine

$$16(a^3+b^3+c^3)\geq 3(a+b+c)(c^2+ab+bc+ca)\Leftrightarrow$$
$$13(a^3+b^3+c^3)+3(a^3+b^3)\geq 3c^2(a+b)+3\sum a\sum ab. \tag{2}$$

Cu inegalitatea lui Cebîşev şi binecunoscuta $\sum a^2\geq\sum ab$, obţinem:

$$9\sum a^3\geq 3\sum a\sum a^2\geq 3\sum a\sum ab, \tag{3}$$

iar cu inegalitatea $MA\geq MG$ avem

$$a^3+c^3+c^3\geq 3ac^2, \tag{4}$$
$$b^3+c^3+c^3\geq 3bc^2. \tag{5}$$

Adunând inegalităţile (3), (4), (5) şi $6a^3+6b^3>0$, rezultă exact inegalitatea (2). Avem egalitate dacă şi numai dacă $a=b=c$.

Notă. S-a primit soluţie corectă de la **Ioan Viorel Codreanu**, Satulung, Maramureş.

L264. *Dacă $A, B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ sunt două matrice care comută şi $det(A^2-AB+B^2)-det(A^2+AB+B^2)+2=6detAB$, arătaţi că $det(A-B)=0$.*

Florin Stănescu, Găeşti

Soluţie. Considerăm polinomul $f(X) = \det(A + XB) = \det A + aX + bX^2 + (\det B)X^3 \in \mathbb{Z}[X]$. Dacă $\varepsilon \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ este rădăcină cubică a unităţii, atunci $E = \det(A^2 - AB + B^2) - \det(A^2 + AB + B^2) = \det(A + \varepsilon B)\det(A + \overline{\varepsilon}B) - \det(A - \varepsilon B) \cdot (A - \overline{\varepsilon}B) = f(\varepsilon)f(\overline{\varepsilon}) - f(-\varepsilon)f(-\overline{\varepsilon})$. După efectuarea calculelor, găsim că $E = 4\det A \cdot \det B - (2a\det A + 2b \cdot \det B + 2ab)$. Condiţia din enunţ devine $(a + \det B)(b + \det A) = 1$ şi, cum $a, b, \det A$ şi $\det B$ sunt numere întregi, atunci $a = 1 - \det B$ şi $B = 1 - \det A$ sau $a = -1 - \det B$ şi $b = -1 - \det A$. În fiecare caz, obţinem că $\det(A - B) = f(-1) = 0$.

L265. *Fie $a_1, \ldots, a_m$ elementele idempotente din inelul $\mathbb{Z}_n$. Câte dintre sumele $a_i + a_j$, $1 \leq i < j \leq n$, sunt tot elemente idempotente?*

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Fie $n = p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k}$ descompunerea în produs de factori primi a lui n, unde $p_1 < \ldots < p_k$ sunt numere prime şi $a_1, \ldots, a_k$ sunt numere întregi pozitive. Se ştie că inelul $\mathbb{Z}_n$ este izomorf cu produsul direct $\mathbb{Z}_{p_1^{a_1}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p_k^{a_k}}$, prin urmare putem rezolva problema cu acelasi enunţ referitoare la acest inel. Elementele idempotente ale produsului direct sunt de forma $(x_1, \ldots, x_k)$, unde fiecare x_i este 0 sau 1 în inelul $\mathbb{Z}_{p_i^{a_i}}$ (nu vom folosi notaţii speciale pentru elementele din inele de clase de resturi). Prin urmare $(x_1, \ldots, x_k) + (y_1, \ldots, y_k)$ este tot element idempotent, dacă $x_i + y_i$ este 0 sau 1 în $\mathbb{Z}_{p_i^{a_i}}$ pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Distingem două cazuri. Întâi, să presupunem că $p_1^{a_1}$ nu este egal cu 2 (adică fie că n este impar, fie că, dacă este par, atunci se divide cu 4), ceea ce înseamnă că $1 + 1 \neq 0$ în $\mathbb{Z}_{p_1^{a_1}}$. De asemenea, $1 + 1 \neq 0$ în fiecare $\mathbb{Z}_{p_i^{a_i}}$ (căci $p_2, \ldots, p_k$ sigur nu sunt egale cu 2). Asta înseamnă că fiecare sumă $x_i + y_i$ poate fi egală cu 0 sau 1 în trei moduri ($x_i = y_i = 0$, sau $x_i = 0$ şi $y_i = 1$, sau $x_i = 1$ şi $y_1 = 0$), prin urmare $(x_1, \ldots, x_k) + (y_1, \ldots, y_k)$ poate fi element idempotent în 3^n moduri, deci numărul perechilor ordonate $(x_1, \ldots, x_k), (y_1, \ldots, y_k)$ de elemente idempotente din $\mathbb{Z}_{p_1^{a_1}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p_k^{a_k}}$ a căror sumă este tot un element idempotent este

$$\frac{3^k - 1}{2} + 1 = \frac{3^k + 1}{2},$$

deoarece suma $(0, \ldots, 0) + (0, \ldots, 0)$ este singura care se numără o singură dată.

Al doilea caz este cel în care $p_1^{a_1} = 2$, adică atunci când n se divide cu 2, dar nu cu 4. În acest caz, $x_1 + y_1$ poate fi 0 sau 1 în patru moduri (practic în toate cazurile, deoarece $1 + 1 = 0$ în $\mathbb{Z}_{p_1^{a_1}} = \mathbb{Z}_2$), iar singurele sume numărate astfel doar o dată sunt $(0, \ldots, 0) + (0, \ldots, 0)$ şi $(1, 0, \ldots, 0) + (1, 0, \ldots, 0)$. Aşadar acum există

$$\frac{4 \cdot 3^{k-1}}{2} + 2 = 2 \cdot 3^{k-1} + 1$$

perechi distincte de elemente idempotente a căror sumă este tot un element idempotent.