PROBLEME ŞI SOLUŢII

Soluţiile problemelor propuse în nr. 1/2014

Clasele primare

P.283. *Scrieţi* $+$ *sau* $-$ *în fiecare pătrăţel din* $1\square 2\square 3\square 4 = 17\square 1\square 2\square 4$ *astfel încât să obţineţi o egalitate. Câte soluţii există? Explicaţi!*

(*Clasa I*) **Codruţa Filip, elevă, Iaşi**

Soluţie. Expresia $1\square 2\square 3\square 4$ are valoarea maximă 10, când în fiecare casetă scriem semnul $+$. Expresia $17\square 1\square 2\square 4$ are valoarea minimă 10, când în fiecare casetă scriem semnul $-$. În concluzie, avem o singură soluţie: $1+2+3+4 = 17-1-2-4$.

P284. *Se consideră şirul de cifre:* $0, 1, 2, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 2, 1, 0, \ldots$ *De câte ori apare cifra* 1 *în primele* 60 *de cifre scrise?*

(*Clasa I*) **Teodor Pătraşcu, elev, Iaşi**

Soluţie. În primele 60 de cifre scrise, gruparea $0, 1, 2, 3, 2, 1$ se repetă de 10 ori. Cifra 1 apare de $\underbrace{2+2+\ldots+2}_{\text{de 10 ori}} = 20$ ori.

P285. *Considerăm şirul crescător al numerelor de două cifre cu cifra unităţilor* 5. *Cât trebuie să adăugăm la suma unităţilor numerelor din şir pentru a obţine numărul din mijlocul lui?*

(*Clasa I*) **Mihaela Buleandră, elevă, Iaşi**

Soluţie. Şirul crescător al numerelor de două cifre cu cifra unităţilor 5 este $15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85$ şi 95. Suma unităţilor acestor numere este 45. Pentru a obţine numărul 55, la suma unităţilor trebuie să adăugăm 10.

P286. *Refaceţi adunarea* $\overline{2**}+\overline{3**} = 678$, *ştiind că este cu trecere peste ordinul unităţilor şi al zecilor. Scrieţi toate soluţiile.*

(*Clasa a II-a*) **Teodora Pricop, elevă, Iaşi**

Soluţie. Deoarece cifra unităţilor sumei este 8, înseamnă că termenii sumei sunt de forma $\overline{2*9}$, $\overline{3*9}$. Soluţiile sunt: $289+389 = 678$, $279+399 = 678$, $299+379 = 678$.

P287. *Pe un jeton sunt scrise numerele* $1, 2, 3, 4, 5$ *într-o ordine dată, fără să se repete. Pentru fiecare două numere alăturate se face suma lor. Se adună cele patru rezultate obţinute şi suma lor este ,,codul jetonului". Cum trebuie scrise numerele pentru a obţine un jeton cu codul* 25*? (Este suficient un singur exemplu.)*

(*Clasa a II-a*) **Cristina Chelaru, elevă, Iaşi**

Soluţie. O scriere poate fi $1, 3, 5, 2, 4$. Într-adevăr, $1+3 = 4$, $3+5 = 8$, $5+2 = 7$, $2+4 = 6$, $4+8+7+6 = 25$.

P288. *Câte numere de două cifre trebuie alese astfel încât să fim siguri că printre ele găsim două numere cu aceeaşi sumă a cifrelor.*

(*Clasa a II-a*) **Marian Ciuperceanu, Craiova**

Soluţie. Sumele cifrelor numerelor de două cifre sunt: $1, 2, 3, \ldots, 18$. Dacă luăm 19 numere de două cifre, atunci găsim printre ele două numere care au aceeaşi sumă a cifrelor, conform principiului cutiei.

P289. *Pentru fiecare şapte mere pe care le culege, un băiat primeşte de la bunicul lui două nuci. Este posibil ca, la sfârşit, după ce a cules ultimele şapte mere şi a primit două nuci, să aibă* 234 *fructe? Dar* 431*?*

(*Clasa a III-a*) **Denisa Apetrei, elevă, Iaşi**

Soluţie. Fructele băiatului pot fi grupate câte $7 + 2 = 9$. Observăm că $9 \times 26 = 234$, $431 = 9 \times 47 + 8$. Poate să aibă 234 fructe, dar 431 nu.

P290. *Un salariat are tichete valorice de* $1, 3, 9$ *şi* 27 *lei, cel puţin câte unul de fiecare fel. Cum poate să achite suma de* 79 *lei utilizând fiecare tichet cel puţin o dată?*

(*Clasa a III-a*) **Maria Bîzdîgă, elevă, Iaşi**

Soluţie. $79 = 2 \times 27 + 2 \times 9 + 2 \times 3 + 1$.

P291. *Un elev trebuie să rezolve* 42 *de probleme în cinci zile. În fiecare zi rezolvă mai multe probleme decât în ziua precedentă, iar în ziua a patra rezolvă de cinci ori mai multe probleme decât în prima zi. Care este numărul maxim de probleme pe care le poate rezolva în a cincea zi?*

(*Clasa a III-a*) **Alexandra-Mădălina Ciobanu, elevă, Iaşi**

Soluţie. Dacă în prima zi ar rezolva 3 probleme, atunci numărul total de probleme rezolvate este minim $3 + 4 + 5 + 15 + 16 = 43 > 42$, imposibil.

Rămân situaţiile: a) $1 < 2 < 3 < 5 < 31$; b) $2 < 3 < 4 < 10 < 23$. În concluzie, numărul maxim de probleme pe care le poate rezolva în a cincea zi este 31.

P292. *Un elev are* 11 *bile albe numerotate de la* 1 *la* 11*,* 11 *bile verzi numerotate de la* 12 *la* 22 *şi* 11 *bile negre numerotate de la* 23 *la* 33*. Vom numi tripletă orice grupă de trei bile având culori diferite, cu numerele scrise pe ele în ordine crescătoare. Câte triplete cu proprietatea că suma numerelor de pe bilele componente este* 51 *se pot forma?*

(*Clasa a III-a*) **Adelin Bechet, elev, Iaşi**

Soluţie. Tripletele sunt: $(1, 22, 28), (1, 21, 29), \ldots, (1, 17, 33)$; $(2, 22, 27), (2, 21, 26), \ldots, (2, 16, 33)$; $\ldots$; $(11, 17, 23), (11, 16, 24), \ldots, (11, 12, 29)$. Numărul acestor triplete este $6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 = 91$.

P293. *Ştiind că* $\overline{xy} + \overline{mn} = 35$ *şi* $\overline{zt} + \overline{uv} = 75$*, să se afle câtul împărţirii numărului* $\overline{xyzt} + \overline{mnuv}$ *la* 5.

(*Clasa a IV-a*) **Tatiana Ignat, elevă, Iaşi**

Soluţie. $\overline{xy} \times 100 + \overline{mn} \times 100 = 35 \times 100 = 3500$; $\overline{xyzt} + \overline{mnuv} = \overline{xy00} + \overline{mn00} + \overline{zt} + \overline{uv} = 3500 + 75 = 3575$; $3575 : 5 = 715$.

P294. *Câte numere de trei cifre au cel puţin una dintre cifre* 9*?*

(*Clasa a IV-a*) **Mariana Manoli, elevă, Iaşi**

Soluţie. Toate numerele de trei cifre sunt în număr de $999 - 100 + 1 = 900$. Toate numerele de trei cifre care nu conţin cifra 9 sunt în număr de $8 \times 9 \times 9 = 648$. Numerele de trei cifre care au cel puţin una din cifre 9 sunt în număr de $900 - 648 = 252$.

P295. *Câţiva elevi au organizat o excursie de trei zile. În prima seară dorm câte patru în cameră, în a doua seară câte trei, iar în ultima seară fiecare are camera sa.*

Ştiind că au fost închiriate 32 de camere în cele trei zile, iar în a doua seară într-o cameră au fost cazaţi numai doi elevi, să se afle câţi elevi au participat la excursie.
(*Clasa a IV-a*) **Mihaela Gâlcă, elevă, Iaşi**

Soluţie. Da a este numărul elevilor, atunci $a : 4 + (a + 1) : 3 + a = 32 \Leftrightarrow 3a + 4a + 4 + 12a = 384 \Leftrightarrow a = 20$ (elevi).

P296. *Pentru un număr natural n, $n \geq 1$, notăm cu $S(n)$ suma cifrelor numărului n (de exemplu $S(235) = 2 + 3 + 5 = 10$). Câte numere de forma $\overline{abc}$ îndeplinesc condiţia $S(S(\overline{abc})) = 10$?*
(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

Soluţie. Avem $S(\overline{abc}) \leq 27$. Singurul număr mai mic decât 27 care are suma cifrelor 10 este 19, deci $a + b + c = 19$. Dacă $a = 1$, atunci $b + c = 18$ şi $b = c = 9$ (1 caz). Dacă $a = 2$, atunci $b + c = 17$ şi ($b = 9$, $c = 8$ sau $b = 8$, $c = 9$) (2 cazuri).

Continuând astfel, ajungem la faptul că, dacă $a = 9$, atunci $b + c = 10$ şi avem 9 cazuri. În concluzie, avem $1+2+3+\ldots+9 = 45$ numere de trei cifre care îndeplinesc condiţia din enunţ.

Clasa a V-a

V.172. *Se consideră numerele naturale $x = 2013^{2013} - 3$ şi $y = 2014^{2013} - 4$. Arătaţi că x şi y au cel puţin patru divizori comuni.*
Gheorghe Iacob, Paşcani

Soluţie. Se constată uşor că atât x cât şi y au ultima cifră 0, prin urmare $1, 2, 5$ şi 10 sunt divizori ai ambelor numere.

V.173. *Determinaţi numerele naturale m şi n pentru care $2^m + 2^n = 33554433$.*
Ionel Tudor, Călugăreni

Soluţie. Suma $2^m + 2^n$ fiind impară, numerele 2^m şi 2^n vor avea parităţi diferite, prin urmare unul dintre ele va fi egal cu 1, iar celălalt cu 33554432. Obţinem soluţiile $(m, n) \in \{(0, 25); (25, 0)\}$.

V.174. *Determinaţi numerele $\overline{abc}$ cu proprietatea că $\overline{abc} = c^2(a - 1)^2$.*
Nicolae Ivăşchescu, Craiova

Soluţie. Cum c este ultima cifră a unui pătrat perfect, rezultă că $c \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$. Cazurile $c = 0$ şi $c = 1$ se elimină imediat. Dacă $c = 4$, obţinem că $\overline{ab4} = 16(a - 1)^2$; urmărind utima cifră, deducem că $a = 3$ sau $a = 9$, valori pentru care nu se verifică egalitatea. Procedând în aceeaşi manieră, nu găsim soluţii pentru $c = 9$, pentru $c = 5$ obţinem $a = 6$, $b = 2$, iar pentru $c = 6$ obţinem $a = 5$, $b = 7$. În concluzie, $\overline{abc} \in \{576, 625\}$.

V.175. *Arătaţi că numărul $A = 2^{2014} + 2^{2013} + 2^{2012} + 2^3$ se divide cu 15.*
Iulian Oleniuc, elev, Iaşi

Soluţie. Observăm că $A = 2^{2012} \cdot 7 + 8 = 16^{503} \cdot 7 + 8 = (15 + 1)^{503} \cdot 7 + 8 = (M_{15} + 1) \cdot 7 + 8 = M_{15} + 7 + 8 = M_{15}$, de unde cerinţa problemei.

V.176. *Pe tablă sunt scrise numerele naturale $1, 2, 3, \ldots, 41$. Andrei alege de pe tablă un număr de la 1 la 7. Apoi, Bianca alege un număr mai mare decât cel al lui Andrei, astfel încât diferenţa dintre numărul ales de ea şi cel ales de Andrei este cel mult egală cu 7. Urmează Andrei, care alege un număr mai mare decât cel ales de*

Bianca, astfel încât diferenţa dintre numărul ales de el şi cel ales de Bianca este cel mult egală cu 7 *ş.a.m.d. Elevul care este obligat să aleagă numărul* 41 *pierde jocul. Arătaţi că Bianca are strategie de câştig.*

Radu Miron, elev, Iaşi

Soluţie. Indiferent de numerele pe care le alege Andrei, Bianca poate alege, de fiecare dată când îi vine rândul, numerele $8, 16, 24, 32, 40$. La al şaselea pas, Andrei va fi obligat să aleagă numărul 41, pierzând jocul.

V.177. *Determinaţi cel mai mic număr natural* n (*scris în baza* 10) *cu proprietatea că atât* n*, cât şi* $n+3$*, au suma cifrelor numere divizibile cu* 7.

Dan Popescu, Suceava

Soluţie. Notăm cu $u(n)$ şi $s(n)$ ultima cifră, respectiv suma cifrelor numărului natural n. Dacă $u(n) \leq 6$, atunci $s(n+3) - s(n) = 3$, număr care nu se divide cu 7.

Dacă $u(n) = 7$ şi $n = \overline{a_1 \ldots a_s \underbrace{9 \ldots 9}_{k \text{ de } 9} 7}$, $a_s \neq 9$, atunci $n+3 = \overline{a_1 \ldots (a_s+1) \underbrace{0 \ldots 00}_{k+1 \text{ de } 0}}$, prin urmare $s(n) - s(n+3) = 9k+6$. Cea mai mică valoare a lui k pentru care $9k+6$ se divide cu 7 este $k = 4$. Se observă că numărul $n = 699997$ este cel mai mic dintre cele având forma dorită şi suma cifrelor divizibilă cu 7.

Dacă $u(n)=8$ şi $n=\overline{a_1 \ldots a_s \underbrace{99 \ldots 9}_{k \text{ de } 9} 8}$, $a_s \neq 9$, atunci $n+3 = \overline{a_1 \ldots (a_s+1) \underbrace{0 \ldots 0}_{k \text{ de } 0} 1}$, prin urmare $s(n) - s(n+3) = 9k+6$. Cea mai mică valoare a lui k pentru care $9k+6$ se divide cu 7 este $k = 4$. Se observă că numărul $n = 599998$ este cel mai mic dintre cele având forma dorită şi suma cifrelor divizibilă cu 7.

Dacă $u(n) = 9$ şi $n = \overline{a_1 \ldots a_s \underbrace{99 \ldots 9}_{k \text{ de } 9}}$, $a_s \neq 9$, atunci $n+3 = \overline{a_1 \ldots (a_s+1) \underbrace{0 \ldots 0}_{k-1} 2}$, prin urmare $s(n) - s(n+3) = 9k-3$. Cea mai mică valoare a lui k pentru care $9k-3$ se divide cu 7 este $k = 5$. Se observă că numărul $n = 499999$ este cel mai mic dintre cele având forma dorită şi suma cifrelor divizibilă cu 7.

Dintre numerele 699997, 599998 şi 499999, cel mai mic este 499999.

V.178. *Arătaţi că există o infinitate de numere naturale* n *pentru care* n^3 *divide* $n!$ *(unde* $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$*).*

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. Vom arăta că orice număr de forma $n = 6k$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ are proprietatea dorită. Observăm că $2 < 3 < 2k < 3k < 6k$ şi $2 \cdot 3 \cdot 2k \cdot 3k \cdot 6k = (6k)^3$, prin urmare $(6k)^3$ divide $(6k)!$. Astfel, există o infinitate de numere naturale care verifică cerinţa problemei.

Clasa a VI-a

VI.172. *Demonstraţi că nu există numere întregi distincte* a, b, *şi* c *pentru care* $\{a, b, c\} = \{a-b, b-c, c-a\}$.

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

Soluţie. Presupunem, prin absurd, că există a, b, c întregi distincte pentru care $A = B$, unde $A = \{a, b, c\}$ şi $B = \{a-b, b-c, c-a\}$. În particular, $a+b+c = (a-b)+(b-c)+(c-a)$, prin urmare $a+b+c = 0$; putem deci considera $A = \{a, b, -a-b\}$ şi $B = \{a-b, a+2b, -2a-b\}$. Cum $a \in B$, rezultă că $a = a-b$ sau $a = a+2b$ sau

$a = -2a - b$. Dacă $a = a - b$, atunci $b = 0$, deci $B = \{a, a, -2a\}$, imposibil. Dacă $a = a + 2b$, obţinem din nou că $b = 0$, deci aceeaşi contradicţie. Dacă $a = -2a - b$, atunci $b = -3a \neq 0$, prin urmare $A = \{a, -3a, 2a\}$, $B = \{4a, -5a, a\}$ şi egalitatea $A = B$ va fi imposibilă. În concluzie, presupunerea făcută este falsă, deci $A \neq B$.

VI.173. *Fie $a, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, astfel încât la împărţirea lui a cu n se obţine restul $n-1$, iar la împărţirea lui a prin $n+1$ se obţine restul n. Aflaţi restul împărţirii lui a prin $n(n+1)$.*

Constantin Apostol, Râmnicu Sărat

Soluţie. Din $a = nc_1 + (n-1)$ şi $a = (n+1)c_2 + n$, deducem că $a + 1 \vdots n$ şi $a + 1 \vdots n + 1$. Însă $(n, n+1) = 1$, prin urmare $a + 1 \vdots n(n+1)$, aşadar restul împărţirii lui a prin $n(n+1)$ este $n(n+1) - 1$.

VI.174. *Demonstraţi că nu există numere naturale a, b şi c având proprietatea că $a^2 + b^2 - 8c = 6$.*

Viorica Momiţă, Iaşi

Soluţie. Presupunem, prin absurd, că ar exista $a, b, c \in \mathbb{N}$ astfel încât $a^2 + b^2 = 8c+6$; evident că a şi b vor avea aceeaşi paritate. Dacă a, b sunt pare, atunci $a^2 = M_4$, $b^2 = M_4$, deci $a^2 + b^2 = M_4 \neq 8c + 6$. Dacă a, b sunt impare, atunci $a = M_8 + 1$, $b = M_8 + 1$, deci $a^2 + b^2 = M_8 + 2 \neq 8c + 6$. Rezultă că presupunerea făcută este falsă, prin urmare este adevărată concluzia.

VI.175. *Determinaţi cel mai mare divizor comun al numerelor $a = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{71}$ şi $b = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{48}$.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Dacă $d = (a, b)$, atunci d este un număr impar. Observăm că d divide $a - b = 2^{49}(1 + 2 + \ldots + 2^{22})$, prin urmare d divide $n = 1 + 2 + \ldots + 2^{22}$. Apoi, d divide $b - n = 2^{23}(1 + 2 + \ldots + 2^{25})$, deci d divide $m = 1 + 2 + \ldots + 2^{25}$. În continuare, $d | m - n$ şi $m - n = 2^{23}(2^3 - 1)$, aşadar $d | 7$. Pe de altă parte, $a = (1 + 2 + 2^2) + 2^3(1 + 2 + 2^2) + \ldots + 2^{69}(1 + 2 + 2^2) = 7(1 + 2^3 + \ldots + 2^{69})$ şi $b = (1 + 2 + 2^2) + 2^3(1 + 2 + 2^2) + \ldots + 2^{46}(1 + 2 + 2^2) = 7(1 + 2^3 + \ldots + 2^{46})$, adică $7 | a$ şi $7 | b$. Obţinem astfel că $(a, b) = 7$.

VI.176. *Determinaţi cel mai mic număr natural (scris în baza 10) care se termină în 2012 şi se divide cu 2014.*

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti, şi Neculai Stanciu, Buzău

Soluţie. Căutăm numărul minim $N = 10000a + 2012 = 2014c$, unde $a, c \in \mathbb{N}$. Dacă $b = c - 1$, obţinem ecuaţia diofantică $10000a - 2014b = 2$, care are o infinitate de soluţii; cea mai mică valoare a lui a se determină cu ajutorul algoritmului lui Euclid. Observăm că $(10000, 2014) = 2$, şi avem relaţiile: $10000 = 2014 \cdot 4 + 1944$; $2014 = 1944 \cdot 1 + 70$; $1944 = 70 \cdot 27 + 54$; $70 = 54 \cdot 1 + 16$; $54 = 16 \cdot 3 + 6$; $16 = 6 \cdot 2 + 4$; $6 = 4 \cdot 1 + 2$; $4 = 2 \cdot 2 + 0$. De aici,

$$\begin{aligned} 1944 &= 10000 - 4 \cdot 2014; \\ 70 &= 5 \cdot 2014 - 100000; \\ 54 &= 28 \cdot 10000 - 139 \cdot 2014; \\ 16 &= 144 \cdot 2014 - 29 \cdot 10000; \end{aligned}$$

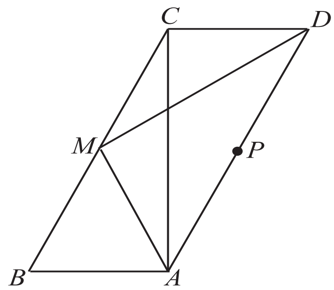
$$6 = 1115 \cdot 10000 - 571 \cdot 2014;$$
$$4 = 1286 \cdot 2014 - 259 \cdot 10000;$$
$$2 = 374 \cdot 10000 - 1857 \cdot 2014.$$

Astfel, $N = 10000 \cdot 374 + 2012 = 3742012$ este numărul căutat.

VI.177. *Fie ABC un triunghi cu $m(\widehat{A}) = 90°$ şi $m(\widehat{B}) = 60°$. Considerăm punctul D astfel încât $CD \| AB$, $CD = AB$, iar B şi D sunt separate de dreapta AC. Arătaţi că există un singur punct $M \in (BC)$ astfel încât $MA \perp MD$.*

Petru Asaftei, Iaşi

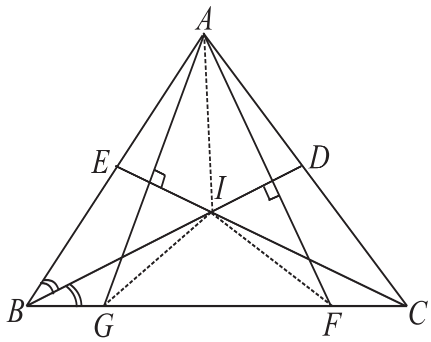
Soluţie. Fie P mijlocul segmentului AD; atunci $MA \perp MD$ dacă şi numai dacă $MP = \frac{1}{2}AD$. Se observă uşor că $AD = BC$, iar $AB = \frac{1}{2}BC$, prin urmare $MA \perp MD$ dacă şi numai dacă $MP = AB$, condiţie echivalentă cu faptul că triunghiul CMP este echilateral (deoarece $PC = PM = \frac{1}{2}AD$, iar $m(\widehat{MCP}) = 60°$). Astfel, concluzia problemei se impune: unicul punct M pentru care $MA \perp MD$ este mijlocul segmentului BC.



VI.178. *Fie ABC un triunghi în care unghiul $\widehat{BAC}$ este cel mai mare, iar BD şi CE sunt bisectoarele unghiurilor $\widehat{ABC}$, respectiv $\widehat{ACB}$ ($D \in AC, E \in AB$). Notăm cu I intersecţia dreptelor BD şi CE şi cu F şi G simetricele punctului A faţă de BD, respectiv CE. Arătaţi că $m(\widehat{FIG}) = 180° - m(\widehat{BAC})$.*

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Deoarece $\triangle ABF$ este isoscel, punctul F este situat pe latura BC; analog, G se află tot pe BC. Punctul I este centrul cercului înscris în $\triangle ABC$, deci AI este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$. Din congruenţa triunghiurilor BAI şi BFI (L.U.L.) obţinem că $m(\widehat{BFI}) = m(\widehat{BAI}) = \frac{1}{2}m(\widehat{BAC})$; la fel se arată că $m(\widehat{CGI}) = \frac{1}{2}m(\widehat{BAC})$. Astfel, $m(\widehat{GIF}) = 180° - (m(\widehat{BFI}) + m(\widehat{CGI})) = 180° - m(\widehat{BAC})$.



Clasa a VII-a

VII.172. *Determinaţi cel mai mic număr natural n cu proprietatea că $0,3 < \{\sqrt{n}\} < 0,(3)$.*

Vasile Chiriac, Bacău

Soluţie. Înlocuind $n = 0, 1, 2, \ldots$ în relaţia dată, constatăm că prima valoare convenabilă este $n = 11$.

VII.173. *Determinaţi numerele naturale n pentru care $5^n - 3^n = 544$.*

Ionel Tudor, Călugăreni şi Viorica Dogaru, Giurgiu

Soluţie. Cum $5^n - 3^n = (5-3)(5^{n-1} + 5^{n-2}\cdot 3 + \ldots + 3^{n-1})$ şi, pentru $n \geq 5$, $5^{n-1} + 5^{n-2}\cdot 3 + \ldots + 3^{n-1} > 625 > 272$, rezultă că $n \leq 4$. Facem verificările şi obţinem că unica soluţie este $n = 4$.

VII.174. *Pentru a, b, c, d numere reale pozitive, considerăm numerele* $A = \dfrac{1}{a+2b+c} - \dfrac{1}{b+2c+d} + \dfrac{1}{c+2d+a} - \dfrac{1}{d+2a+b}$ *şi* $B = |b-d| - |a-c|$. *Demonstraţi că A şi B au acelaşi semn.*

Ovidiu Pop, Satu Mare şi Traian Tămîian, Carei

Soluţie. Efectuând calculele, obţinem că

$$A = \frac{2(a+b+c+d)\cdot[(b-d)^2 - (a-c)^2]}{(a+2b+c)(b+2c+d)(c+2d+a)(d+2a+b)}.$$

Cum semnul parantezei pătrate de la numărător este acelaşi cu semnul lui B, concluzia se impune.

VII.175. *Determinaţi perechile (m, n) de numere naturale pentru care $2^m + 2^n$ este pătrat perfect.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Dacă $m = n$, atunci $2^m + 2^n = 2^{n+1}$ este pătrat perfect dacă şi numai dacă $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$.

Dacă $m > n$, atunci $2^m + 2^n = 2^n(2^{m-n} + 1)$ este pătrat perfect când $n = 2k$ şi $2^{m-n} + 1 = a^2$, cu $k, a \in \mathbb{N}$. Din $(a-1)(a+1) = 2^{m-n}$ rezultă că $a - 1 = 2^\alpha$, $a + 1 = 2^\beta$, cu $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $\alpha < \beta$, $\alpha + \beta = m - n$. Deducem că $2^\beta - 2^\alpha = 2$, deci $2^\alpha(2^{\beta-\alpha} - 1) = 2$, de unde $\alpha = 1$, $\beta = 2$ şi atunci $m - n = 3$. Analog se tratează cazul $n > m$.

În concluzie, perechile căutate sunt cele de forma $(2k+1, 2k+1)$ sau $(2k, 2k+3)$ sau $(2k+3, 2k)$, unde $k \in \mathbb{N}$.

VII.176. *Demonstraţi că* $\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+y} + \sqrt{\dfrac{xy}{x^2+y^2}} \leq \sqrt{2}$, *oricare ar fi numerele reale pozitive x şi y.*

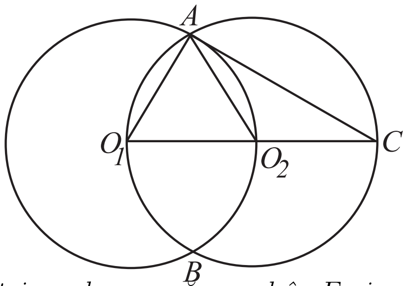
Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

Soluţie. Cu substituţia $y = tx$, $t > 0$, inegalitatea se rescrie sub forma $\dfrac{\sqrt{t^2+1}}{t+1} + \dfrac{\sqrt{t}}{\sqrt{t^2+1}} \leq \sqrt{2}$. Prin ridicare la pătrat, aceasta este echivalentă cu $\dfrac{t^2+1}{(t+1)^2} + \dfrac{t}{t^2+1} + \dfrac{2\sqrt{t}}{t+1} \leq 2$, $\forall t > 0$. Efectuând calculele, suma primilor doi termeni se dovedeşte a fi cel mult 1, iar $\dfrac{2\sqrt{t}}{t+1} \leq 1$; adunând, obţinem inegalitatea dorită. Egalitate avem pentru $t = 1$, deci când $x = y$.

VII.177. *Fie $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ două cercuri de centre O_1, respectiv O_2, având razale egale şi astfel încât $O_1 \in \mathcal{C}_2$. Notăm cu A şi B punctele de intersecţie dintre cele două cercuri şi cu C punctul în care tangenta în A la $\mathcal{C}_1$ taie a doua oară $\mathcal{C}_2$. Arătaţi că triunghiul ABC este echilateral.*

Dumitru Săvulescu şi Marian Voinea, Bucureşti

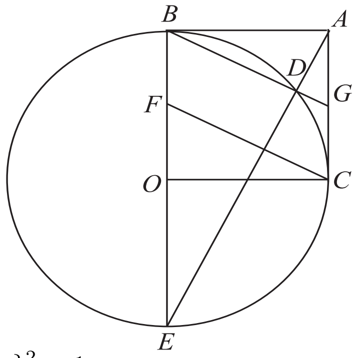
Soluţie. Cum O_1A, O_1O_2 şi O_2A sunt raze în cele două cercuri congruente, triunghiul AO_1O_2 va fi echilateral. Unghiul drept $\widehat{O_1AC}$ este înscris într-un semicerc al lui $\mathcal{C}_2$, deci punctele O_1, O_2 şi C sunt coliniare, iar arcul mic $\overset{\frown}{AC}$ din $\mathcal{C}_2$ va avea măsura $2 \cdot 60° = 120°$. Evident că arcul mic $\overset{\frown}{AB}$ din $\mathcal{C}_2$ are măsura $120°$ şi, de aici, concluzia problemei.



VII.178. *Se consideră cercul $\mathcal{C}(O, R)$ şi tangentele AB şi AC perpendiculare, duse din punctul A exterior cercului. Paralela prin B la AC taie a doua oară cercul în E, iar AE taie a doua oară cercul în D. Demonstraţi că paralela prin C la BD trece prin mijlocul segmentului OB.*

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

Soluţie. Fie $\{G\} = BD \cap AC$ şi $CF \| BD$, $F \in BE$. Este evident că BE este diametru al cercului, $ABOC$ este pătrat, iar $BD \perp AE$. Aplicând teorema catetei în $\triangle BAE$, obţinem că $\dfrac{AD}{DE} = \dfrac{AB^2}{BE^2} = \dfrac{1}{4}$, deci $\dfrac{AG}{BE} = \dfrac{1}{4}$ şi atunci G va fi mijlocul lui AC. Pe de altă parte, $BGCF$ este paralelogram, prin urmare $BF = GC = \dfrac{1}{2}BO$.



Clasa a VIII-a

VIII.172. *Determinaţi numerele reale x şi y pentru care*

$$\{x\}^2 + \{y\}^2 = 0,2 \quad \text{şi} \quad \{-x\}^2 + \{-y\}^2 = 1.$$

Bogdan Chiriac, Bacău

Soluţie. Nu putem avea $\{x\} = 0$ sau $\{y\} = 0$. Cum $\{-a\} = 1 - \{a\}$, $\forall a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, a doua relaţie devine $(1 - \{x\})^2 + (1 - \{y\})^2 = 1$, adică $2 - 2(\{x\} + \{y\}) + 0,2 = 1$, prin urmare $\{x\} + \{y\} = 0,6$. Înlocuind $\{y\} = 0,6 - \{x\}$ în prima relaţie, obţinem că $\{x\}^2 - 0,6 \cdot \{x\} + 0,08 = 0$, de unde $\{x\} = 0,4$ sau $\{x\} = 0,2$. Soluţiile sistemului sunt perechile $(a + 0,4; b + 0,2)$ şi $(a + 0,2; b + 0,4)$, cu $a, b \in \mathbb{Z}$.

VIII.173. *Determinaţi valoarea minimă a expresiei $E(x, y, z) = x^2 + xy + xz + yz$, dacă x, y, z sunt numere reale pozitive cu $xyz(x + y + z) = 1$.*

Constantin Dragomir, Piteşti

Soluţie. Din $xyz(x + y + z) = 1$ obţinem că $x^2 + xy + xz = \dfrac{1}{yz}$ şi atunci $E(x, y, z) = \dfrac{1}{yz} + yz \geq 2$. Însă $E(\sqrt{2} - 1, 1, 1) = 2$, prin urmare $E_{\min} = 2$.

VIII.174. *Determinaţi valoarea minimă a expresiei $E(a, b, c) = \dfrac{(a+b)^2}{3bc+1} + \dfrac{(b+c)^2}{3ca+1} + \dfrac{(c+a)^2}{3ab+1}$, dacă a, b, c sunt numere reale pozitive cu $ab + bc + ca = 3$.*

Dan Popescu, Suceava

Soluţie. Utilizând inegalitatea lui Bergström, obţinem:

$$E(a,b,c) \geq \frac{(2a+2b+2c)^2}{12} = \frac{a^2+b^2+c^2+6}{3} \geq \frac{ab+bc+ca+6}{3} = 3.$$

Cum $E(1,1,1) = 3$, rezultă că $E_{\min} = 3$.

VIII.175. *Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, demonstraţi că*

$$\frac{1}{(a+b)^2+9} + \frac{1}{(b+c)^2+9} + \frac{1}{(c+a)^2+9} \leq \frac{1}{12}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Mirela Marin, Iaşi

Soluţie. Se arată uşor că

$$\frac{1}{(a+b)^2+9} \leq \frac{1}{6(a+b)} \leq \frac{1}{24}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right),$$

cu egalitate când $a = b = \dfrac{3}{2}$. Scriind încă două inegalităţi analoage şi sumând, obţinem concluzia. Egalitatea se obţine pentru $a = b = c = \dfrac{3}{2}$.

VIII.176. *Fie x, y numere reale pozitive astfel încât $x^3 + y^3 = axy$, cu $a > 0$. Demonstraţi că:*

a) $x + y \leq a$; b) $x^2 + y^2 \leq \dfrac{a^2}{2}$.

Lucian Tuţescu şi Liviu Smarandache, Craiova

Soluţie. a) Înmulţind ambii membri ai inegalităţii $x^2 + y^2 - xy \geq xy$ cu $x + y$ şi ţinând seama de ipoteză, obţinem că $axy \geq xy(x+y)$, de unde $a \geq x + y$. Egalitatea se atinge când $x = y$.

b) Din $C - B - S$ rezultă că $(x+y)(x^3+y^3) \geq (x^2+y^2)^2$. Atunci $a \cdot axy \geq (x+y)(x^3+y^3) \geq (x^2+y^2)^2 \geq (x^2+y^2) \cdot 2xy$ şi, de aici, concluzia. Egalitatea se atinge când $x = y$.

VIII.177. *Se consideră prisma triunghiulară dreaptă $ABCDEF$ şi punctul O situat în interiorul ei. Demonstraţi că media aritmetică ponderată a distanţelor de la O la planele (BCE), (ACF), (ABE), (ABC) şi (DEF) cu ponderile a, b, c, p respectiv p, este constantă (unde a, b, c, p notează uzual elementele triunghiului ABC).*

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

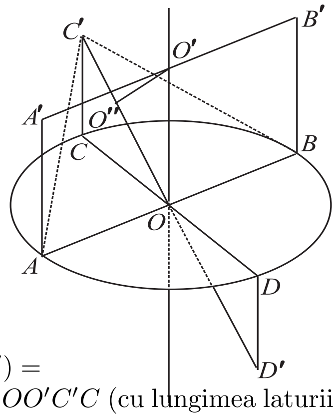
Soluţie. Fie (MNP) planul care trece prin O şi este paralel cu bazele, cu $M \in AD$, $N \in BE$ şi $P \in CF$; atunci $MN = c$, $NP = a$, $MP = b$. Notăm $x = d(O,(BCD)) = d(O,NP)$, $y = d(O,(ACF)) = d(O,MP)$, $z = d(O,(ABE)) = d(O,MN)$, $u = d(O,(ABC))$, $v = h - u = d(O,(DEF))$, unde h este înălţimea prismei, iar r este raza cercului înscris în $\triangle ABC$. Cum $\mathcal{A}_{MNP} = \mathcal{A}_{ONP} + \mathcal{A}_{OPM} + \mathcal{A}_{OMN}$, obţinem că $2rp = ax + by + cz$. Media ponderată dorită este

$$M = \frac{x \cdot a + y \cdot b + z \cdot c + u \cdot p + v \cdot p}{a+b+c+2p} = \frac{2r_p + h_p}{4p} = \frac{r}{2} + \frac{h}{4} = \text{constant}.$$

VIII.178. *Se consideră un cerc $\mathcal{C}(O,R)$ şi doi diametri perpendiculari AB şi CD. Pe perpendicularele pe planul cercului duse în extremităţile A,B,C,D se iau punctele A',B',C', respectiv D' astfel încât $AA'=BB'=CC'=DD'=R$, A' şi B' să fie de aceeaşi parte a planului cercului, iar C' şi D' de părţi diferite ale lui. Calculaţi, în funcţie de R, distanţa dintre dreptele $A'B'$ şi $C'D'$.*

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Mai întâi, observăm că dreptunghiul $AA'BB'$ şi paralelogramul $CC'DD'$ au planele perpendiculare, iar intersecţia lor este dreapta Ox (perpendiculara în O pe cerc).



Deoarece $A'B' \| AB$, rezultă că dreapta $A'B'$ este paralelă cu planul (ABC'), plan ce conţine dreapta $C'D'$. Fie O' intersecţia dreptelor $A'B'$ şi Ox. Avem că $d(A'B',C'D')=d(O',(ABC'))$.

Să notăm cu O'' proiecţia punctului O' pe dreapta $C'D'$ şi să arătăm că $O'O'' \perp (ABC')$. Într-adevăr, din faptul că $AB \perp (CC'DD')$ rezultă că $AB \perp O'O''$, deci $O'O'' \perp AB$. Cum avem şi $O'O'' \perp C'D'$, deducem că $O'O'' \perp (ABC')$.

Constatăm, din cele stabilite mai sus, că $d(A'B',C'D')= O'O''$. Dar $O'O''$ este jumătate din diagonala pătratului $OO'C'C$ (cu lungimea laturii R). Deci $O'O''=\dfrac{\sqrt{2}}{2}R$ şi $d(A'B',C'D')=\dfrac{\sqrt{2}}{2}R$.

Clasa a IX-a

IX.146. *Fie M,N,P,Q mijloacele a patru laturi consecutive ale unui poligon cu $n \geq 4$ laturi. Dacă $MNPQ$ este paralelogram, arătaţi că $n=4$.*

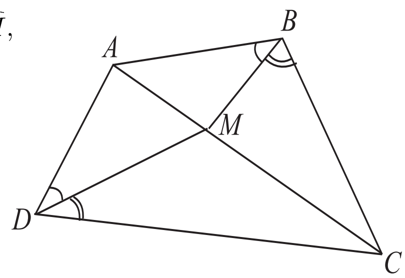
Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

Soluţie. Fie M,N,P,Q mijloacele laturilor AB,BC,CD respectiv DE. Avem: $MNPQ$ este paralelogram $\Leftrightarrow \vec{r}_M+\vec{r}_p=\vec{r}_N+\vec{r}_Q \Leftrightarrow \vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C+\vec{r}_D=\vec{r}_B+\vec{r}_C+\vec{r}_D+\vec{r}_E \Leftrightarrow \vec{r}_A=\vec{r}_E \Leftrightarrow A=E \Leftrightarrow n=4$.

IX.147. *Fie M un punct în interiorul patrulaterului convex $ABCD$ astfel încât unghiurile $\widehat{AMB}$ şi $\widehat{CMD}$ sunt neascuţite, iar triunghiurile AMD şi BMC sunt neobtuzunghice. Notăm cu R_1,R_2,R_3 şi R_4 razele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABM, BCM, CDM, respectiv DAM. Dacă $R_1=R_2=R_3=R_4$, arătaţi că $ABCD$ este romb.*

Ovidiu Pop, Satu Mare şi Nicuşor Minculete, Braşov

Soluţie. Cum $AM=2R_1\sin\widehat{ABM}=2R_4\sin\widehat{ADM}$, unghiurile $\widehat{ABM}$, $\widehat{ADM}$ sunt ascuţite sau drepte şi $R_1=R_4$, rezultă că $\widehat{ABM}\equiv\widehat{ADM}$. Analog se arată că $\widehat{CBM}\equiv\widehat{CDM}$, prin urmare $\widehat{ABC}\equiv\widehat{ADC}$. În acelaşi mod obţinem că $\widehat{BAD}\equiv\widehat{BCD}$, aşadar $ABCD$ este paralelogram.



Întrucât $AB = 2R_1 \sin\widehat{AMB}$, $CD = 2R_3 \sin\widehat{CMD}$, $AB = CD$, $R_1 = R_3$ şi unghiurile $\widehat{AMB}$ şi $\widehat{CMD}$ sunt ambele neascuţite, deducem că $\widehat{AMB} \equiv \widehat{CMD}$. Similar, $\widehat{AMD} \equiv \widehat{BMC}$; atunci $2m(\widehat{AMB}) + 2m(\widehat{BMC}) = 2\pi$, de unde rezultă că punctele A, M, C sunt coliniare şi, analog, punctele B, M şi D sunt coliniare, iar $AC \cap BD = \{M\}$. Avem că $AB = 2R_1 \sin\widehat{AMB}$, iar $BC = 2R_2 \sin(\pi - \widehat{AMB}) = 2R_2 \sin\widehat{AMB}$; cum $R_1 = R_2$, deducem că $AB = BC$ şi, astfel, $ABCD$ va fi chiar romb.

IX.148. *Arătaţi că într-un triunghi oarecare avem:* $\cos A \cos B \cos C \leq \dfrac{\sqrt{3}S}{18R^2}$.

Andi Gabriel Brojbeanu, elev, Târgovişte

Soluţie. Fie D, E, F picioarele înălţimilor coborâte din A, B, respectiv C şi H ortocentrul triunghiului ABC. Se obţine uşor că $EF = R\sin 2A$ (de exemplu, cu teorema sinusului aplicată în $\triangle AEF$, care este înscris în cercul de diametru $AH = 2R\cos A$), $DF = R\cos 2B$ şi $DE = R\cos 2C$. Pentru semiperimetrul şi aria triunghiului ortic deducem: $p' = \dfrac{S}{R}$ şi $S' = 2S\cos A\cos B\cos C$. Ca urmare, $r' = 2R\cos A\cos B\cos C$.

Aplicând inegalitatea lui Mitrinović relativ la triunghiul ortic DEF, avem că $p' \geq 3\sqrt{3}r'$, ceea ce este echivalent cu inegalitatea de demonstrat.

Avem egalitate dacă şi numai dacă triunghiul dat este echilateral.

IX.149. *Considerăm şirul* $(a_n)_{n\geq 0}$ *definit prin:* $a_0 = x \in \mathbb{R}$, $3a_{n+1} = a_n^2 - 6a_n + 18$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Demonstraţi că există o infinitate de valori iraţionale ale lui* x *pentru care toţi termenii şirului* $(a_n)_{n\geq 1}$ *sunt numere naturale.*

Radu Miron, elev, Iaşi

Soluţie. Relaţia de recurenţă se poate scrie sub forma $\dfrac{1}{3}(a_{n+1}-3) = (\dfrac{1}{3}(a_n-3))^2$; atunci şirul $b_n = \dfrac{1}{3}(a_n - 3)$ are proprietatea că $b_{n+1} = b_n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, prin urmare $b_n = b_0^{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Rezultă că $a_n = 3\left[\dfrac{1}{3}(x-3)\right]^{2^n} + 3$. Alegând $x = 3a\sqrt{3} + 3$, $a \in \mathbb{N}^*$, avem că $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ şi $a_n = 3(a^{2^n} \cdot 3^{2^{n-1}} + 1) \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

IX.150. *Determinaţi funcţiile* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, *cu* $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ *care au proprietatea că* $f(1 + f(2)) = f(2 + f(3)) = f(3 + f(4))$.

Cristinel Mortici, Târgovişte

Soluţie. Egalitatea $f(1+f(2)) = f(2+f(3))$ conduce la $(5a+b+1)(3a+b+5ab+2ac+13a^2) = 0$, iar din $f(2 + f(3)) = f(3 + f(4))$ se obţine că $(7a + b + 1)(5a + b + 7ab + 2ac + 25a^2) = 0$. Tripletele $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ căutate sunt soluţiile sistemelor

I. $\begin{cases} 5a + b + 1 = 0 \\ 7a + b + 1 = 0 \end{cases}$ II. $\begin{cases} 5a + b + 1 = 0 \\ 5a + b + 7ab + 2ac + 25a^2 = 0 \end{cases}$;

III. $\begin{cases} 7a + b + 1 = 0 \\ 3a + b + 5ab + 2ac + 13a^2 = 0 \end{cases}$; IV. $\begin{cases} 3a + b + 5ab + 2ac + 13a^2 = 0 \\ 5a + b + 7ab + 2ac + 25a^2 = 0 \end{cases}$.

Autorul rezolvă sistemele cu ajutorul calculatorului, obţinând soluţiile $(1, -6, 9); (-1, 4, -2); (1 - 8, 16); (-1, 6, -7);$ $(1, -7, 13);$ $(-1, 5, -5)$.

Clasa a X-a

X.146. *Pe laturile triunghiului ABC ca baze, se construiesc triunghiurile isoscele asemenea MAB, NAC şi PBC astfel încât M şi N se află în exteriorul triunghiului ABC, iar P se află în interiorul acestuia.*

a) *Arătaţi că patrulaterul $AMPN$ este paralelogram.*

b) *Demonstraţi că $AMPN$ este romb dacă şi numai dacă $AB = AC$.*

Constantin Dragomir, Piteşti

Soluţia 1 (Gheorghe Iurea). În raport cu un reper oarecare în planul complex, notăm cu x afixul punctului X. Fie $m(\widehat{ANC}) = m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{BPC}) = t$ şi $z = \cos t + i \sin t$. Din $c - n = z(a - n)$ obţinem că $n = \dfrac{c - az}{1 - z}$; analog, $m = \dfrac{a - bz}{1 - z}$ şi $p = \dfrac{c - bz}{1 - z}$. Se observă că $a + p = m + n$, prin urmare $AMPN$ este paralelogram. Avem: $AMPN$ romb $\Leftrightarrow AM = AN \Leftrightarrow |m - a| = |n - a| \Leftrightarrow \dfrac{|a - b|}{|1 - z|} = \dfrac{|a - c|}{|1 - z|} \Leftrightarrow AB = AC$.

Soluţia 2 (a autorului). Deoarece $\widehat{MBP} \equiv \widehat{ABC}$ şi $\dfrac{MB}{AB} = \dfrac{BP}{BC}$, rezultă că $\triangle MBP \sim \triangle ABC$; analog se arată că $\triangle NPC \sim \triangle ABC$, aşadar $\triangle MBP \sim \triangle NPC$. Însă $BP = PC$, deci $\triangle MBP \equiv \triangle NPC$. Deducem că $NP = MB = MA$ şi $MP = NC = AN$, prin urmare patrulaterul $AMPN$ are laturile opuse egale, adică este paralelogram. Întrucât $\triangle MAB \sim \triangle NAC$, avem: $AMPN$ romb $\Leftrightarrow AM = AN \Leftrightarrow \dfrac{MA}{NA} = 1 \Leftrightarrow \triangle MAB \equiv \triangle NAC \Leftrightarrow AB = AC$.

X.147. *Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia*

$$\frac{1}{1+2^x} + \frac{1}{1+3^x} + \frac{1}{1+5^x} = 1 + \frac{1}{1+30^x}.$$

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

Soluţie. Cu notatiile $a = 2^x$, $b = 3^x$, $c = 5^x$, $a, b, c > 0$, ecuaţia devine succesiv:

$$\frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+abc} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (bc-1)\left(\frac{a}{(1+a)(1+abc)} - \frac{1}{(1+b)(1+c)}\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (bc-1)(ab-1)(ac-1) = 0.$$

Rezultă că $6^x = 1$ sau $10^x = 1$ sau $15^x = 1$, prin urmare singura soluţie este $x = 0$.

X.148. *Determinaţi funcţiile $f : (1, \infty) \to (1, \infty)$ cu proprietatea că $f(x^y) = (f(x))^y$, $\forall x \in (1, \infty)$, $\forall y \in (0, \infty)$.*

Ion Nedelcu, Ploieşti şi Lucian Tuţescu, Craiova

Soluţie. Fie $x \in (1, \infty)$ şi $y = \dfrac{1}{\ln x} \in (0, \infty)$; cum $x^y = e$, rezultă că $(f(x))^{\frac{1}{\ln x}} = f(e)$, $\forall x \in (1, \infty)$, deci $f(x) = a^{\ln x}$, unde $a = f(e) > 1$. Notând $\alpha = \ln a > 1$, am obţinut că $f(x) = x^{\ln a} = x^{\alpha}$, $\forall x \in (1, \infty)$, iar funcţiile de acest tip verifică ecuaţia funcţională din enunţ.

X.149. *Afixele vârfurilor unui triunghi echilateral sunt numerele complexe a, b şi c. Considerăm numărul complex $z = \dfrac{a}{a-b} + \dfrac{b}{b-c} + \dfrac{c}{c-a}$. Demonstraţi că partea reală a lui z este $\dfrac{3}{2}$.*

Sven Cortel, elev, Satu Mare

Soluţie. Trebuie să arătăm că $2z - 3 \in i\mathbb{R}$, adică $\dfrac{a+b}{a-b} + \dfrac{b+c}{b-c} + \dfrac{c+a}{c-a} \in i\mathbb{R}$. Fie q afixul centrului Q al triunghiului echilateral ABC din enunţ, iar M, N şi P sunt mijloacele laturilor BC, CA respectiv AB. Cum $QM \perp BC$, obţinem că $\dfrac{q - \frac{b+c}{2}}{b-c} \in i\mathbb{R}$. Scriem încă două relaţii similare şi, prin sumare, rezultă că

$$q\left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{a-b} + \frac{b+c}{b-c} + \frac{c+a}{c-a}\right) \in i\mathbb{R}.$$

Suma din prima paranteză este egală cu $\dfrac{ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$. Deoarece $\triangle ABC$ este echilateral, numărătorul acestei fracţii este 0, şi de aici, concluzia problemei.

X.150. *Spunem că o funcţie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ este ,,aproape identică" dacă există o funcţie $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ astfel încât $f(f(n)) + g(f(n)) = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

a) *Dacă funcţia f este aproape identică, arătaţi că funcţia asociată g este definită prin $g(n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

b) *Daţi exemplu de funcţie aproape identică, alta decât funcţia identică.*

c) *Demonstraţi că singura funcţie aproape identică şi monotonă este funcţia identică.*

Claudiu Mîndrilă, Târgovişte

Soluţie. a) Fie f o funcţie aproape identică. Dacă $f(n) = f(m)$, atunci $f(f(n)) + g(f(n)) = f(f(m)) + g(f(m))$, prin urmare $n = m$, deci f este injectivă. Notăm $h = f \circ f$; funcţia h este injectivă şi $h(n) = -g(f(n)) \leq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Se arată prin inducţie, folosind această relaţie, faptul că h este funcţia identică. Atunci f va fi bijectivă şi, cum $g(f(n)) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, urmează că $g(n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) De exemplu, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n + (-1)^n$.

c) Funcţia f fiind injectivă, monotonia va fi strictă. Codomeniul $\mathbb{N}$ având un cel mai mic element, f nu poate strict descrescătoare, aşadar va fi strict crescătoare. Prin inducţie, se arată că $f(n) = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Clasa a XI-a

XI.146. *Dacă x este număr real pozitiv, arătaţi că*

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{1+(x+1)^2} < \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}^2(x+1) - \operatorname{arctg}^2 x\right) < \frac{\operatorname{arctg}(x+1)}{1+x^2}.$$

Adrian Corduneanu, Iaşi

Soluţie. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg}^2 x$, având derivata $f'(x) = \dfrac{2\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Aplicând teorema lui Lagrange, există $\overline{x} \in (x, x+1)$ pentru care

$\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}^2(x+1) - \operatorname{arctg}^2 x) = \frac{\operatorname{arctg}\overline{x}}{1+\overline{x}^2}$. Ţinând seama de faptul că funcţia arctg este strict crescătoare, se arată imediat că $\frac{\operatorname{arctg} x}{1+(x+1)^2} < \frac{\operatorname{arctg}\overline{x}}{1+\overline{x}^2} < \frac{\operatorname{arctg}(x+1)}{1+x^2}$.

XI.147. *Considerăm şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *definit prin:* $x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. *Arătaţi că şirul este convergent şi calculaţi limita sa.*

Ovidiu Pop, Satu Mare şi Gheorghe Szöllösy, Sighetu Marmaţiei

Soluţie. Luând $y_n = nx_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, şirul $(y_n)_{n\geq 1}$ verifică recurenţa $y_{n+1} = \frac{1}{2}\left(y_n + \frac{n^2}{y_n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, cu $y_1 = x_1 > 0$. Se arată, prin inducţie, că $y_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Folosind inegalitatea mediilor, obţinem că $y_{n+1} \geq \sqrt{y_n \cdot \frac{n^2}{y_n}} = n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Presupunem că $y_n > n$, $\forall n \geq 2$; atunci $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$. Pe de altă parte, $y_{n+1} - y_n = \frac{n^2 - y_n^2}{2y_n} < 0$, $\forall n \geq 2$, deci $(y_n)_{n\geq 2}$ este descrescător. Contradicţia la care am ajuns arată că există $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq 2$ pentru care $y_{n_0} \leq n_0$. Prin inducţie, obţinem că $y_n \leq n$, $\forall n \geq n_0$, prin urmare $n - 1 \leq y_n \leq n$, $\forall n \geq n_0$. Astfel, $\frac{n-1}{n} \leq x_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, ceea ce arată că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

XI.148. *Dacă* $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ *sunt şiruri de numere reale,* $(x_n)_{n\geq 1}$ *crescător, astfel încât* $nx_{n+2} - (n+1)x_{n+1} \leq y_n \leq nx_{n+1} - (n+1)x_n$, $\forall n \geq 1$, *atunci şirul* $\frac{y_n}{n^2}$ *este convergent.*

Dan Nedeianu, Drobeta-Turnu Severin

Soluţie. Împărţind prin $n(n+1)$ relaţia din enunţ, obţinem

$$(*) \qquad \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{n+1} - \frac{x_{n+1}}{n(n+1)} \leq \frac{y_n}{n(n+1)} \leq \frac{x_{n+1} - x_n}{n} - \frac{x_{n+1}}{n(n+1)}, \ \forall n \geq 1.$$

Notăm $b_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{n}$, $n \geq 1$; acest şir va fi descrescător, cu termeni pozitivi, deci există $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ell \in \mathbb{R}$. Din lema Stolz-Cesàro,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{(n+1)(n+2) - n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{2(n+1)} = \frac{\ell}{2}.$$

Folosind teorema cleştelui şi relaţia (*), rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{n(n+1)} = \frac{\ell}{2}$, aşadar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{n^2} = \frac{\ell}{2}$.

XI.149. *Dreapta* $y = kx$, $k > 0$, *intersectează hiperbola* $xy = a$, $a > 0$, *în punctul de abscisă pozitivă* X. *Tangenta în* X *la hiperbolă taie axa* Ox *în punctul* Y. *Determinaţi valorile lui* k *pentru care triunghiul* OXY *este echilateral.*

Cătălin Calistru, Iaşi

Soluţie. Obţinem, după calcule, că $X\left(\sqrt{\frac{a}{k}}, k\sqrt{\frac{a}{k}}\right)$, ecuaţia tangentei în X la hiperbolă este $y-k\sqrt{\frac{a}{k}}=-k\left(x-\sqrt{\frac{a}{k}}\right)$, iar $Y\left(2\sqrt{\frac{a}{k}},0\right)$. Triunghiul OXY este echilateral dacă şi numai dacă $OX=OY=XY$, adică $\sqrt{\frac{a(k^2+1)}{k}}=2\sqrt{\frac{a}{k}}$, de unde $k=\sqrt{3}$.

XI.150. *Determinaţi matricele* $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, *cu* $A^3=\begin{pmatrix}20 & 4 & a\\ -32 & 0 & b\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$, $a,b\in\mathbb{R}$, *ştiind că polinomul* $f(X)=\det(XI_3-A)$ *are toate rădăcinile reale.*

Mihai Haivas, Iaşi

Soluţie. Fie x_1,x_2,x_3 rădăcinile lui f; atunci $x_1^3+x_2^3+x_3^3=tr(A^3)=24$ şi $x_1x_2x_3=\det A=\sqrt[3]{(\det A)^3}=8$, prin urmare $x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3=0$. Rezultă că $(x_1+x_2+x_3)\cdot(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3)=0$, deci una dintre cele două paranteze se va anula.

Dacă $x_1+x_2+x_3=0$, atunci $tr\,A=0$, aşadar $f=X^3-mX-8$, $m\in\mathbb{R}$. Cum $f(A)=O_3$, deducem că $mA=A^3-8I_3\overset{not.}{=}B$. Avem că $B=\begin{pmatrix}12 & 4 & a\\ -32 & -8 & b\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}$, $\det B=-128$ şi $\det B=m^3\det A$; obţinem că $m=-2\sqrt[3]{2}$, prin urmare $A=-\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}B$.

Dacă $x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3=0$, atunci $x_1=x_2=x_3=2$, deci $\mathrm{tr}\,A=6$ şi $f(X)=X^3-6X^2+12X-8$. Întrucât $f(A)=O_3$, rezultă că $6A^2-12A=B$, de unde $12A^2+BA=6A^3$. Din aceste ultime două egalităţi obţinem că $(24I_3+B)\cdot A=4(B+12I_3)$ şi, prin trecere la determinanţi, ajungem la contradicţia $55=56$.

Clasa a XII-a

XII.146. *Se consideră şirul* $a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{pn}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, *unde* $p\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ *este fixat. Demonstraţi că nu există polinoame* $f,g\in\mathbb{Z}[X]$ *cu proprietatea că* $\frac{f(n)}{g(n)}=a_n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Gabriela Drînceanu şi Răzvan Drînceanu, Craiova

Soluţie. Presupunem, prin absurd, că există $f,g\in\mathbb{Z}[X]$ astfel încât $\frac{f(n)}{g(n)}=a_n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$; atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$. Însă $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}\in\mathbb{Q}$ sau $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\pm\infty$, în timp ce $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\ln p\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, contradicţie.

XII.147. *Calculaţi* $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+2\sin 4x}}}dx$.

Bogdan Victor Grigoriu

Soluţie. Avem $\sqrt{2+2\sin 4x}=\sqrt{2\cdot 2\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)}=2\left|\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\right|$ $=2\cdot\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$, $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$; $\sqrt{2+\sqrt{2+2\sin 4x}}=\sqrt{2(1+\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right))}=$

$\sqrt{4\cos^2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)} = 2\cos\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Atunci $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos\left(x-\frac{\pi}{8}\right)}dx =$ $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{3\pi}{16}\right)\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln\left(\operatorname{ctg}^2\frac{3\pi}{16}\right)$.

XII.148. *Fie $a, b \in [1, \infty)$, $a < b$ şi funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de clasă C^2, astfel încât $f(a) = f(b)$. Demonstraţi că* $\min\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)| \leq \frac{2b}{b-a} \max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.

Ionuţ Ivănescu, Craiova

Soluţie. Integrând prin părţi, obţinem că $\int_a^b xf''(x)dx = xf'(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)dx =$ $bf'(b) - af'(a)$. Pe de altă parte, conform teoremei de medie, $\int_a^b xf''(x)dx = (b-a)c\cdot$ $f''(c)$, cu $c \in (a, b)$. Rezultă că $(b-a)\cdot c\cdot|f''(c)| = |bf'(b) - af'(a)| \leq b\cdot|f'(b)| + a\cdot|f'(a)|$. Cum $c > a \geq 1$, avem că $(b-a)c \cdot |f''(c)| \geq (b-a)|f''(c)| \geq (b-a)\min\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$. Apoi, $b \cdot |f'(b)| + a \cdot |f'(a)| \leq b \cdot |f'(b)| + b|f'(a)| \leq 2b \max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$. Am arătat astfel că $(b-a)\min\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)| \leq 2b \max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$, de unde concluzia problemei.

XII.149. *Rezolvaţi în $\mathbb{C}$ ecuaţia* $x^7 - 5x^6 + 11x^5 - 15x^4 + 15x^3 - 13x^2 + 5x - 3 = 0$.

Ionel Tudor, Călugăreni

Soluţie. Ecuaţia se factorizează sub forma $(x^2+1)[(x-1)^5 - 2]=0$ şi are soluţiile complexe $\pm i$, respectiv $1 + \varepsilon_k \cdot \sqrt[5]{2}$, unde $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}$, $k = \overline{0, 4}$.

XII.150. *Fie G un grup comutativ de ordin* 2014 *şi* $A = \{f_n : G \to G | f_n(x) = x^n, n = \overline{1, 2013}\}$. *Determinaţi numărul automorfismelor lui A.*

Cristian Lazăr, Iaşi

Soluţie. Cum orice funcţie f_n este morfism, rămâne să vedem în ce condiţii f_n este bijecţie. Observăm că $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$; din teorema lui Cauchy, există elementele a, b, c ale lui G de ordine $2, 19$ respectiv 53. Atunci $a \in \operatorname{Ker} f_n \Leftrightarrow n = M_2$; $b \in \operatorname{Ker} f_n \Leftrightarrow n = M_{19}$; $c \in \operatorname{Ker} f_n \Leftrightarrow n = M_{53}$, deci o funcţie f_n de indice n cu $(n, 2014) \neq 1$ nu poate fi injectivă. În cazul în care $(n, 2014) = 1$, funcţia f_n este injectivă şi, implicit, bijectivă. În concluzie, numărul automorfismelor din A este $\varphi(2014) = 2014\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{19}\right)\left(1-\frac{1}{53}\right) = 936$.

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor propuse în nr. 1/2014

A. Nivel gimnazial

G256. *Fie $p \geq 3$ un număr prim. Arătaţi că numărul $p \cdot 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, se scrie în mod unic ca sumă (având măcar doi termeni) de numere naturale consecutive.*

Elena Iurea, Iaşi