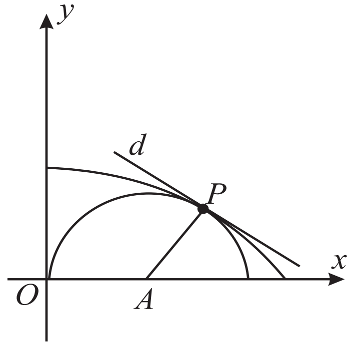
Am văzut că $x^3 = x = xa^2$, $\forall x \in G$. Simplificând la stânga cu x, obţinem că $x^2 = e$, $\forall x \in G$. Această egalitate arată că orice $x \in G$ este inversabil, cu $x^{-1} = x$. În plus, $xy = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx$, $\forall x, y \in G$, aşadar $(G, \cdot)$ este grup abelian.

XII.140. *Fie $a > 0$ şi cercurile de ecuaţii $\mathcal{C}_1 : (x-a)^2 + y^2 = a^2$ şi $\mathcal{C}_2 : (x+a)^2 + y^2 = a^2$. Determinaţi aria minimă a unei elipse care are drept axe de simetrie axele de coordonate şi este tangentă exterior în câte două puncte la fiecare dintre cercurile date.*

Adrian Corduneanu, Iaşi

Soluţie. Fie $A(a,0)$ centrul lui $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{E} : \dfrac{x^2}{\lambda^2} + \dfrac{y^2}{\mu^2} = 1$ ecuaţia unei elipse ca în enunţ, $P(x_0, y_0)$ punctul de tangenţă situat în primul cadran, iar d tangenta comună în P la cele două curbe. Panta tangentei la $\mathcal{C}_1$ în P este $m_d = -\dfrac{1}{m_{AP}} = \dfrac{a - x_0}{y_0} < 0$, iar panta tangentei la elipsă în P se obţine prin derivare, din $\dfrac{2x}{\lambda^2} + \dfrac{2y \cdot y'}{\mu^2} = 0$, pentru $x = x_0$, deci este $y'(x_0) = -\dfrac{\mu^2}{\lambda^2} \cdot \dfrac{x_0}{y_0}$. Egalând cele două pante, obţinem că $\mu^2 = \lambda^2 \left(1 - \dfrac{a}{x_0}\right)$. Cum $P \in \mathcal{E}$, avem că $\dfrac{x_0^2}{\lambda^2} + \dfrac{y_0^2}{\mu^2} = 1$, iar din $P \in \mathcal{C}_1$ deducem că $(x_0 - a)^2 + y_0^2 = a^2$. Din aceste trei egalităţi, rezultă că $\lambda^2 = \dfrac{ax_0^2}{x_0 - a}$, iar $\mu^2 = ax_0$. Aria elipsei va fi $\mathcal{A} = \pi\lambda\mu = \dfrac{\pi a x_0^{3/2}}{(x_0 - a)^{1/2}}$. Minimul ariei se atinge odată cu pătratul său, deci avem de determinat minimul funcţiei $f(x) = \dfrac{x^3}{x - a}$, cu $a < x < 2a$. Găsim imediat că punctul de minim este $x_0 = \dfrac{3a}{2}$, iar valoarea minimă a ariei este $\mathcal{A}_{\min} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \pi a^2$.



Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor propuse în nr. 1/2013

A. Nivel gimnazial

G236. *Determinaţi numerele naturale a, b, c, d şi e, strict mai mari ca 1, cu proprietatea că $a + b + c + d + e = abcde - 95$.*

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Presupunem că $a \geq b \geq c \geq d \geq e \geq 2$; atunci $95 + 5a \geq 95 + a + b + c + d + e = abcde \geq a \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16a$, de unde $a \leq 8$.

Dacă $a = 8$, rezultă că $103 + b + c + d + e = 8bcde$ şi, procedând ca mai înainte, obţinem că $103 + 4b \geq 64b$, deci $60b \leq 103$ şi nu avem soluţii în acest caz. La fel se arată că nu avem soluţii când $a = 7$. Dacă $a = 6$, deducem că $101 + b + c + d + e = 6bcde$, deci $101 + 4b \geq 48b$, prin urmare $b = 2$. Rezultă că $c = d = e = 2$ şi, înlocuind în ecuaţia iniţială, obţinem o contradicţie. Analog, nu vor conveni nici valorile $a = 5$ şi $a = 4$.

Deoarece $95 + 5 \cdot 2 \neq 2^5$, rămâne doar posibilitatea $a = 3$. Atunci, unul, două, trei, patru sau cinci dintre numerele căutate sunt egale cu 3, iar celelalte sunt 2. Prin verificări directe, soluţiile sunt $(3, 3, 3, 2, 2)$ şi permutările acesteia.

G237. *Arătaţi că există n numere naturale distincte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pentru care suma $a_1 + a_1 + \ldots + a_n$ este pătrat perfect, iar $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$ este cub perfect.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Căutăm numere de forma $a_i = k \cdot i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, unde $k \in \mathbb{N}^*$; atunci $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = k \cdot \dfrac{n(n+1)}{2}$, iar $T = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = k^2 \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Pentru ca S să fie pătrat perfect, vom considera $k = \dfrac{n(n+1)}{2} \cdot u^2$, $u \in \mathbb{N}^*$. În acest fel, T devine egal cu $\dfrac{n^3(n+1)^3}{8} \cdot u^3 \cdot u \cdot \dfrac{2n+1}{3}$ şi, alegând $u = 3(2n+1)^2$, vom avea T cub perfect. În concluzie, putem considera $a_i = k \cdot i$, unde $k = \dfrac{9}{2} \cdot n(n+1)(2n+1)^4$.

G238. *Se consideră numerele reale $x, a_1, a_2, \ldots, a_{100}$. Dacă 51 dintre numerele a_1, $\dfrac{a_1 + a_2}{2}, \ldots, \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}}{100}$ sunt egale cu x, arătaţi că măcar două dintre numerele a_i, $i = \overline{1, 100}$, sunt egale cu x.*

Cătălin Budeanu, Iaşi

Soluţie. Fie $b_1 = a_1 - x$, $b_2 = a_2 - x, \ldots, b_{100} = a_{100} - x$; atunci $\dfrac{b_1 + b_2}{2} = \dfrac{a_1 + a_2}{2} - x, \ldots, \dfrac{b_1 + b_2 + \ldots + b_{100}}{100} = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}}{100} - x$. Din ipoteză rezultă că 51 dintre numerele $b_1, \dfrac{b_1 + b_2}{2}, \ldots, \dfrac{b_1 + b_2 + \ldots + b_{100}}{100}$ sunt nule, prin urmare 51 dintre sumele $s_1 = b_1$, $s_2 = b_1 + b_2, \ldots, s_{100} = b_1 + b_2 + \ldots + b_{100}$, în număr de 100, sunt nule. Măcar două perechi dintre cele 51 de sume nule au indici consecutivi: $s_m = s_{m+1} = 0$ şi $s_n = s_{n+1} = 0$, cu $m, n \in \{1, 2, \ldots, 99\}$, $m \neq n$. Atunci $b_{m+1} = s_{m+1} - s_m = 0$ şi $b_{n+1} = s_{n+1} - s_n = 0$, prin urmare $a_{m+1} = a_{n+1} = x$.

G239. *Determinaţi valorile numărului real k, dacă*

$$a_1^3 + \ldots + a_{2013}^3 + 4026 \geq k(a_1 + \ldots + a_{2013}), \forall a_i \in [-2, \infty).$$

Lucian Tuţescu, Craiova şi Marian Voinea, Bucureşti

Soluţie. Considerând $a_1 = \ldots = a_{2013} = 1$, obţinem $k \leq 3$. Pentru $a_1 = \ldots = a_{2013} = -2$, găsim $k \geq 3$ şi, de aici, $k = 3$. Demonstrăm în continuare că valoarea $k = 3$ este convenabilă.Cum $x^3 - 3x + 2 = (x+2)(x-1)^2 \geq 0$, $\forall x \in [-2, +\infty)$, rezultă că $x^3 + 2 \geq 3x$, $\forall x \in [-2, \infty)$. Dând lui x valorile $a_1, a_2, \ldots, a_{2013}$ şi sumând relaţiile obţinute, deducem că $a_1^3 + \ldots + a_{2013}^3 + 4026 \geq 3(a_1 + \ldots + a_{2013})$, $\forall a_i \in [-2, \infty)$.

G240. *Se consideră $E(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + 2 \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$, unde $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 16$, cu $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$. Determinaţi valorile extreme ale acestei expresii.*

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. Observăm că $E = \sum_{i=1}^{n} x_i + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{4} - \frac{5}{4} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \geq -\frac{5}{4}$. Pentru $x_1 = x_2 = x_4 = x_6 = \ldots = x_{16} = -\frac{1}{4}$, $x_3 = x_5 = \ldots = x_{15} = \frac{1}{4}$, $x_k = 0$ pentru $k > 16$, obţinem pentru E valoarea $-\frac{5}{4}$, prin urmare $E_{\min} = -\frac{5}{4}$.

Utilizând inegalitatea $(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \geq 2\sum_{i<j} x_i x_j$, deducem că $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = 1 + 2\sum_{i<j} x_i x_j \leq 1 + (n-1)\cdot 1 = n$, deci $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sqrt{n}$ şi atunci $E \leq \sqrt{n} + (n-1)$. Pentru $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ se atinge egalitatea, aşadar $E_{\max} = n + \sqrt{n} - 1$.

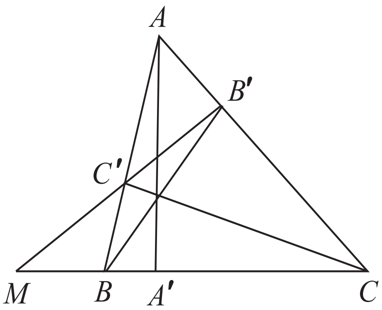
G241. *În triunghiul ABC se consideră cevienele concurente AA', BB' şi CC' astfel încât $A'B \neq A'C$, iar dreptele BC şi $B'C'$ se intersectează în M.*

a) *Demonstraţi că* $\frac{2}{MA'} = \left|\frac{1}{A'B} - \frac{1}{A'C}\right|$.

b) *Determinaţi lungimea segmentului MA' în funcţie de laturile triunghiului, atunci când AA' este bisectoare, respectiv înălţime.*

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

Soluţie. a) Presupunem, ca în figură, că $A'B < A'C$; atunci $\frac{2}{MA'} = \frac{1}{A'B} - \frac{1}{A'C} \Leftrightarrow A'B \cdot AC + MA' \cdot A'B = MA' \cdot A'C - A'B \cdot A'C \Leftrightarrow A'B \cdot MC = A'C \cdot MB \Leftrightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{A'B}{A'C} (*)$. Aplicând teorema lui Menelaus în $\triangle ABC$ cu transversala $M - C' - B'$, obţinem că $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$. Însă, din teorema lui Ceva, $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$ şi, de aici, rezultă că $\frac{MB}{MC} = \frac{A'B}{A'C}$, adică (*) este adevărată.



b) Dacă AA' este bisectoare, atunci $BA' = \frac{ac}{b+c}$ şi $A'C = \frac{ab}{b+c}$, deci $\frac{2}{MA'} = \left|\frac{b+c}{ac} - \frac{b+c}{ab}\right| = \frac{|b^2 - c^2|}{abc}$, iar $MA' = \frac{abc}{|b^2 - c^2|}$.

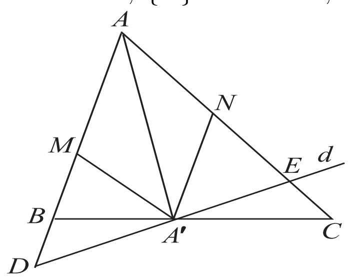
Dacă AA' este înălţime, atunci $A'B = c\cos B = c \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$, iar $A'C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$. Obţinem $MA' = \left(a \cdot \left|\frac{1}{a^2 - b^2 + c^2} - \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2}\right|\right)^{-1}$.

Notă. În cazul în care triunghiul este ascuţiunghic şi cele trei ceviene sunt înălţimile sale, regăsim problema 25480 din *Gazeta Matematică 2/2006*.

G242. *În triunghiul ABC latura AB este fixă, iar lungimea laturii AC este constantă. Fie AA' bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$, cu $A' \in BC$. Arătaţi că dreapta perpendiculară în A' pe AA' trece printr-un punct fix.*

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

Soluţie. Fie d perpendiculară în A' pe AA', $\{D\} = d \cap AB$, $\{E\} = d \cap AC$, $A'M \| AC$, $M \in AB$ şi $A'N \| AB$, $N \in AC$. Vom arăta că D este punctul fix căutat; cum $[AB]$ este fix, ar fi suficient să arătăm că lungimea AD este constantă. Evident că triunghiul ADE este isoscel, deci A' este mijlocul lui DE. Atunci $A'N$ este linie mijlocie în $\triangle ADE$, prin urmare $AD = 2A'N = 2AM$ (deoarece $AMA'N$ este romb). Aplicând de două ori teorema lui Thales în triunghiul ABC, obţinem că $AM = \dfrac{AB \cdot AC}{AB + AC}$. În concluzie, $AD = \dfrac{2AB \cdot AC}{AB + AC} =$ constant, deci d trece prin punctul fix D.



G243. *Fie O intersecţia diagonalelor trapezului $ABCD$, cu baza mare CD. Punctele M şi N sunt astfel încât AD separă M şi O, BC separă N şi O, iar $\triangle MAD \sim \triangle NCB \sim \triangle OAB$. Arătaţi că $BD \cdot AC > AB \cdot MN$.*

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

Soluţie. Cum $\widehat{AMD} \equiv \widehat{AOB}$, rezultă că patrulaterul $AMDO$ este inscriptibil, prin urmare $\widehat{AMO} \equiv \widehat{ADO}$. În plus, $m(\widehat{MAO}) = m(\widehat{MAD}) + m(\widehat{DAO}) = m(\widehat{OAB}) + m(\widehat{DAO}) = m(\widehat{DAB})$, aşadar $\triangle MAO \sim \triangle DAB$. Rezultă că $\dfrac{AO}{AB} = \dfrac{MO}{BD}$, deci $AO \cdot BD = AB \cdot MO$. Analog, din asemănarea $\triangle NOC \sim \triangle BDC$ obţinem că $BD \cdot CO = NO \cdot DC$. Adunând aceste relaţii, deducem că $BD \cdot AC = AB \cdot MO + DC \cdot NO > AB \cdot MO + AB \cdot NO = AB(MO + NO) \geq AB \cdot MN$.

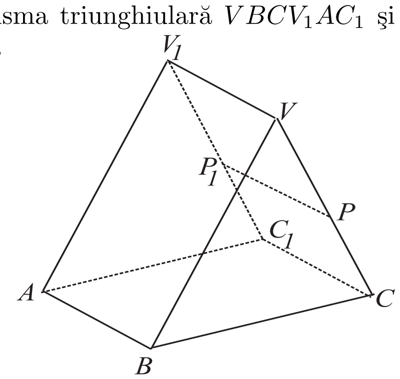
Observaţie. De fapt, punctele M, O şi N sunt coliniare: $m(\widehat{MON}) = m(\widehat{MOA}) + m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BON})$, iar $\widehat{MOA} \equiv \widehat{MDA} \equiv \widehat{ABO}$, $\widehat{BON} \equiv \widehat{BCN} \equiv \widehat{BAO}$, aşadar $m(\widehat{MON}) = m(\widehat{ABO}) + m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BAO}) = 180°$.

G244. *Fie $VABC$ un tetraedru, iar M, N, P mijloacele muchiilor VA, VB respectiv VC. Demonstraţi că $2(\mathcal{A}_{MBC} + \mathcal{A}_{NCA} + \mathcal{A}_{PAB}) < \mathcal{A}_{VBC} + \mathcal{A}_{VCA} + \mathcal{A}_{VAB} + 3\mathcal{A}_{ABC}$.*

Mihály Bencze, Braşov

Soluţie. Completăm tetraedrul $VABC$ la prisma triunghiulară $VBCV_1AC_1$ şi fie P_1 mijlocul muchiei V_1C_1. Vom demonstra că $2\mathcal{A}_{PAB} < \mathcal{A}_{VAB} + \mathcal{A}_{ABC}$(1). Înmulţind cu 2 ambii membri ai inegalităţii, avem:

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow 2\mathcal{A}_{ABPP_1} < \mathcal{A}_{ABVV_1} + \mathcal{A}_{ABCC_1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 \cdot PP_1 \cdot d(A, PP_1) < CC_1 \cdot d(A, CC_1) + \\ &+ VV_1 \cdot d(A, VV_1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2d(A, PP_1) < d(A, CC_1) + d(A, VV_1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 \cdot AP_2 < AC_2 + AV_2, \quad (2)\end{aligned}$$



unde P_2, C_2, V_2 sunt intersecţiile dintre planul α şi PP_1, CC_1 respectiv VV_1, iar α este planul ce conţine punctul A şi este perpendicular pe planul (VCC_1). Se observă uşor că AP_2 este mediană în triunghiul AC_2V_2 şi atunci are loc inegalitatea (2), deci şi (1). Scriem cele două inegalităţi analoage lui (1) şi, prin adunarea lor, rezultă concluzia.

G245. *Un triunghi echilateral are vârfurile în interiorul sau pe laturile unui hexagon regulat de latură* 1 *şi nu conţine centrul hexagonului în interiorul său. Care este lungimea maximă posibilă a laturii triunghiului?*

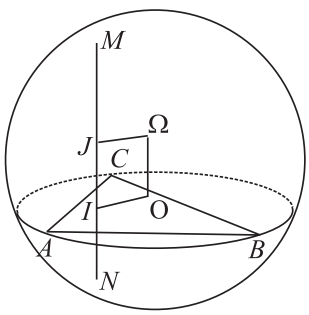
Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Răspunsul este $2/\sqrt{3}$. Dacă hexagonul este $ABCDEF$, triunghiul AMN pentru care latura MN are ca dreaptă suport mediatoarea comună a segmentelor BC şi EF realizează acest maxim (înălţimea sa are lungimea 1).

Pentru a vedea că, într-adevăr, aceasta este maximul căutat, să considerăm un triunghi echilateral XYZ ale cărui vârfuri sunt situate în interiorul sau pe laturile hexagonului regulat $ABCDEF$ şi astfel încât centrul O al hexagonului nu aparţine interiorului triunghiului XYZ. Interiorul triunghiului este intersecţia benzilor deschise delimitate de către o latură a triunghiului şi paralela la acea latură prin vârful opus, de aceea centrul hexagonului nu aparţine măcar uneia dintre cele trei benzi.

Să admitem că O nu aparţine benzii delimitate de latura YZ a triunghiului şi paralela prin X la YZ şi să considerăm paralela la YZ prin O. Această paralelă intersectează două laturi opuse ale hexagonului şi, tot fără a restrânge generalitatea, putem considera că această paralelă intersectează pe AB în P şi pe DE în Q. De asemenea, datoriă simetriei, putem presupune că XYZ este inclus în pentagonul $PBCDQ$. (La limită, când paralela prin O la YZ trece prin vârfuri ale hexagonului, pentagonul devine patrulater.) E clar că înălţimea din X a triunghiului XYZ este cel mult egală cu cea mai mare dintre distanţele de la punctele B, C, D ls dreapta PQ, iar la rândul ei, această distanţă (oricare ar fi ea) este cel mult egală cu 1. De exemplu, dacă ne referim la distanţa de la C la PQ, aceasta e cel mult egală cu $CO = 1$ (perpendiculara e mai scurtă decât oblică). În concluzie, lungimea înălţimii oricărui triunghi echilateral care îndeplineşte condiţiile din enunţ este cel mult egală cu 1, ceea ce înseamnă că lungimea laturii unui astfel de triunghi este cel mult egală cu $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ şi cu asta soluţia este completă.

B. Nivel liceal



L236. *Pe sfera de centru* Ω *şi rază* 7 *se consideră punctele* A, B, C *astfel încât* $BC = 4$, $CA = 5$ *şi* $AB = 6$. *Perpendiculara pe planul triunghiului* ABC *în centrul cercului înscris în acest triunghi intersectează sfera în punctele* M *şi* N. *Determinaţi lungimea segmentului* MN.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

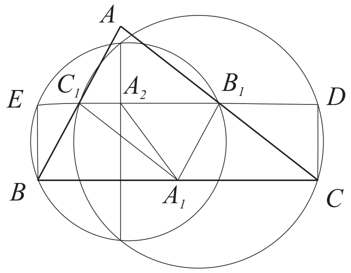
Soluţie. Notăm cu O şi I centrele cercurilor circumscris, respectiv înscris ale triunghiului ABC. Evident, O este proiecţia lui Ω pe planul (ABC). În

$\triangle ABC$ cunoaştem lungimile laturilor, prin urmare $p = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{15}{2}$, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \dfrac{15\sqrt{7}}{4}$, $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$, $R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{8}{\sqrt{7}}$, iar $OI^2 = R^2 - 2Rr = \dfrac{8}{7}$. Dacă J este mijlocul segmentului MN, atunci $OIJ\Omega$ este dreptunghi, deci $\Omega J = \dfrac{8}{7}$. Din triunghiul dreptunghic ΩJM obţinem că $JM^2 = M\Omega^2 - \Omega J^2 = \sqrt{\dfrac{335}{7}}$, aşadar $MN = 2JM = 2\sqrt{\dfrac{355}{7}}$.

L237. *Fie A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor BC, CA respectiv AB ale triunghiului ascuţitunghic ABC. Coarda comună a cercurilor de diametre BB_1 şi CC_1 intersectează B_1C_1 în A_2; construim analog punctele B_2 şi C_2. Demonstraţi că dreptele A_1A_2, B_1B_2 şi C_1C_2 sunt concurente.*

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

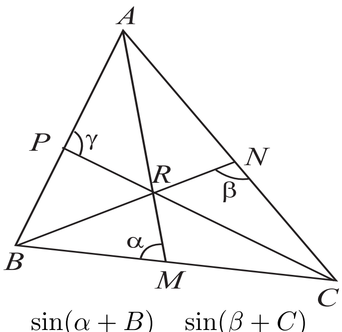
Soluţie. Fie E al doilea punct de intersecţie dintre cercul de diametru BB_1 şi dreapta B_1C_1, iar D al doilea punct de intersecţie dintre cercul de diametru CC_1 şi dreapta B_1C_1. Din $B_1C_1 \| BC$ şi $m(\widehat{B_1EB}) = m(\widehat{C_1DC}) = 90°$, rezultă că $BCDE$ este drepuntghi. Folosind triunghiurile dreptunghice BEC_1 şi CDB_1, obţinem că $\dfrac{\operatorname{ctg} B}{\operatorname{ctg} C} = \dfrac{EC_1}{BE} : \dfrac{DB_1}{DC} = \dfrac{EC_1}{DB_1}$. Punctul A_2 fiind pe axa radicală a cercurilor de diametre BB_1 şi CC_1, avem $A_2E \cdot A_2B_1 = A_2C_1 \cdot A_2D \Leftrightarrow A_2C_1 \cdot A_2B_1 + EC_1 \cdot A_2B_1 = A_2C_1 \cdot A_2B_1 + A_2C_1 \cdot DB_1 \Leftrightarrow EC_1 \cdot A_2B_1 = A_2C_1 \cdot DB_1 \Leftrightarrow \dfrac{EC_1}{DB_1} = \dfrac{A_2C_1}{A_2B_1}$. Astfel, $\dfrac{\operatorname{ctg} B}{\operatorname{ctg} C} = \dfrac{A_2C_1}{A_2B_1}$ şi, analog, $\dfrac{\operatorname{ctg} C}{\operatorname{ctg} A} = \dfrac{B_2A_1}{B_2C_1}$, iar $\dfrac{\operatorname{ctg} A}{\operatorname{ctg} B} = \dfrac{C_2B_1}{C_2A_1}$. De aici, $\dfrac{A_2C_1}{A_2B_1} \cdot \dfrac{C_2B_1}{C_2A_1} \cdot \dfrac{B_2A_1}{B_2C_1} = 1$ şi reciproca teoremei lui Ceva conduce la concluzia problemei.



Notă. D-l. **Titu Zvonaru** observă că punctul de concurenţă a dreptelor A_1A_2, B_1B_2 şi C_1C_2 este, de fapt, izotomicul (în $\triangle A_1B_1C_1$) ortocentrului triunghiului $A_1B_1C_1$.

L238. *Fie R un punct în interiorul triunghiului ABC, iar $\{M\} = AR \cap BC$, $\{N\} = BR \cap AC$, $\{P\} = CR \cap AB$. Notăm cu α, β şi γ măsurile unghiurilor $\widehat{AMB}$, $\widehat{BNC}$, respectiv $\widehat{CPA}$. Dacă $\alpha - \beta + \gamma - C + A$, $-\alpha + \beta + \gamma - B + C$ şi $\alpha + \beta - \gamma - A + B$ se află în intervalul $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, arătaţi că R este centrul cercului înscris în triunghiul ABC.*

Marius Drăgan, Bucureşti



Soluţie. Din teorema lui Ceva (forma trigonometrică) obţinem: $\dfrac{\sin MAB}{\sin MAC} \cdot \dfrac{\sin NBC}{\sin NBA} \cdot \dfrac{\sin PCB}{\sin PCA} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\sin(\alpha + B)}{\sin(\alpha - C)} \cdot \dfrac{\sin(\beta + C)}{\sin(\beta - A)} \cdot$

$\dfrac{\sin(\gamma+A)}{\sin(\gamma-B)} = 1 \Leftrightarrow \sin(\alpha+B)\cdot\sin(\beta+C)\sin(\gamma+A) = \sin(\alpha-C)\sin(\beta-A)\sin(\gamma-B) \Leftrightarrow$ $\cos(\alpha+B-\gamma-A)\sin(\beta+C) - \cos(\alpha+B+\gamma+A)\cdot\sin(\beta+C) = \cos(\alpha-C-\gamma-B)\sin(\beta-A) - \cos(\alpha-C+\gamma-B)\sin(\beta-A)$. După transformarea produselor în sume şi efectuarea calculelor, găsim că $\sin A\cos(-\alpha+\beta+\gamma-B+C)+\sin B\cdot\cos(\alpha-\beta+\gamma+A-C)+\sin C\cdot\cos(\alpha+\beta-\gamma-A+B) = 0$ de unde, ţinând seama de ipoteza problemei, rezultă că $\alpha-\beta+\gamma+A-C = -\alpha+\beta+\gamma-B+C = \alpha+\beta-\gamma+B-A = \dfrac{\pi}{2}$. Soluţia acestui sistem este $\alpha = \dfrac{1}{2}A+C$, $\beta = \dfrac{1}{2}A+C$, $\gamma = \dfrac{1}{2}C+B$, prin urmare R este intersecţia bisectoarelor triunghiului ABC.

L239. *Fie $ABCD$ patrulater circumscriptibil cu $AB\|CD$, iar A', B', C' şi D' sunt punctele de tangenţă ale cercului înscris cu laturile AB, BC, CD respectiv DA. Se notează cu A'', B'', C'', D'' simetricele punctelor A', B', C' respectiv D' faţă de mijloacele laturilor pe care se află. Demonstraţi că:*

a) $S_{A'B'C'D'} \le S_{A''B''C''D''}$;

b) $S_{A'B'C'D'} + S_{A''B''C''D''} \le S_{ABCD}$.

Marius Olteanu, Rm. Vâlcea

Soluţie. Notăm $AA' = AD' = A''B = DD'' = u$, $BB' = A'B = A''A = B''C = v$, $CC' = B'C = C''D = BB'' = w$ şi $DC' = DD' = D''A = CC'' = t$; fie încă O centrul cercului şi r raza acestuia. Aplicând teorema înălţimii în triunghiurile dreptunghice AOD şi BOC, obţinem că $ut = vw = r^2$. Apoi, avem

$$S_{DC''D''} = \frac{uw\sin D}{2} = \frac{uw}{2}\cdot\frac{2\operatorname{tg}\frac{D}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{D}{2}} = uw\cdot\frac{\frac{r}{t}}{1+\frac{r^2}{t^2}} = \frac{uwtr}{r^2+t^2}$$

şi încă trei relaţii similare. Astfel,

$$S_{A''B''C''D''} = S_{ABCD} - r\left(\frac{uwt}{r^2+t^2} + \frac{vwt}{r^2+w^2} + \frac{uvw}{r^2+v^2} + \frac{uvt}{r^2+u^2}\right).$$

Mai observăm că $S_{DC'D'} = \dfrac{t^2\sin D}{2} = r\cdot\dfrac{t^3}{r^2+t^2}$, prin urmare

$$S_{A'B'C'D'} = S_{ABCD} - r\left(\frac{t^3}{r^2+t^2} + \frac{w^3}{r^2+w^2} + \frac{v^3}{r^2+v^2} + \frac{u^3}{r^2+u^2}\right).$$

a) Ţinând seama de cele de mai sus, avem:

$$\begin{aligned}
S_{A'B'C'D'} \le S_{A''B''C''D''} &\Leftrightarrow \sum\frac{t^3}{r^2+t^2} \ge \sum\frac{uwt}{r^2+t^2} \Leftrightarrow \sum\frac{t^3}{ut+t^2} \ge \sum\frac{uwt}{ut+t^2} \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow \frac{t^2+u^2}{t+u} + \frac{v^2+w^2}{v+w} \ge \frac{uw+vt}{u+t} + \frac{uw+vt}{v+w} \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow (t^2+u^2)(v+w) + (t+u)(v^2+w^2) \ge (uw+vt)(u+v+w+t) \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow (tw-uv)(w+t-u-v) \ge 0 \Leftrightarrow \left(t\frac{r^2}{v} - \frac{r^2}{t}v\right)\left(\frac{r^2}{v} + t - \frac{r^2}{t} - v\right) \ge 0 \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow (t^2-v^2)(r^2t - r^2v + t^2v - v^2t) \ge 0 \Leftrightarrow (t-v)^2(t+v)(r^2+tv) \ge 0,
\end{aligned}$$

relaţie adevărată. Se constată că egalitatea se atinge în cazul în care $ABCD$ este romb.

b) Cum $S_{ABCD} = r(u+v+t+w)$, inegalitatea de demonstrat revine la

$$\sum \frac{uwt}{r^2+t^2} + \sum \frac{t^3}{r^2+t^2} \geq u+v+t+w \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{t^2+u^2}{t+u} + \frac{v^2+w^2}{v+w} + \frac{uw+vt}{t+u} + \frac{uw+vt}{v+w} \geq u+v+t+w \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (t^2+u^2)(v+w) + (t+u)(v^2+w^2) \geq (uw+vt)(u+v+t+w) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (tv-uw)(t+v-u-w) \geq 0 \Leftrightarrow \left(t\frac{r^2}{w} - \frac{r^2}{t}w\right)\left(t + \frac{r^2}{w} - \frac{r^2}{t} - w\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (t-w)^2(t+w)(r^2+tw) \geq 0,$$

inegalitate adevărată. Egalitatea se atinge în cazul în care $ABCD$ este trapez isoscel.

Notă. S-a primit soluţie corectă de la prof. **Nela Ciceu**, Bacău.

L240. *Demonstraţi că în orice triunghi are loc inegalitatea*

$$\frac{2r}{R} \sum \frac{bc}{ab+ac} + \sum \frac{c}{a+b} \leq 3.$$

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţia 1 (a autorului)**.** Inegalitatea rezultă în mod evident din identitatea

$$(*) \qquad \frac{2r}{R} \sum \frac{abc}{(b+c)(a^2-(b-c)^2)} + \sum \frac{c}{a+b} = 3.$$

Pentru a vedea de unde se obţine aceasta, observăm întâi că avem

$$\cos B + \cos C = 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} =$$
$$= 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \cdot \frac{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = \frac{r}{R}\frac{a+b}{a+b-c},$$

unde, pentru utlima egalitate, am folosit formulele $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$, $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$ şi cele analoage. Pe de altă parte, cu teorema cosinusului, avem imediat

$$\cos B + \cos C = \frac{(b+c)(a^2-(b-c)^2)}{2abc}.$$

Folosind acestea, precum şi formulele obţinute prin permutări circulare, deducem că

$$\sum \frac{1}{\cos B + \cos C} = \frac{R}{r}\left(3 - \sum \frac{c}{a+b}\right) = 2\sum \frac{abc}{(b+c)(a^2-(b-c)^2)},$$

de unde rezultă identitatea (*) şi, de aici, inegalitatea din enunţ.

Soluţia 2 (**Daniel Văcaru**, Piteşti)**.** Vom demonstra că

$$(**)\qquad \frac{2r}{R}\cdot\frac{bc}{ab+ac}\leq\frac{2(p-a)}{b+c};$$

odată demonstrată această inegalitate, scriindu-le şi pe celelalte două similare şi sumând, obţinem cerinţa problemei.

Inegalitatea (**) se rescrie, succesiv, astfel:

$$\begin{aligned}(**)&\Leftrightarrow\frac{r}{R}\cdot\frac{bc}{a}\leq p-a\Leftrightarrow\frac{r}{R}\cdot\frac{abc}{a^2}\leq p-a\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow\frac{S}{p}\cdot\frac{4S}{a^2}\leq p-a\Leftrightarrow\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{pa^2}\leq p-a\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow 4(p-b)(p-c)\leq a^2\Leftrightarrow(a+c-b)(a+b-c)\leq a^2.\end{aligned}$$

Această ultimă inegalitate rezultă imediat din inegalitatea mediilor $MG\leq MA$ şi, astfel, soluţia este completă.

Soluţia 3 (**Titu Zvonaru**, Comăneşti)**.** Deoarece $\frac{2r}{R}=\frac{2S}{p}\cdot\frac{4S}{abc}=\frac{8p(p-a)(p-b)(p-c)}{pabc}=\frac{8(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$, avem:

$$\begin{aligned}&\frac{2r}{R}\sum\frac{ab}{bc+ca}+\sum\frac{c}{a+b}-3=\sum\left(\frac{8(p-a)(p-b)(p-c)}{c^2(a+b)}+\frac{c}{a+b}-1\right)=\\&=\sum\left(\frac{8(p-a)(p-b)(p-c)}{c^2(a+b)}-\frac{2(p-c)}{a+b}\right)=\sum\frac{2(p-c)[4(p-a)(p-b)-c^2]}{c^2(a+b)}=\\&\sum\frac{2(p-c)[(c-a+b)(c+a-b)-c^2]}{c^2(a+b)}=-\sum\frac{2(p-c)(a-b)^2}{c^2(a+b)}\leq 0.\end{aligned}$$

Avem egalitate dacă şi numai dacă $a=b=c$.

Notă. S-a primit soluţie corectă de la elevul **Ovidiu Păucă**, Truşeşti (Botoşani).

L241. *Arătaţi că* $\frac{\sin^3 x}{(1+\sin^2 x)^2}+\frac{\cos^3 x}{(1+\cos^2 x)^2}\leq\frac{2\sqrt{2}}{9}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. (*În legătură cu problema L211 din RecMat-2/2011.*)

Dumitru Barac, Sibiu

Soluţie. Notând $\sin x=a$, $\cos x=b$, avem de arătat că $\frac{a^3}{(1+a^2)^2}+\frac{b^3}{(1+b^2)^2}\leq\frac{2\sqrt{2}}{9}$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$ cu $a^2+b^2=1$. Observăm că pentru $a=b=\frac{1}{\sqrt{2}}$ are loc egalitatea. Folosim metoda parabolei tangente: căutăm $A,B\in\mathbb{R}$ astfel încât $\frac{t^3}{(1+t^2)^2}\leq At^2+B$, $\forall t\in\mathbb{R}$ (de fapt, este suficient pentru $t\in[-1,1]$). Impunem condiţiile $\left.\frac{t^3}{(1+t^2)^2}\right|_{t=\frac{1}{\sqrt{2}}}=\left.(At^2+B)\right|_{t=\frac{1}{\sqrt{2}}}$ şi $\left.\left(\frac{t^3}{(1+t^2)^2}\right)'\right|_{t=\frac{1}{\sqrt{2}}}=\left.(At^2+B)'\right|_{t=\frac{1}{\sqrt{2}}}$; obţinem

$\frac{\sqrt{2}}{9} = \frac{A}{2} + B$, respectiv $A = \frac{5\sqrt{2}}{27}$, deci $B = \frac{\sqrt{2}}{54}$. Demonstrăm acum că

$$(*) \qquad \frac{t^3}{(1+t^2)^2} \leq \frac{5\sqrt{2}}{27}t^2 + \frac{\sqrt{2}}{54}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Avem succesiv:

$$(*) \Leftrightarrow 27t^3\sqrt{2} \leq (10t^2+1)(t^4+2t^2+1) \Leftrightarrow 10t^6 + 21t^4 - 27t^3\sqrt{2} + 12t^2 + 1 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (t\sqrt{2}-1)^2[(5t^2+5t\sqrt{2}+16)t^2 + (2t^2+2t\sqrt{2}+1)] \geq 0,$$

iar această inegalitate este adevărată întrucât trinoamele $5t^2+5t\sqrt{2}+16$ şi $2t^2 + 2t\sqrt{2}+1$ au discriminanţii negativi. Acum, luând în (*) $t = a$ şi $t = b$ şi adunând membru cu membru inegalităţile obţinute, rezultă cerinţa problemei.

Notăm că marginea $\frac{2\sqrt{2}}{9}$ este efectiv atinsă şi este mai bună decât estimarea $\frac{3\sqrt{3}}{16}$ din problema *L211* citată.

L242. *Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile x, y, z şi diagonala d. Arătaţi că*

$$\frac{d^4}{ad^4+bx^4} + \frac{d^4}{ad^4+by^4} + \frac{d^4}{ad^4+bz^4} \leq \frac{27}{9a+b},$$

oricare ar fi $a, b > 0$, $6a \geq 5b$. (În legătură cu L231 din RecMat-2/2012.)

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Avem: $\frac{d^4}{ad^4+bx^4} - \frac{9}{9a+b} = \frac{b(d^2+3x^2)(d^2-3x^2)}{(ad^4+bx^4)(9a+b)} =$
$\frac{b}{9a+b}\left(\frac{(4x^2+y^2+z^2)(y^2-x^2)}{ad^4+bx^4} + \frac{(4x^2+y^2+z^2)(z^2-x^2)}{ad^4+bx^4}\right)$, prin urmare

$$\sum \frac{d^4}{ad^4+bx^4} - \frac{27}{9a+b} = \frac{b}{9a+b}\sum\left(\frac{(4x^2+y^2+z^2)(y^2-x^2)}{ad^4+bx^4} + \frac{(4x^2+y^2+z^2)(z^2-x^2)}{ad^4+bx^4}\right)$$
$$= \frac{b}{9a+b}\sum\left(\frac{(4x^2+y^2+z^2)(y^2-x^2)}{ad^4+bx^4} + \frac{(x^2+4y^2+z^2)(x^2-y^2)}{ad^4+by^4}\right) =$$
$$= \frac{b}{9a+b}\sum(x^2-y^2)\left(\frac{x^2+4y^2+z^2}{ad^4+by^4} - \frac{4x^2+y^2+z^2}{ad^4+bx^4}\right) =$$
$$= \frac{b}{9a+b}\sum\frac{(x^2-y^2)^2[(b-3a)(x^4+y^4) - 3az^4 + (5b-6a)x^2y^2 + (b-6a)(x^2z^2+y^2z^2)}{(ad^4+by^4)(ad^4+bx^4)},$$

iar acest număr este cel mult egal cu 0 în condiţiile din enunţ (deoarece $5b \leq 6a$ implică $b < 3a$ şi $b < 6a$). Avem egalitate dacă şi numai dacă $x = y = z$.

L243. *Pentru $m, n \in \mathbb{N}^*$ şi $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, demonstraţi inegalitatea*

$$\frac{a^m b^m c^m (a^n+b^n+c^n)^2}{a^{3m+2n}+b^{3m+2n}+c^{3m+2n}} \leq 3.$$

(În legătură cu problema VIII.149 din RecMat-1/2012.)

Neculai Stanciu, Buzău

Soluţia 1 (**Emanuel Necula**, elev, Câmpulung Muscel, **Titu Zvonaru**, Comăneşti şi **Daniel Văcaru**, Piteşti)**.** Putem presupune că $a \geq b \geq c$. Folosind inegalitatea lui Cebîşev, inegalitatea mediilor $MA \geq MG$ şi binecunoscuta $3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2$, obţinem:

$$\begin{aligned}
&3(a^{3m+2n} + b^{3m+2n} + c^{3m+2n}) = 3(a^{3m} \cdot a^{2n} + b^{3m} \cdot b^{2n} + c^{3m} \cdot c^{2n}) \geq \\
&\geq (a^{3m} + b^{3m} + c^{3m})(a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}) \geq 3a^m b^m c^m (a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}) \geq \\
&\geq a^m b^m c^m (a^n + b^n + c^n)^2.
\end{aligned}$$

Avem egalitate dacă şi numai dacă $a = b = c$.

Soluţia 2 (a autorului)**.** Folosind inegalitatea $\left(\dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{3}\right)^2 \leq \dfrac{a + b + c}{3}$, avem:

$$\begin{aligned}
a^m b^m c^m (a^n + b^n + c^n)^2 &= [a^{\frac{m}{2}} b^{\frac{m}{2}} c^{\frac{m}{2}} (a^n + b^n + c^n)]^2 = \\
&= [(a^{m+2n} b^m c^m)^{\frac{1}{2}} + (a^m b^{m+2n} c^m)^{\frac{1}{2}} + (a^m b^m c^{m+2n})^{\frac{1}{2}}]^2 \leq \\
&\leq 3(a^{m+2n} b^m c^m + a^m b^{m+2n} c^m + a^m b^m c^{m+2n}).
\end{aligned}$$

Din inegalitatea mediilor ponderate obţinem că

$$a^{m+2n} b^m c^m \leq \frac{m + 2n}{3m + 2n} a^{3m+2n} + \frac{m}{3m + 2n} b^{3m+2n} + \frac{m}{3m + 2n} c^{3m+2n}$$

şi încă două inegalităţi similare. Adunându-le membru cu membru, rezultă cerinţa problemei.

L244. *Fie $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, $a \geq b \geq c$. Demonstraţi că are loc inegalitatea*

$$(a^2 + c^2)(ab + ac + bc) - 2ac(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2c(a - b)(a - c)(b - c).$$

Gabriel Dospinescu, Paris şi Marian Tetiva, Bârlad

Soluţia 1 (a autorului)**.** Totul rezultă din identitatea

$$\begin{aligned}
&(a^2 + c^2)(ab + ac + bc) - 2ac(a^2 + b^2 + c^2) - 2c(a - b)(a - c)(b - c) = \\
&= c^2(a - c)^2 + 2c^2(a - b)(b - c) + 2c(a - c)^2(b - c) + (a - c)^3(b - c).
\end{aligned}$$

Propunem cititorului să verifice această identitate, folosind eventual metoda normării (a se vedea, de exemplu, *Inegalităţi -idei şi metode* de **Mihai Onucu Drimbe**, Editura GIL, Zalău, 2003, pp. 79-80).

Inegalitatea din enunţ întăreşte inegalitatea (*G. Dospinescu*):

$$\frac{a^2 + c^2}{2ac} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + ac + bc}, \quad a \geq b \geq c > 0.$$

Soluţia 2 (**Daniel Văcaru**, Piteşti)**.** Pornim din membrul stâng:

$$\begin{aligned}
MS &= (a^2 + c^2)(ab + bc) - ac(a^2 + c^2) - 2ac \cdot b^2 \geq \\
&\geq (a^2 + c^2)(ab + bc - ca) - (a^2 + c^2) \cdot b^2 = \\
&= (a^2 + c^2)(ab + bc - ca - b^2) = (a^2 + c^2)(a - b)(b - c).
\end{aligned}$$

Rămâne să probăm că $a^2+c^2 \geq 2c(a-c)$; acest lucru revine la $a^2+3c^2 \geq 2ac$, ceea ce este evident, întrucât $a^2+3c^2 \geq a^2+c^2 \geq 2ac$.

Notă. Am mai primit soluţie corectă de la d-l. **Titu Zvonaru**.

L245. *Fie $f, g : [0,1] \to [0,1]$ două funcţii continue astfel încât* $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{1}{k} f\left(g\left(\frac{k}{n}\right)\right)$, *$\forall k, n \in \mathbb{N}^*$, $k \leq n$. Demonstraţi că cele două funcţii sunt egale.*

Florin Stănescu, Găeşti

Soluţie (**Moubinool Omarjee**, Paris). Obţinem imediat că

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sum f\left(g\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right).$$

Funcţia $f \circ g$ fiind continuă, deci integrabilă, limita şirului $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(g\left(\frac{k}{n}\right)\right)$ există şi este finită; atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(g\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right) = 0$. Deducem că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right| = \int_0^1 x|f(x)-g(x)|dx \leq 0,$$

de unde $\int_0^1 x|f(x)-g(x)|dx = 0$. Însă funcţia $x \mapsto x|f(x)-g(x)|$ este continuă şi nenegativă; având integrala nulă, rezultă că funcţia este nulă. De aici, obţinem că $f(x) = g(x)$, $\forall x \in (0,1]$. Faptul că $f(0) = g(0)$ urmează din continuitatea funcţiilor f şi g în 0.

Notă. Autorul problemei arată mai întâi că $\int_0^1 P(x)f(x)dx = \int_0^1 P(x)g(x)dx$, oricare ar fi polinomul cu coeficienţii reali P şi foloseşte apoi faptul că orice funcţie continuă pe un interval este limita uniformă a unui şir de funcţii polinomiale.

Am primit soluţie corectă şi de la d-l **Daniel Văcaru**.
