Soluţiile problemelor propuse în nr. 1/2013

Clasele primare

P.255. *Dorina are un număr de mere egal cu cel mai mare număr scris cu o cifră. Eu aş avea cât Dorina, dacă aş mai avea* 2 *mere. Câte mere am eu?*
(*Clasa I*) **Inst. Maria Racu, Iaşi**

Soluţie. $9-2=7$ (mere).

P.256. *Doamna învăţătoare a scris pe tablă şase litere m, şase litere i şi şase litere n. Câte bastonaşe a folosit doamna învăţătoare pentru scrierea acestor litere?*
(*Clasa I*) **Dumitriţa Grigoriu, elevă, Iaşi**

Soluţie. Litera m conţine două bastonaşe şi o zală, litera n conţine un bastonaş şi o zală, iar litera i este formată dintr-un singur bastonaş. S-au folosit 24 bastonaşe.

P.257. *Completaţi căsuţele goale din şirul* $1,1,2,1,2,3,1,2,\square,\square,\square,\square,\square,\square,\square$.
(*Clasa I*) **Mihaela Buleandră, elevă, Iaşi**

Soluţie. Căsuţele trebuie completate cu cifrele: $3,4,1,2,3,4,5$.

P.258. *Aflaţi numerele* a,b,c *şi* d, *ştiind că* $a-18=b-15=c-8=b-c-1$.
(*Clasa a II-a*) **Tatiana Ignat, elevă, Iaşi**

Soluţie. Din egalitatea $b-15=b-c-1$ obţinem $15=c+1$, de unde $c=14$ şi $c-8=6$. Urmează că $a-18=6$, $a=24$ şi $b-15=6$, $b=21$.

P.259. *Fie şirul de numere* $1,2,3,\ldots,12$. *Se formează grupe de câte trei numere luate din acest şir. Câte dintre grupe pot avea suma numerelor egală cu* 30*?*
(*Clasa a II-a*) **Ionuţ Airinei, elev, Iaşi**

Soluţie. Observăm că în această sumă nu putem avea termeni mai mici ca 7, deoarece $6+11+12=29<30$. Analog, în sumă nu putem avea toţi termenii mai mari ca 9, căci $10+11+12=33>30$. Rămâne că într-o sumă trebuie să avem unul dintre numerele $7,8,9$. Cercetând cazurile posibile, obţinem sumele: $7+11+12=30$, $8+10+12=30$ şi $9+10+11=30$. Concluzionăm că există numai trei grupe de numere care îndeplinesc condiţiile problemei.

P.260. *Bomboanele dintr-o pungă se împart la cinci copii. Fiecare copil primeşte cel mult patru bomboane şi cel mult trei copii au acelaşi număr de bomboane. Care este cel mai mare număr posibil de bomboane din pungă?*
(*Clasa a II-a*) **Alexandra Tololoi, elevă, Iaşi**

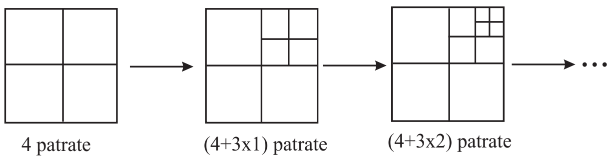
Soluţie. În pungă trebuie să avem cel mult $4+4+4+3+3=18$ bomboane.

P.261. *Scrieţi numărul* 66 *ca sumă de numere naturale al căror produs este tot* 66*. Câte soluţii are problema?* (*Nu se va ţine seama de ordinea termenilor.*)
(*Clasa a III-a*) **Monica Răileanu, elevă, Iaşi**

Soluţie. $66=2\cdot3\cdot11 = 6\cdot11 = 2\cdot33 = 3\cdot22$. Avem: $66=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{50 \text{ de } 1}+2+3+11$;
$66=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{49 \text{ de } 1}+6+11$; $66=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{31 \text{ de } 1}+2+33$; $66=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{41 \text{ de } 1}+3+22$.

P.262. *Arătaţi că un pătrat din carton poate fi împărţit, fără pierdere de material, în* 31 *de pătrate.*
(*Clasa a III-a*) **Andreea Simona Simion, elevă, Iaşi**

Soluţie. Dăm următorul algoritm de împărţire a unui pătrat:



Deoarece $31 = 4 + 3 \times 9$, împărţirea este posibilă.

P.263. *Tatăl termină o lucrare în* 10 *ore, iar fiul în* 15 *ore. În câte ore termină lucrarea cei doi, dacă lucrează împreună?*
(*Clasa a III-a*) **Paula Balan, elevă, Iaşi**

Soluţie. Reprezentăm volumul lucrării printr-un segment, pe care îl împărţim în 30 de părţi egale. Într-o oră, tatăl acoperă 3 părţi, iar fiul 2 părţi, în total 5 părţi. Rezultă că lucarea va fi terminată în $30 : 5 = 6$ ore.

P.264. *Dacă extragem o coală dintr-un ziar, observăm că suma celor patru numere care indică paginile este* 50*. Puteţi spune cu ce numere este paginată coala din mijloc?*
(*Clasa a III-a*) **Codruţa Filip, elevă, Iaşi**

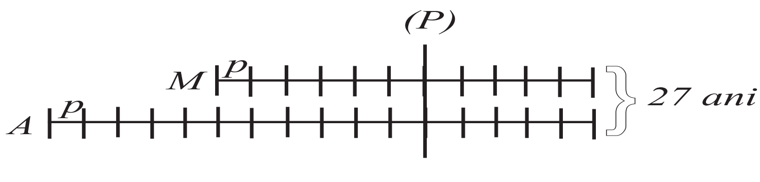
Soluţie. Suma celor patru numere care indică paginileunei coale este aceeaşi. Pe coala din mijloc avem 4 numere consecutive cu suma 50. Acestea sunt: $11, 12, 13, 14$.

P.265. *Fie numerele nenule a, b, c, d astfel încât $a+b = 18$, $b+c = 14$, $c+d = 10$. Calculaţi suma $5a + 6b + 8c + 7d$.*
(*Clasa a IV-a*) **Nicolae Ivăşchescu, Craiova**

Soluţie. $5a+6b+8c+7d = 5\times(a+b)+(b+c)+7\times(c+d) = 5\times18+14+7\times10 =$
$= 90 + 14 + 70 = 174$.

P.266. *Maria are astăzi de şase ori vârsta pe care o avea când fratele ei, Alexandru, avea vârsta ei actuală. Când ea va avea vârsta de azi a fratelui ei, cei doi vor avea împreună* 27 *de ani. Ce vârstă are acum Maria?*
(*Clasa a IV-a*) **Irina Căpraru, Iaşi**

Soluţie. Să figurăm vârstele celor doi fraţi, raportându-ne la prezent (P):



$11p+16p=27 \Rightarrow 27p=27 \Rightarrow p=1$ (an).

Maria are acum 6×1 an $= 6$ ani.

P.267. *Pentru un grup de copii s-au adus de trei ori mai multe mandarine decât portocale. Fiecare copil trebuia să primească* 2 *portocale şi* 5 *mandarine, însă din greşeală doi copii au primit câte o mandarină în plus. Ştiind că au rămas* 19 *portocale şi* 92 *mandarine, să se afle câţi copii sunt în grup.*

(*Clasa a IV-a*) **Mariana Nastasia, elevă, Iaşi**

Soluţie. Dacă mandarinele ar fi fost împărţite corect, atunci ar fi rămas $92+2=94$ mandarine. Dacă notăm cu ,,a" numărul copiilor, atunci $3(2a+19)=5a+94$, de unde $a=37$ (copii).

P.268. *Pe o foaie sunt scrise numerele de la* 1 *la* 20*. Să se arate că nu pot fi formate, din cele* 20 *de numere, grupe de câte patru numere astfel încât în fiecare grupă suma a două numere să fie triplul sumei celorlaltor două.*

(*Clasa a IV-a*) **Andreea Bîzdîgă, elevă, Iaşi**

Soluţie. $1+2+3+\ldots+20=(1+20)20:2=210$. Dacă numerele ar putea fi grupate câte 4, satisfăcând condiţia problemei, atunci suma numerelor din fiecare grupă se împarte exact la 4, deci şi suma celor 20 numere se împarte exact la 4, ceea ce este fals.

Clasa a V-a

V.158. *Determinaţi restul împărţirii numărului* 201220132014 *la* 36 (*fără a efectua împărţirea*).

Iulian Oleniuc, elev, Iaşi

Soluţie. Numărul N este divizibil cu 9 (suma cifrelor find 18), cu 2, dar nu cu 4. Cum $(2,9)=1$, rezultă că N este divizibil cu 18, dar nu cu 36. Prin urmare, restul împărţirii lui N la 36 este 18.

V.159. *Determinaţi numerele $\overline{xyz}$ cu proprietatea că $(x+y+z)^3=\overline{xyz}$.*

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

Soluţie. Cuburile perfecte de trei cifre sunt $125, 216, 343, 512$ şi 729. Calculând pentru fiecare dintre ele cubul sumei cifrelor, obţinem singura soluţie $(5+1+2)^3=512$.

V.160. *Determinaţi ultimele două cifre ale numărului $A=3^0+3^1+3^2+\ldots+3^{2013}$.*

Mirela Marin, Iaşi

Soluţie. Avem: $A=1+3+3^2(1+3+3^2+3^3)+3^6(1+3+3^2+3^3)+\ldots+3^{2010}(1+3+3^2+3^3)=4+9\cdot 40\cdot(1+3^4+\ldots+3^{2008})$. Cei 503 termeni din paranteză se termină în 1, prin urmare suma lor se termină în 3. Atunci $A=4+360\cdot\overline{\ldots 3}=4+\overline{\ldots 80}=\overline{\ldots 84}$, adică ultimele două cifre ale lui A sunt 84.

V.161. *Se consideră numerele raţionale (nenegative) a, b, c, d şi e cu proprietatea că $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=4$. Demonstraţi că $a^3+b^3+c^3+d^3+e^3 \leq 8$.*

Mihai Crăciun, Paşcani

Soluţie. Evident că $a^2 \leq 4$, deci $a \leq 2$ şi atunci $a^3 \leq 2a^2$. Analog se arată că $b^3 \leq 2b^2$, $c^3 \leq 2c^2$, $d^3 \leq 2d^2$ şi $e^3 \leq 2e^2$. Prin adunarea acestor relaţii, obţinem că $a^3+\ldots+e^3 \leq 2(a^2+\ldots+e^2)=2\cdot 4=8$. Egalitatea se atinge atunci când unul dintre cele cinci numere este 2, iar celelalte sunt 0.

V.162. *Vom spune că un număr este isteţ dacă cifra unităţilor sale este egală cu suma cuburilor celorlaltor cifre. Dacă ordonăm crescător numerele isteţe, determinaţi al cincisprezecelea termen al şirului obţinut.*

Silviu Boga, Iaşi

Soluţie. Numere isteţe de două cifre sunt 11 şi 28, cele de trei cifre sunt $101, 112, 129, 208$ şi 219, iar cele de patru cifre sunt $1001, 1012, 1029, 1102, 1209, 2008, 2019$ şi 2109. Rezultă că al cincisprezecelea număr isteţ este 2109.

V.163. *Putem aşeza pe un cerc numerele* $1, 2, 3, \ldots, n$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 3)$ *astfel încât suma oricăror trei numere alăturate să fie număr impar?*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Răspunsul este negativ; pentru a demonstra acest lucru, să presupunem contrariul. Evident, nu este posibil ca orice două numere alăturate să aibă parităţi diferite (într-o secvenţă de tipul i, p, i, suma este pară). Dacă există două numere alăturate impare, ar trebui ca toate să fie impare, imposibil. Dacă există două numere alăturate pare, aşezarea numerelor va fi de tipul $p, p, i, p, p, i, p, p, i, \ldots$; vom avea pe cerc $\left[\frac{n}{3}\right]$ numere impare şi $n - \left[\frac{n}{3}\right]$ numere pare şi, cum $\left[\frac{n}{3}\right] < n - \left[\frac{n}{3}\right]$, ajungem la o contradicţie şi în această situaţie.

V.164. *Scriem toate numerele naturale de trei cifre pe câte un cartonaş şi introducem cele* 900 *de cartonaşe într-o cutie. Care este numărul minim de cartonaşe pe care trebuie să le extragem, fără a ne uita la ele, pentru a fi siguri că vom obţine cel puţin şapte numere cu aceeaşi sumă a cifrelor?*

Sergiu Prisacariu, Iaşi

Soluţie. Sumele posibile ale cifrelor numerelor de pe cartonaşe sunt $1, 2, 3, \ldots, 27$. Există un singur cartonaş cu suma cifrelor 1 (anume 100) şi doar unul cu suma cifrelor 27 (anume 999). Avem în cutie câte trei cartonaşe cu suma cifrelor 2 (anume $101, 110$ şi 200) sau 26 (anume $899, 989$ şi 998). Există câte şase cartonaşe cu suma cifrelor 3 (anume $111, 102, 120, 201, 210$ şi 300) sau 25 (anume $799, 979, 997, 889, 898$ şi 988). Celelalte sume ale cifrelor $(4, 5, \ldots, 24)$ apar fiecare pe mai mult de şapte cartonaşe. În concluzie, numărul minim de cartonaşe extrase trebuie să fie $2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 7 = 27$.

Clasa a VI-a

VI.158. *Determinaţi perechile de numere întregi* (x, y) *care verifică simultan condiţiile* $x + y = 6$ *şi* $2xy - 3x - 3y + 2 = 0$.

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

Soluţie. Din a doua relaţie rezultă că $y = \dfrac{3x - 2}{2x - 3}$. Cum $y \in \mathbb{Z}$, se impune condiţia $2x - 3 | 3x - 2$ şi atunci $2x - 3 | 2(3x - 2) - 3(2x - 3)$, adică $2x - 3 | 5$, prin urmare $x \in \{-1, 1, 2, 4\}$. A doua relaţie este verificată de perechile $(-1, 1), (1, -1), (2, 4)$ şi $(4, 2)$ şi, dintre ecestea, doar ultimele două verifică şi prima condiţie. În concluzie, $S = \{(2, 4); (4, 2)\}$.

VI.159. *Determinaţi numerele întregi* a, b, c, d, *dacă* $3^a + 3^b + 3^c + 3^d = 10$.

Vasile Chiriac, Bacău

Soluţie. Pentru început, să presupunem că $a \leq b \leq c \leq d$. Dacă $a \leq -2$, nu există $b, c, d \in \mathbb{Z}$ pentru care suma $3^a + 3^b + 3^c + 3^d$ să fie număr întreg, iar dacă

$a = -1$, trebuie în mod necesar să avem $b = c = -1$, altfel $3^a + 3^b + 3^c + 3^d \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$. Deducem că singura soluţie având componente negative (în ipoteza asumată) este $a = b = c = -1$, $d = 2$. Dacă $a \geq 0$, atunci $3^a + 3^b + 3^c \geq 1 + 1 + 1 = 3$, deci $3^d \leq 7$; rezultă că $d = 1$ şi, apoi, se arată uşor că $a = 0$, $b = c = d = 1$. În concluzie, soluţiile ecuaţiei date sunt $(-1, -1, -1, 2)$, $(0, 1, 1, 1)$ şi încă şase care se obţin din acestea prin permutări circulare.

VI.160. *Împărţind* 2013 *la* a*, obţinem câtul* b *şi restul* c*. Determinaţi numerele naturale* a, b *şi* c*, ştiind că reprezintă lungimile laturilor unui triunghi isoscel.*

Ioana Maria Popa, elevă, Iaşi

Soluţie. Avem că $2013 = a \cdot b + c$, cu $c < a$; din ipoteza problemei, rezultă că $a = b$ sau $b = c$. În primul caz, $2013 = a^2 + c$, cu $a^2 < a^2 + c < a(a+1)$. Cum $44^2 = 1936$, $44 \cdot 45 = 1980 < 2013$ şi $45^2 = 2025 > 2013$, această situaţie nu conduce la nicio soluţie. În al doilea caz, $2013 = c(a+1)$, cu $c < a$; obţinem că $(a, c) \in \{(2012, 1); (670, 3); (182, 11); (60, 33)\}$. Se verifică inegalitatea triunghiului doar dacă $a = 60$, $b = c = 33$.

VI.161. *Determinaţi valorile naturale ale lui* n *pentru care există numărul natural* x *astfel încât* $(2x + 9, 3x + 1) = 5^n$.

Gheorghe Iacob, Paşcani

Soluţie. Dacă $5^n | 2x + 9$ şi $5^n | 3x + 1$, atunci $5^n | 3(2x + 9) - 2(3x + 1)$, adică $5^n | 25$; rezultă că $n \in \{0, 1, 2\}$. Dacă $x = 0$, avem că $(2x + 9, 3x + 1) = (9, 1) = 1 = 5^0$. Dacă $x = 3$, atunci $(2x + 9, 3x + 1) = (15, 10) = 5^1$. Pentru $x = 8$, avem că $(2x + 9, 3x + 1) = (25, 25) = 5^2$. În concluzie, toate cele trei valori posibile ale lui n sunt convenabile.

VI.162. *Un calculator defect mai face doar patru operaţii: poate înmulţi un număr cu* 2 *sau cu* 5 *sau poate împărţi un număr la* 2 *sau la* 5*, dacă împărţirea se efectuează exact. Un copil pleacă de la numărul* 20 *şi face aleator* 2013 *astfel de operaţii. Este posibil ca rezultatul final să fie tot* 20*?*

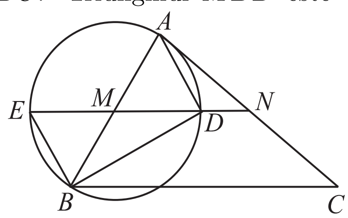
Petre Bătrâneţu, Galaţi

Soluţie. Observăm că $20 = 2^2 \cdot 5$, cu suma exponenţilor număr impar. La fiecare operaţie, suma exponenţilor se măreşte sau se micşorează cu 1, deci îşi schimbă paritatea. După un număr impar de operaţii (2013), suma exponenţilor va fi pară, prin urmare rezultatul final nu poate fi tot 20.

VI.163. *Fie* M *şi* N *mijloacele laturilor* AB*, respectiv* AC *ale triunghiului* ABC*. Cercul de diametru* AB *intersectează dreapta* MN *în punctele* D *şi* E*. Demonstraţi că* BD *şi* BE *sunt bisectoarele (interioară şi exterioară) ale unghiului* $\widehat{ABC}$*.*

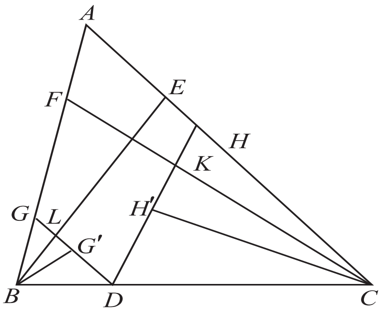
Ioan Săcăleanu, Hârlău

Soluţie. Presupunem, ca în figură, că $D \in \mathrm{Int}ABC$. Triunghiul MBD este isoscel, întrucât MB şi MD sunt raze ale cercului; rezultă că $\widehat{MBD} \equiv \widehat{MDB}$. Pe de altă parte, cum $MN \| BC$, avem că $\widehat{MDB} \equiv \widehat{DBC}$ (alterne interne). Deducem că $\widehat{MBD} \equiv \widehat{DBC}$, adică BD este bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{ABC}$. Analog se arată că BE este bisectoarea exterioară a lui $\widehat{ABC}$.



VI.164. *Pe laturile AC şi AB ale triunghiului ABC se consideră punctele E, respectiv F astfel încât $m(\widehat{ABE}) < m(\widehat{CBE})$ şi $m(\widehat{ACF}) < m(\widehat{BCF})$. Fie D un punct pe latura BC şi $G \in (AB)$, $H \in (AC)$ pentru care $DG \perp BE$ şi $DH \perp CF$. Demonstraţi că $AG + AH > AB + AC - BC$.*

Petru Asaftei, Iaşi



Soluţie. Notăm $\{L\} = DG \cap BE$, $\{K\} = DH \cap CF$ şi fie G', H' simetricele punctelor G şi H faţă de L, respectiv faţă de K. Cum $m(\widehat{G'BE}) = m(\widehat{ABE}) < m(\widehat{CBE})$, rezultă că $G' \in (DL)$ şi atunci $BG = BG' < BD$; analog se arată că $CH < CD$. Astfel, $AG + AH = AB + AC - (BG + CH) > AB + AC - (BD + DC) = AB + AC - BC$.

Clasa a VII-a

VII.158. *Determinaţi numerele naturale m cu proprietatea că $m(m+17)$ se poate scrie ca produs de două numere naturale consecutive.*

Lucian Tuţescu şi Petrişor Rocşoreanu, Craiova

Soluţie. Fie $n \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $m(m + 17) = n(n + 1)$; atunci $4m^2 + 68m + 289 - 288 = 4n^2 + 4n + 1$, deci $(2m + 17)^2 - (2n + 1)^2 = 288$. Obţinem că $(m+n+9)(m-n+8) = 72$ şi, cum $m - n + 8 < m + n + 9$ şi cele două numere sunt naturale, de parităţi diferite, avem de studiat trei posibilităţi: $(m-n+8, m+n+9) \in \{(1, 72); (3, 24); (8, 9)\}$. Soluţiile problemei sunt $m \in \{0, 5, 28\}$.

VII.159. *Dacă m, n, p sunt numere reale astfel încât $m^2+n^2+p^2 = 3$, demonstraţi că $\sqrt{2m^2 + 5} + \sqrt{2n^2 + 5} + \sqrt{2p^2 + 5} \leq 3\sqrt{7}$.*

Mihai Crăciun, Paşcani

Soluţie. Notăm $x = \sqrt{2m^2 + 5}$, $y = \sqrt{2n^2 + 5}$ şi $z = \sqrt{2p^2 + 5}$; atunci $x^2 + y^2 + z^2 = 2(m^2 + n^2 + p^2) + 15 = 21$. Folosind inegalitatea dintre media aritmetică şi cea pătratică, obţinem că $(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2) = 63$, deci $x + y + z \leq 3\sqrt{7}$. Egalitatea se atinge pentru $m = n = p = 1$.

VII.160. *Determinaţi triunghiurile dreptunghice cu lungimile laturilor exprimate prin numere naturale, care au aria egală cu 24.*

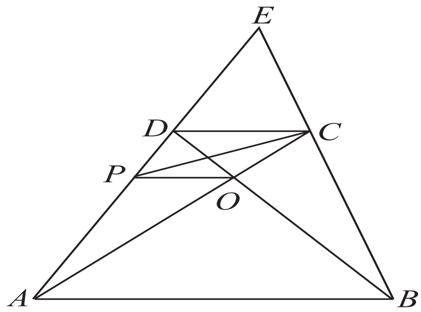
Neculai Stanciu, Buzău

Soluţie. Dacă laturile a, b, c ale unui triunghi dreptunghic sunt numere naturale, atunci $a = x^2 + y^2$, $b = x^2 - y^2$ şi $c = 2xy$, unde $x, y \in \mathbb{N}^*$, $x > y$. Aria triunghiului este $\mathcal{A} = \dfrac{bc}{2} = xy(x - y)(x + y) > y \cdot y \cdot 1 \cdot y$, prin urmare $y^3 < 24$, deci $y \in \{1, 2\}$. Dacă $y = 1$, atunci $x(x + 1)(x - 1) = 24$, de unde $x = 3$. Dacă $y = 2$, obţinem că $2x(x - 2)(x + 2) = 24$, fără soluţii în numere naturale. În concluzie, $x = 3$ şi $y = 1$, aşadar triunghiul căutat are laturile $a = 10$, $b = 8$, $c = 6$.

VII.161. *Se consideră trapezul $ABCD$ cu baza mare AB egală cu diagonala AC. Fie $\{E\} = AD \cap BC$, $\{O\} = AC \cap BD$, iar $P \in (AD)$ este astfel încât $OP \| AB$. Demonstraţi că CP şi CE sunt bisectoarele interioară, respectiv exterioară ale unghiului $\widehat{ACD}$.*

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

Soluţie. Din asemănări evidente avem că $\dfrac{DP}{PA} = \dfrac{DO}{OB} = \dfrac{DC}{AB}$. Cum $AB = AC$, obţinem că $\dfrac{DP}{PA} = \dfrac{DC}{AC}$ deci, conform reciprocei teoremei bisectoarei aplicată în triunghiul ACD, rezultă că CP este bisectoarea (interioară) unghiului $\widehat{ACD}$. Ţinând seama de faptul că triunghiul ABC este isoscel, avem: $m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{BCD}) = 180° \Rightarrow m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{ACB}) + m(\widehat{ACD}) = 180° \Rightarrow 2m(\widehat{ACB}) + 2m(\widehat{ACP}) = 180° \Rightarrow m(\widehat{ACB}) + m(\widehat{ACP}) = 90° \Rightarrow m(\widehat{BCP}) = 90°$, prin urmare $CP \perp CE$.

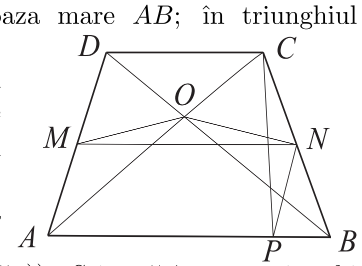


De aici rezultă că CE este bisectoarea exterioară a unghiului $\widehat{BCD}$.

VII.162. *Demonstraţi că diagonala unui trapez isoscel este mai lungă decât linia mijlocie a acestuia.*

Nicolae Bourbăcuţ, Sarmizegetusa

Soluţia 1. Fie P proiecţia vârfului C pe baza mare AB; în triunghiul dreptunghic PAC, ipotenuza AC este mai lungă decât cateta AP. Pe de altă parte, PN este mediană în triunghiul dreptunghic PBC, aşadar $PN = BN$, de unde $\widehat{NPB} \equiv \widehat{B} \equiv \widehat{A}$. Atunci $AM \| PN$ şi, cum $AP \| MN$, rezultă că $APNM$ este paralelogram. Deducem că $MN = AP$ şi, de aici, urmează concluzia problemei.



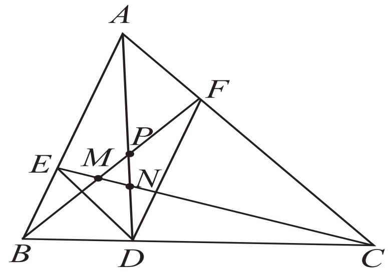
Soluţia 2 (**Adina Onofrei**, elevă, Roşiori (Bacău)). Ştim că într-un triunghi mediana este mai mică decât semisuma laturilor care pleaca din acelaşi vârf. Folosind şi inegalitatea triunghului, avem:

$$MN < OM + ON < \frac{OD + OA}{2} + \frac{OC + OB}{2} = \frac{AC + BD}{2} = AC.$$

VII.163. *Fie D un punct pe latura BC a triunghiului ABC. Paralela prin D la AC taie AB în E, iar paralela prin D la AB taie AC în F. Dacă $\{M\} = CE \cap BF$, arătaţi că suprafeţele $AEMF$ şi BMC sunt echivalente.*

Dan Popescu, Suceava

Soluţie. Notăm $\{N\} = AD \cap CE$, $\{P\} = AD \cap BF$. În trapezele $ABDF$ şi $ACDE$ au loc egalităţile $\mathcal{A}_{BPD} = \mathcal{A}_{APF}$, respectiv $\mathcal{A}_{DNC} = \mathcal{A}_{ANE}$. Adunând aceste egalităţi şi reducând din ambii membri $\mathcal{A}_{MNP}$, obţinem că $\mathcal{A}_{BMND} + \mathcal{A}_{DNC} = \mathcal{A}_{APF} + \mathcal{A}_{AEMP}$, deci $\mathcal{A}_{BMC} = \mathcal{A}_{AEMF}$. Remarcăm că aria triunghiului MNP poate fi şi nulă, în cazul în care D este mijlocul lui BC.

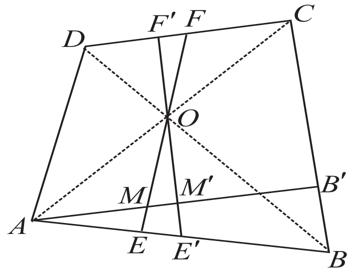


Notă. Rezultatul constituie o generalizare a problemei 26567 din *Gazeta Matematică 2/2012*, în care D este piciorul bisectoarei din A.

VII.164. *Fie $ABCD$ un patrulater convex, ale cărui diagonale se intersectează în O. Dacă oricare ar fi punctele $E \in (AB$ şi $F \in (CD$ cu $AE = CF$, avem că $O \in EF$, demonstraţi că $ABCD$ este paralelogram.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Presupunem, prin absurd, că $AB \nparallel CD$ şi fie $B' \in BC$ pentru care $AB' \| CD$. Considerăm punctele E şi F ca în enunţ, iar $\{M\} = EF \cap AB'$. Din $\triangle AOM \equiv \triangle COF$ (U.L.U.) rezultă că $AM = CF$ şi, cum $CF = AE$, triunghiul AME este isoscel. Procedăm analog pentru alte două puncte E', F' ca în enunţ şi obţinem că $\triangle AM'E'$ este isoscel. Astfel, $m(\widehat{AME}) = m(\widehat{AM'E'}) = \frac{1}{2}(180° - m(\widehat{BAB'}))$, prin urmare $ME \| M'E'$, ceea ce contrazice faptul că $ME \cap M'E' = \{O\}$. Rămâne că $AB \| CD$.



Pentru o pereche de puncte E şi F ca în enunţ, avem că $AECF$ este paralelogram ($AE = CF, AE \| CF$), deci O va fi mijlocul diagonalei AC a patrulaterului $ABCD$ cu $AB \| CD$. De aici, deducem imediat că $ABCD$ este paralelogram.

Clasa a VIII-a

VIII.158. *Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia* $\dfrac{27x^2 + 54x + 15}{98x^2 - 84x + 10} = \dfrac{147x^2 - 126x + 24}{18x^2 + 36x + 16}$.

Constantin Dragomir, Piteşti

Soluţie. Înmulţind cu $\frac{2}{3}$ ambii membri ai ecuaţiei şi apoi scăzând 1 din ambii membri ai ecuaţiei obţinute, deducem că $\dfrac{-40x^2 + 60x}{49x^2 - 42x + 5} = \dfrac{40x^2 - 60x}{9x^2 + 18x + 8}$. De aici, $40x^2 - 60x = 0$ cu soluţiile $x_1 = 0$ şi $x_2 = \frac{3}{2}$ sau $49x^2 - 42x + 5 = -9x^2 - 18x - 8$, adică $58x^2 - 24x + 10 = 0$, ecuaţie care nu are soluţii reale. Observând că valorile lui x obţinute nu anulează numitorii fracţiilor, rezultă că $S = \left\{0, \frac{3}{2}\right\}$.

VIII.159. *Demonstraţi că* $1 + 3x + 6x^2 + 9x^3 + 9x^4 > \frac{1}{4}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ionel Tudor, Călugăreni

Soluţia 1. Membrul stâng se descompune în factori ca $(1 + 3x^2)(1 + 3x + 3x^2)$. Observăm că $1 + 3x^2 \geq 1$ (cu egalitate pentru $x = 0$), iar $1 + 3x + 3x^2 \geq \frac{1}{4}$ (cu egalitate când $x = -\frac{1}{2}$). Înmulţind membru cu membru aceste inegalităţi şi ţinând seama de faptul că egalităţile nu se ating simultan, obţinem cerinţa problemei.

Soluţia 2 (**Adina Onofrei**, elevă, Roşiori (Bacău)). Avem succesiv: $36x^4 + 36x^3 + 24x^2 + 12x + 4 > 1 \Leftrightarrow 12x^4 + 12x^3 + 4x^2 + 4x^2 + 4x + 1 > 0 \Leftrightarrow 12x^2\left(x^2 + x + \frac{1}{3}\right) +$

$(2x+1)^2 > 0 \Leftrightarrow 12x^2\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}\right]+(2x+1)^2 > 0$, ultima fiind evidentă.

VIII.160. *Se consideră dreapta fixă d, punctul fix $A \notin d$ şi planul variabil α care conţine dreapta d. Notăm cu M proiecţia punctului A pe planul α. Determinaţi locul geometric al lui M.*

Aida-Andreea Iacob, Iaşi

Soluţie. Fie π planul care conţine punctul A şi este perpendicular pe dreapta d şi $\{B\} = d \cap \pi$; evident, B este un punct fix. Dreapta AM este inclusă în planul π, iar triunghiul ABM este dreptunghic în M. Rezultă că M aparţine cercului $\mathcal{C}$ de diametru AB, inclus în planul π. Reciproc, se observă uşor că, pentru orice punct M al lui $\mathcal{C}$, există un plan $\alpha = (d, MB)$ astfel încât M este proiecţia lui A pe α. În concluzie, locul geometric dorit este cercul $\mathcal{C}$.

VIII.161. *Se dau zece cutii cubice cu muchiile de 1 cm, 2 cm, ..., 10 cm, fiecare fiind umplută cu cuburi de muchie 1 cm. Spunem că p cutii formează un bicub dacă una dintre ele conţine tot atâtea cuburi câte conţin celelalte $p-1$ la un loc. Putem forma un bicub folosind câteva dintre cutiile date?*

Geanina Hăvârneanu, Iaşi

Soluţie. Răspunsul este afirmativ: $1^3+3^3+4^3+5^3+6^3 = 7^3$. Mai mult, o analiză (plicticoasă!) arată că aceasta este singura soluţie a problemei.

VIII.162. *Determinaţi ultimele trei cifre ale numărului natural $A = 373^3+374^3+375^5+\ldots+628^3$.*

Mihai Haivas, Iaşi

Soluţie. Dacă $a, b \in \mathbb{Z}$, atunci $a^3+b^3 = M(a+b)$. Astfel, $A = (373^3+627^3)+(374^3+626^3)+\ldots+(499^3+501^3)+500^3+628^3 = M_{1000}+628^3 = M_{1000}+\overline{\ldots 172} = \overline{\ldots 172}$.

VIII.163. *Determinaţi valorile întregi ale lui m pentru care numărul $\sqrt{\dfrac{4m+3}{m-5}}$ este raţional.*

Bogdan Chiriac, Bacău

Soluţie. Fie $\sqrt{\dfrac{4m+3}{m-5}} = \dfrac{a}{b}$, cu $a, b \in \mathbb{N}^*$, $(a,b) = 1$ (evident că $\sqrt{\dfrac{4m+3}{m-5}}$ este strict pozitiv pentru $m \in \mathbb{Z}$). Obţinem că $m = \dfrac{-5a^2-3b^2}{4b^2-a^2} = 5 - \dfrac{23b^2}{4b^2-a^2}$. Cum $(4b^2-a^2, b^2) = (a^2, b^2) = 1$, rezultă că $4b^2-a^2$ divide 23, deci $(2b-a)(2b+a) \in \{\pm 1, \pm 23\}$. Dintre sistemele care se pot forma, singurul cu soluţii naturale este $2b-a = 1$, $2b+a = 23$, prin urmare $a = 11$, $b = 6$, adică $m = -31$.

VIII.164. *Fie a, b, c, d patru numere reale strict pozitive astfel încât $ab(c+d) \geq (a+b)cd$ şi $ab+cd \geq (a+b)(c+d)$. Comparaţi numerele $a+b$ şi $c+d$.*

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

Soluţie. Vom demonstra că $a+b > c+d$; pentru aceasta, să presupunem, prin absurd, că $a+b \leq c+d$. Înmulţind membru cu membru inegalităţile din enunţ, obţinem că $ab(c+d)(ab+cd) \geq (a+b)^2 \cdot cd \cdot (c+d)$. Însă $(a+b)^2 \geq 4ab$ şi atunci $ab(c+d)(ab+cd) \geq 4abcd(c+d)$, deci $ab+cd \geq 4cd$, aşadar $ab \geq 3cd$. Pe de altă parte, $ab + cd \geq (a+b)(c+d) \geq (a+b)^2 \geq 4ab$, de unde $cd \geq 3ab$. Ar rezulta că $cd \geq 3ab \geq 9cd$, imposibil; rămâne astfel adevărată afirmaţia iniţială.

Clasa a IX-a

IX.136. *Fie $a, b, c \in (0, \infty)$ cu $a \cdot b \cdot c = 1$. Demonstraţi că*

$$\frac{ab}{b^2+c^2} + \frac{bc}{c^2+a^2} + \frac{ca}{a^2+b^2} \geq \frac{9}{a^3+b^3+c^3+a+b+c}.$$

Sven Cortel şi Kinga Raţiu, elevi, Satu Mare

Soluţie. Conform inegalităţii lui Bergström, membrul stâng al inegalităţii din enunţ este cel puţin egal cu $\dfrac{(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})^2}{2(a^2+b^2+c^2)}$. Din inegalitatea mediilor, avem că $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca} \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$, iar $2a^2 \leq a + a^3$, $2b^2 \leq b + b^3$, $2c^2 \leq c + c^3$, de unde rezultă cerinţa problemei. Egalitatea se atinge pentru $a = b = c = 1$.

IX.137. *Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Notăm cu H_1, H_2, H_3 şi H_4 ortocentrele triunghiurilor DAB, ABC, BCD respectiv CDA şi cu G_1, G_2, G_3 şi G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor AH_1B, BH_2C, CH_3D respectiv DH_4A. Demonstraţi că patrulaterele $ABCD$ şi $G_1G_2G_3G_4$ au acelaşi centru de greutate dacă şi numai dacă $ABCD$ este dreptunghi.*

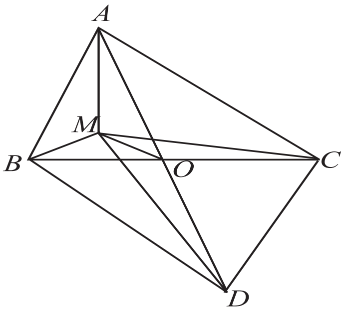
Florin Stănescu, Găeşti

Soluţie. În raport cu centrul O al cercului circumscris patrulaterului $ABCD$, vectorii de poziţie ai punctelor din problemă sunt: $\overrightarrow{r_{H_1}} = \overrightarrow{r_D} + \overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r}_B$, $\overrightarrow{r_{H_2}} = \overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}$, $\overrightarrow{r_{H_3}} = \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_D}$, $\overrightarrow{r_{H_4}} = \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_D} + \overrightarrow{r_A}$; $\overrightarrow{r_{G_1}} = \dfrac{1}{3}(2\overrightarrow{r_A} + 2\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_D})$, $\overrightarrow{r_{G_2}} = \dfrac{1}{3}(2\overrightarrow{r_B} + 2\overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_A})$, $\overrightarrow{r_{G_3}} = \dfrac{1}{3}(2\overrightarrow{r_C} + 2\overrightarrow{r_D} + \overrightarrow{r_B})$, $\overrightarrow{r_{G_4}} = \dfrac{1}{3}(2\overrightarrow{r_D} + 2\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_C})$. Centrul de greutate al patrulaterului $ABCD$ are vectorul de poziţie $\overrightarrow{r_1} = \dfrac{1}{4}(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_D})$, iar centrul de greutate al patrulaterului $G_1G_2G_3G_4$ are vectorul de poziţie $\overrightarrow{r_2} = \dfrac{5}{12}(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_D})$. Evident că $\overrightarrow{r}_1 = \overrightarrow{r_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_D} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow ABCD$ este dreptunghi; propunem cititorului să demonstreze riguros ultima echivalenţă.

IX.138. *Fie M un punct variabil în interiorul sau pe laturile triunghiului ascuţitunghic ABC. Arătaţi că $MB^2 + MC^2 - MA^2 \leq AB^2 + AC^2$.*

Ovidiu Pop, Satu Mare

Soluţie. Fie D simetricul punctului A faţă de mijlocul O al segmentului BC. Folosind teorema medianei în triunghiurile MBC şi MAD, obţinem că $MO^2 = \dfrac{2(MB^2+MC^2)-BC^2}{4} = \dfrac{2(MA^2+MD^2)-AD^2}{4}$, de unde $MB^2 + MC^2 - MA^2 = MD^2 + \dfrac{BC^2 - AD^2}{2}$. Cum unghiul A este ascuţit, cea mai mare distanţă dintre două puncte situate pe laturile sau în interiorul paralelogramului $ABDC$

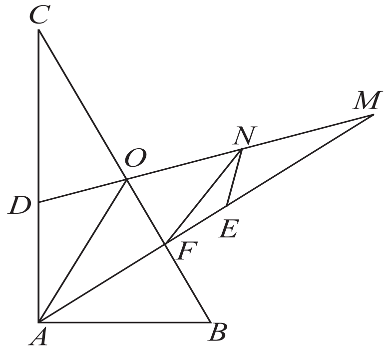


este diagonala AD. Rezultă că $MD^2 \leq AD^2 = 4AO^2 = 2(AB^2 + AC^2) - BC^2$. Astfel, $MB^2 + MC^2 - MA^2 \leq AD^2 + \dfrac{BC^2 - AD^2}{2} = \dfrac{BC^2 + AD^2}{2} = AB^2 + AC^2$, ceea ce trebuia demonstrat.

IX.139. *Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\widehat{A}) = 90°$ şi $m(\widehat{C}) = 30°$. Fie O şi F picioarele medianei, respectiv înălţimii din A, iar E este un punct astfel încât $F \in (AE)$, $FE = FB$. Notăm cu M simetricul lui A faţă de E şi cu D intersecţia dreptelor MO şi AC. Demonstraţi că $CO = CD$.*

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

Soluţia 1. Fie $AB = 2a$; se observă imediat că $OF = FB = FE = a$, $AF = a\sqrt{3}$, $ME = a(1+\sqrt{3})$, $FM = a(2+\sqrt{3})$. În triunghiul dreptunghic FOM, avem că $\operatorname{tg}\widehat{MOF} = \dfrac{MF}{OF} = \dfrac{a(2+\sqrt{3})}{a} = 2+\sqrt{3}$, prin urmare $m(\widehat{MOF}) = 75°$. Rezultă că $m(\widehat{COD}) = 75°$, de unde $m(\widehat{CDO}) = 180° - 30° - 75° = 75°$. Astfel, triunghiul COD este isoscel, cu $CO = CD$.



Soluţia 2 (a autorului)**.** Notăm cu N mijlocul segmentului OM; atunci EN este linie mijlocie în $\triangle AOM$, deci $NE = \dfrac{1}{2}OA = a$ şi $NE \| AO$. Deducem că $m(\widehat{NEF}) = 180° - m(\widehat{OAF}) = 150°$, iar triunghiul EFN este isoscel, cu $EF = NE = a$. Obţinem că $m(\widehat{NFE}) = 15°$, aşadar $m(\widehat{OFN}) = 75°$. Pe de altă parte, NF este mediana ipotenuzei în $\triangle FOM$, prin urmare $NF = NO$, de unde $m(\widehat{NOF}) = 75°$ şi soluţia continuă ca mai sus.

IX.140. *Determinaţi numerele naturale nenule n pentru care*

$$(x+y)^n - (x^n + y^n) = nxy(x+y)(x^2+xy+y^2)^{\frac{n-3}{2}}, \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Ionel Tudor, Călugăreni

Soluţie. Pentru $x = y = 1$, obţinem că $2^n - 2 = 2n \cdot 3^{\frac{n-3}{2}}$. Această egalitate este falsă dacă n este par, întrucât membrul stâng este număr raţional, iar ce drept este iraţional. Fie deci $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, astfel încât $2^{2k+1} - 2 = 2(2k+1)3^{k-1}$, adică $4^k = 1 + (2k+1)3^{k-1}$; această egalitate se verifică pentru $k \in \{1, 2, 3\}$ şi nu este adevărată pentru $k = 0$ şi $k \geq 4$, întrucât se dovedeşte uşor, prin inducţie matematică, inegalitatea $4^k > 1 + (2k+1)3^{k-1}$, $\forall k \geq 4$. Înseamnă că singurele valori ale lui n care ar putea fi soluţii ale problemei sunt $n \in \{3, 5, 7\}$. Identităţile:

$$(x+y)^3 - (x^3+y^3) = 3xy(x+y);$$
$$(x+y)^5 - (x^5+y^5) = 5xy(x+y)(x^2+xy+y^2);$$
$$(x+y)^7 - (x^7+y^7) = 7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2$$

fiind adevărate pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, rezultă că valorile căutate ale lui n sunt $3, 5$ şi 7.

Clasa a X-a

X.136. *Fie numerele naturale nenule $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n \geq 2$. Determinaţi numerele complexe $z_1, z_2, \ldots, z_n$, de modul 1, cu proprietatea că* $\sum\limits_{i=1}^{n} |1-z_i^{a_i}| + \sum\limits_{i=1}^{n} |1+z_i^{a_i}| = 2n\sqrt{2}$.

Sven Cortel, elev, Satu Mare

Soluţie. Fie $a \in \mathbb{N}^*$ şi $z = \cos 2t + i \sin 2t$ un număr complex de modul 1; atunci $|1-z^a| = \sqrt{(1-\cos 2at)^2 + \sin^2 2at} = \sqrt{2 - 2\cos 2at} = 2|\sin at|$ şi, analog, $|1+z^a| = 2|\cos at|$, deci $|1-z^a| + |1+z^a| = 2(|\sin at| + |\cos at|) \leq 4\sqrt{\dfrac{\sin^2 at + \cos^2 at}{2}} = 2\sqrt{2}$. Egalitatea se atinge când $\sin at = \pm \cos at$, adică pentru $t = \dfrac{\pi}{4a} + \dfrac{k\pi}{a}$, $k \in \mathbb{Z}$ sau $t = \dfrac{3\pi}{4a} + \dfrac{k\pi}{a}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Din cele de mai sus rezultă că, în general, are loc inegalitatea $\sum\limits_{i=1}^{n} |1 - z_i^{a_i}| + \sum\limits_{i=1}^{n} |1 + z_i^{a_i}| \leq 2n\sqrt{2}$. Întrucât se atinge egalitatea, obţinem că $z_i = \cos \dfrac{(4k+1)\pi}{2a_i} + i \sin \dfrac{(4k+1)\pi}{2a_i}$, $k \in \mathbb{Z}$ sau $z_i = \cos \dfrac{(4k+3)\pi}{2a_i} + i \sin \dfrac{(4k+3)\pi}{2a_i}$, $k \in \mathbb{Z}$, oricare ar fi $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

X.137. *Fie $a, b \in \mathbb{N}$. Rezolvaţi în $\mathbb{C}$ ecuaţia $|z+a| + |z-b| + |a-b| = 2$.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Dacă $z \in \mathbb{C}$ verifică relaţia din enunţ, atunci $2 = |z+a| + |z-b| + |a-b| \geq |z+a-z+b| + |a-b| = |a+b| + |a-b|$. Din $a, b \in \mathbb{N}$ şi $|a+b| + |a-b| \leq 2$, rezultă că $(a,b) \in \{(0,0); (1,0); (0,1); (1,1)\}$. Dacă $a = b = 0$, ecuaţia $|z| = 1$ admite soluţiile $z = \cos t + i \sin t$, $t \in \mathbb{R}$. Dacă $a = 1$, $b = 0$, ecuaţia devine $|z+1| + |z| = 1$, cu mulţimea soluţiilor $S = [-1, 0]$. Dacă $a = 0$, $b = 1$, ecuaţia devine $|z| + |z-1| = 1$, cu mulţimea soluţiilor $S = [0, 1]$. În sfârşit, dacă $a = b = 1$, ecuaţia $|z+1| + |z-1| = 2$ are soluţiile $S = [-1, 1]$. Pentru alte valori ale numerelor a şi b, ecuaţia nu are soluţii.

X.138. *Rezolvaţi ecuaţia*

$$\log_5^2(2^{4x} + 2^{2-x}) + 2^{4x} + 2^{2-x} = 4 + \log_5(2^{8x} + 2^{3x+3} + 2^{4-2x}).$$

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

Soluţie. Deoarece $(2^{4x} + 2^{2-x})^2 = 2^{8x} + 2^{3x+3} + 2^{4-2x}$, ecuaţia se poate scrie sub forma $[\log_5(2^{4x} + 2^{2-x}) - 1]^2 = 5 - (2^{4x} + 2^{2-x})$ şi atunci $2^{4x} + 2^{2-x} \leq 5$. Însă, din inegalitatea mediilor, avem că $2^{4x} + 2^{2-x} = 2^{4x} + \dfrac{1}{2^x} + \dfrac{1}{2^x} + \dfrac{1}{2^x} + \dfrac{1}{2^x} \geq 5$, cu egalitate când $2^{4x} = 2^{-x}$, i.e. $x = 0$. Se verifică faptul că $x = 0$ este soluţie a ecuaţiei, prin urmare $S = \{0\}$.

X.139. *Rezolvaţi ecuaţiile*:

a) $[\sqrt[n]{n} + \sqrt[n]{n^2}] = n$;

b) $[\sqrt[n-1]{n} + \sqrt[n-1]{n^2}] = n$.

Ionel Tudor, Călugăreni

Soluţie. a) Pentru a avea sens radicalii, se impune ca $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Prin inducţie matemtică se arată că $3^n \geq n^3$, $\forall n \in \mathbb{N}$, de unde $\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[3]{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Rezultă că $\sqrt[n]{n^2} \leq \sqrt[3]{9}$, prin urmare $\sqrt[n]{n} + \sqrt[n]{n^2} \leq \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9} < 2 + 3 = 5$. Deducem că ecuaţia dată nu are soluţii $n \geq 5$. Verificând direct valorile $n \in \{2, 3, 4\}$, găsim că unica soluţie a ecuaţiei este $n = 3$.

b) Se impune condiţia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Se verifică faptul că $n = 3$ şi $n = 5$ nu verifică ecuaţia, iar $n = 4$ este soluţie; vom arăta că nu există soluţii $n \geq 6$. Prin inducţie matematică se demonstrează că $3^{n-1} > n^3$, $\forall n \geq 6$, deci $\sqrt[n-1]{n} < \sqrt[3]{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 6$. Atunci $\sqrt[n-1]{n^2} < \sqrt[3]{9}$, aşadar $\sqrt[n-1]{n} + \sqrt[n-1]{n^2} < \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9} < 2 + 3 < 6$. Rămâne că ecuaţia dată are unica soluţie $n = 4$.

X.140. *Dacă în triunghiul ABC, cu notaţiile uzuale, are loc egalitatea $a^2 + b^2 + c^2 = p^2 + 9r^2$, atunci triunghiul este echilateral.*

Cătălin Calistru, Iaşi

Soluţie. Observăm că $pr^2 = \dfrac{S^2}{p} = (p-a)(p-b)(p-c) = p^3 - (a+b+c)p^2 + (ab+bc+ca)p - abc = -p^3 + (ab+bc+ca)p - 4Rrp$, de unde $ab+bc+ca = p^2 + r^2 + 4Rr$. Pe de altă parte, $ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2 = p^2+9r^2$ şi atunci $p^2+r^2+4Rr \leq p^2+9r^2$, prin urmare $R \leq 2r$. Rezultă că se atinge egalitatea în inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$, adică triunghiul este echilateral.

Clasa a XI-a

XI.136. *Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det A = 9$, $\det B = 4$ şi $\det(A + B) = 1$. Determinaţi $x \in \mathbb{R}$ pentru care numărul $\det(A + xB)$ este minim.*

Răzvan Ceucă, student, Iaşi

Soluţie. Fie $f(x) = \det(A + xB) = \det A + mx + (\det B)x^2 = 4x^2 + mx + 9$. Cum $f(1) = \det(A + B) = 1$, obţinem că $4 + m + 9 = 1$, deci $m = -12$. Atunci $f(x) = 4x^2 - 12x + 9 = (2x-3)^2 \geq 0$, valoarea minimă 0 atingându-se pentru $x = \dfrac{3}{2}$.

XI.137. *Fie $a \in (0,1) \cup [2, \infty)$ şi şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = \sqrt{a}$, $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$, $\forall n \geq 1$. Notăm $y_n = \dfrac{\sqrt{2a} - x_{n+1}}{a - x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.*

a) *Demonstraţi că $y_n > \dfrac{2}{2\sqrt{2a} + 1 + \sqrt{1+4a}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.*

b) *Dacă $a \in (0,1)$, arătaţi că, în plus, $y_n < \dfrac{1}{\sqrt{2a} + a}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.*

Gheorghe Costovici, Iaşi

Soluţie. a) Se demonstrează, prin inducţie matematică, faptul că $x_n < \dfrac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $y_n = \dfrac{\sqrt{2a} - \sqrt{a + x_n}}{a - x_n} = \dfrac{a - x_n}{(a - x_n)(\sqrt{2a} + \sqrt{a + x_n})} = \dfrac{1}{\sqrt{2a} + x_{n+1}} > \dfrac{1}{\sqrt{2a} + \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}} = \dfrac{2}{2\sqrt{2a} + 1 + \sqrt{1+4a}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Se demonstrează prin inducţie că, pentru $a \in (0,1)$, $x_n > a$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $y_n = \dfrac{1}{\sqrt{2a} + x_{n+1}} < \dfrac{1}{\sqrt{2a} + a}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

XI.138. *Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale monoton şi convergent. Arătaţi că şirul $(y_n)_{n\geq 1}$, $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)^{2013}$ are aceeaşi monotonie cu $(x_n)_{n\geq 1}$ şi este, de asemenea, convergent.*

Silviu Boga, Iaşi

Soluţie. Cum $y_{n+1}-y_n = (x_{n+2}-x_{n+1})^{2013}$, diferenţa $x_{n+2}-x_{n+1}$ are semn constant pentru $n \in \mathbb{N}^*$ şi 2013 este număr impar, rezultă că $(y_n)_{n\geq 1}$ are aceeaşi monotonie cu $(x_n)_{n\geq 1}$. Datorită convergenţei lui $(x_n)_{n\geq 1}$, şirul $z_n = (x_{n+1}-x_n)^{2012}$ este mărginit superior de M; atunci $|y_n| = \sum\limits_{k=1}^{n}|x_{k+1}-x_k|z_k \leq \sum\limits_{k=1}^{n}|x_{k+1}-x_k|M = |x_{n+1}-x_n|M$ (am ţinut seama de faptul că toate diferenţele $x_{k+1}-x_k$ au acelaşi semn). Deoarece $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit, rezultă că $(y_n)_{n\geq 1}$ este mărginit, deci convergent.

XI.139. *Dacă $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{pn}}-p\right)$.*

Lucian Tuţescu şi Liviu Smarandache, Craiova

Soluţie. Observăm că $\lim\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{pn}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{pn}-\ln pn\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)+\ln pn-\ln n\right] = c - c+\ln p = \ln p$, aşadar avem de-a face cu o nedeterminare de tipul $\infty\cdot 0$. Notând $x_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{pn}-\ln p$, limita din enunţ devine: $L = \lim\limits_{n\to\infty} n(e^{x_n+\ln p}-e^{\ln p}) = \lim\limits_{n\to\infty} n\cdot p(e^{x_n}-1) = \lim\limits_{n\to\infty} np\cdot\frac{e^{x_n}-1}{x_n}\cdot x_n = \lim\limits_{n\to\infty} p\cdot\frac{x_n}{\frac{1}{n}} = p\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}} = p\cdot \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{p}\frac{1}{np+i}-\frac{p}{p(n+1)}}{-\frac{1}{n(n+1)}} = -p\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{p}\left(\frac{1}{np+i}-\frac{1}{np+p}\right)}{\frac{1}{n(n+1)}} = -p\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{p-1}\frac{(p-i)n(n+1)}{(np+i)(np+p)} = -p\sum\limits_{i=1}^{p-1}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(p-i)}{np^2+pi}\right) = -p\sum\limits_{i=1}^{p-1}\frac{p-i}{p^2} = -\frac{p}{p^2}\cdot\frac{p(p-1)}{2} = \frac{1-p}{2}$.

XI.140. *Dacă $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, arătaţi că $2(det\,A)^2+det\,(AB+BA)+2(det\,B)^2 \geq det\,(A^2-B^2)+4det\,AB$.*

Mihály Bencze, Braşov

Soluţie. Dacă $U, V \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, are loc egalitatea

$$(*)\qquad \det(U+V)+\det(U-V) = 2\det U + 2\det V.$$

Considerând în (*) $U = A^2+B^2$ şi $V = i(AB-BA)$, unde i este unitatea imaginară, obţinem că

$$\begin{aligned}2\det(A^2+B^2)-2\det(AB-BA) &= \det(A^2+iAB-iBA+B^2)+\\ &+\det(A^2-iAB+iBA+B^2) = \det(A-iB)\det(A+iB)+\\ &+\det(A+iB)\det(A-iB) = 2\det(A+iB)\overline{\det(A+iB)} =\\ &= 2|\det(A+iB)|^2 \geq 0,\end{aligned}$$

prin urmare $\det(A^2+B^2) \geq \det(AB-BA)$. Însă, conform (*), avem că $\det(A^2+B^2) = 2\det A^2 + 2\det B^2 - \det(A^2-B^2)$, iar $\det(AB-BA) = 2\det AB + 2\det BA - \det(AB+BA) = 4\det AB - \det(AB+BA)$; înlocuind, obţinem concluzia problemei.

Clasa a XII-a

XII.136. *Calculaţi* $\displaystyle\int \frac{x^{2013}+ax^{1006}}{(x^{1007}+b)^{2013}}dx$, *$x \in (0,\infty)$, $a, b > 0$.*

Cătălin Cristea, Craiova

Soluţie. $\displaystyle\int \frac{x^{2013}+ax^{1006}}{(x^{1007}+b)^{2013}}dx = \int \frac{x^{1006}(x^{1007}+b)}{(x^{1007}+b)^{2013}}dx + \int \frac{x^{1006}(a-b)}{(x^{1007}+b)^{2013}}dx = \frac{1}{1007}\int \frac{(x^{1007}+b)'}{(x^{1007}+b)^{2012}}dx + \frac{a-b}{1007}\int \frac{(x^{1007}+b)'}{(x^{1007}+b)^{2013}}dx = -\frac{1}{2011\cdot 1007}\cdot\frac{1}{(x^{1007}+b)^{2011}} - \frac{a-b}{1007\cdot 2012}\cdot\frac{1}{(x^{1007}+b)^{2012}} + \mathcal{C}$.

XII.137. *Determinaţi primitivele funcţiei* $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\cos 2011x}{\cos^{2013} x}$.

Liviu Smarandache şi Lucian Tuţescu, Craiova

Soluţie. Avem: $\displaystyle\int f(x)dx = \int \frac{\cos(2012x - x)}{\cos^{2013} x}dx = \int \frac{\cos 2012x \cdot \cos x}{\cos^{2013} x}dx + \int \frac{\sin 2012x \cdot \sin x}{\cos^{2013} x}dx = \int \frac{\cos 2012x}{\cos^{2012} x}dx + \int \left(\frac{1}{\cos^{2012} x}\right)' \cdot \frac{\sin 2012x}{2012}dx = \int \frac{\cos 2012x}{\cos^{2012} x}dx + \frac{\sin 2012x}{2012\cdot\cos^{2012} x} - \int \frac{1}{\cos^{2012} x}\left(\frac{\sin 2012x}{2012}\right)' dx = \int \frac{\cos 2012x}{\cos^{2012} x}dx + \frac{\sin 2012x}{2012\cdot\cos^{2012} x} - \int \frac{\cos 2012x}{\cos^{2012} x}dx = \frac{\sin 2012x}{2012\cdot\cos^{2012} x} + \mathcal{C}$.

XII.138. *Arătaţi că rădăcinile polinomului $X^3 + aX^2 + bX + c$ sunt în progresie geometrică dacă şi numai dacă $a^3c = b^3$.*

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Ţinând cont de relaţiile lui Viète, avem: $a^3c = b^3 \Leftrightarrow (x_1+x_2+x_3)^3 \cdot x_1x_2x_3 = (x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)^3 \Leftrightarrow x_1x_2x_3(x_1^3+x_2^3+x_3^3) = x_1^3x_2^3 + x_2^3x_3^3 + x_1^3x_3^3 \Leftrightarrow (x_1^2 - x_2x_3)(x_2^3x_3^2 - x_1x_3^3 - x_1x_2^3 + x_1^2x_2x_3) = 0 \Leftrightarrow (x_1^2-x_2x_3)(x_2^2-x_1x_3)(x_3^2-x_1x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1^2 = x_2x_3$ sau $x_2^2 = x_1x_3$ sau $x_3^2 = x_1x_2$, adică rădăcinile polinomului dat sunt în progresie geometrică.

XII.139. *Pe mulţimea nevidă G se consideră operaţia asociativă „$\cdot$" în raport cu care are loc regula de simplificare la stânga şi astfel încât există $a \in G$ cu $axa = x^3$, $\forall x \in G$. Demonstraţi că $(G, \cdot)$ este grup abelian.*

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

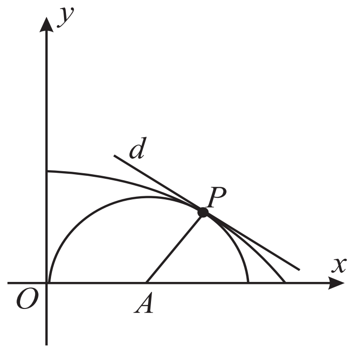
Soluţie. Avem: $a(ax)a = (ax)^3 \Rightarrow a(axa) = a\cdot x\cdot(axa)\cdot x \Rightarrow axa = x\cdot(axa)\cdot x \Rightarrow x^3 = x\cdot x^3\cdot x \Rightarrow x = x^3$, $\forall x \in G$. În particular, $a^3 = a$ şi atunci $a^3x = ax$, $\forall x \in G$, deci $a^2x = x$, $\forall x \in G$. Înlocuind pe x cu xa, deducem că $a^2xa = xa \Rightarrow a\cdot(axa) = xa \Rightarrow ax^3 = xa \Rightarrow ax = xa, \forall x \in G$. Atunci $a^2x = a\cdot(ax) = a\cdot(xa) = (ax)a = (xa)a = xa^2$ şi, cum $a^2x = x$, $\forall x \in G$, rezultă că $a^2x = xa^2 = x$, $\forall x \in G$, adică a^2 este elementul neutru al operaţiei „$\cdot$"; notăm $e = a^2$.

Am văzut că $x^3 = x = xa^2$, $\forall x \in G$. Simplificând la stânga cu x, obţinem că $x^2 = e$, $\forall x \in G$. Această egalitate arată că orice $x \in G$ este inversabil, cu $x^{-1} = x$. În plus, $xy = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx$, $\forall x, y \in G$, aşadar $(G, \cdot)$ este grup abelian.

XII.140. *Fie $a > 0$ şi cercurile de ecuaţii $\mathcal{C}_1 : (x-a)^2 + y^2 = a^2$ şi $\mathcal{C}_2 : (x+a)^2 + y^2 = a^2$. Determinaţi aria minimă a unei elipse care are drept axe de simetrie axele de coordonate şi este tangentă exterior în câte două puncte la fiecare dintre cercurile date.*

Adrian Corduneanu, Iaşi

Soluţie. Fie $A(a, 0)$ centrul lui $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{E} : \dfrac{x^2}{\lambda^2} + \dfrac{y^2}{\mu^2} = 1$ ecuaţia unei elipse ca în enunţ, $P(x_0, y_0)$ punctul de tangenţă situat în primul cadran, iar d tangenta comună în P la cele două curbe. Panta tangentei la $\mathcal{C}_1$ în P este $m_d = -\dfrac{1}{m_{AP}} = \dfrac{a - x_0}{y_0} < 0$, iar panta tangentei la elipsă în P se obţine prin derivare, din $\dfrac{2x}{\lambda^2} + \dfrac{2y \cdot y'}{\mu^2} = 0$, pentru $x = x_0$, deci este $y'(x_0) = -\dfrac{\mu^2}{\lambda^2} \cdot \dfrac{x_0}{y_0}$. Egalând cele două pante, obţinem că $\mu^2 = \lambda^2 \left(1 - \dfrac{a}{x_0}\right)$. Cum $P \in \mathcal{E}$, avem că $\dfrac{x_0^2}{\lambda^2} + \dfrac{y_0^2}{\mu^2} = 1$, iar din $P \in \mathcal{C}_1$ deducem că $(x_0 - a)^2 + y_0^2 = a^2$. Din aceste trei egalităţi, rezultă că $\lambda^2 = \dfrac{ax_0^2}{x_0 - a}$, iar $\mu^2 = ax_0$. Aria elipsei va fi $\mathcal{A} = \pi\lambda\mu = \dfrac{\pi a x_0^{3/2}}{(x_0 - a)^{1/2}}$. Minimul ariei se atinge odată cu pătratul său, deci avem de determinat minimul funcţiei $f(x) = \dfrac{x^3}{x - a}$, cu $a < x < 2a$. Găsim imediat că punctul de minim este $x_0 = \dfrac{3a}{2}$, iar valoarea minimă a ariei este $\mathcal{A}_{\min} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \pi a^2$.



Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor propuse în nr. 1/2013

A. Nivel gimnazial

G236. *Determinaţi numerele naturale a, b, c, d şi e, strict mai mari ca 1, cu proprietatea că $a + b + c + d + e = abcde - 95$.*

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Presupunem că $a \geq b \geq c \geq d \geq e \geq 2$; atunci $95 + 5a \geq 95 + a + b + c + d + e = abcde \geq a \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16a$, de unde $a \leq 8$.

Dacă $a = 8$, rezultă că $103 + b + c + d + e = 8bcde$ şi, procedând ca mai înainte, obţinem că $103 + 4b \geq 64b$, deci $60b \leq 103$ şi nu avem soluţii în acest caz. La fel se arată că nu avem soluţii când $a = 7$. Dacă $a = 6$, deducem că $101 + b + c + d + e = 6bcde$, deci $101 + 4b \geq 48b$, prin urmare $b = 2$. Rezultă că $c = d = e = 2$ şi, înlocuind în