Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor propuse în nr. 1/2012

A. Nivel gimnazial

G216. *Într-un pătrat 3×3 se aşază numerele de la 1 la 9 astfel încât produsul numerelor de pe linia k sau produsul numerelor de pe coloana k să fie pătrat perfect, pentru fiecare $k \in \{1, 2, 3\}$. Este posibil ca în centrul pătratului să se afle un număr impar?*

Marius Mâinea, Găeşti

4	1	9
6	3	2
*	*	8

Soluţie. Răspunsul este afirmativ: pătratul alăturat are produsele elementelor de pe L_1, L_2, C_3 egale cu $36, 36$ respectiv 144, iar în centru se află numărul impar 3.

G217. *Pe tablă sunt desenate p pătrăţele, $p \in \mathbb{N}^*$. Ionuţ colorează un pătrăţel, Ana colorează trei pătrăţele, apoi Ionuţ colorează cinci, Ana şapte ş.a.m.d. Pierde copilul care nu mai are pe tablă suficiente pătrăţele de colorat atunci când îi vine rândul. Determinaţi numerele p pentru care câştigătorul jocului este Ionuţ şi stabiliţi câte pătrăţele i-ar rămâne de colorat Anei (în funcţie de p).*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Cum Ionuţ colorează $4k + 1$ pătrăţele, $k = 0, 1, 2, \ldots$, Ionuţ va câştiga jocul dacă şi numai dacă $1 + 3 + \ldots + (4n + 1) \leq p < 1 + 3 + \ldots + (4n + 3)$, $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (2n + 1)^2 \leq p < (2n + 2)^2 \Leftrightarrow [\sqrt{p}] = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$. Anei i-ar rămâne de colorat $p - [\sqrt{p}]^2$ pătrăţele.

G218. *Se consideră numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$. Demonstraţi că există o submulţime $A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ cu proprietatea că $|\sum\limits_{i \in A} a_i| \geq \frac{1}{4} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_i|$.*

Radu Miron, elev, Iaşi

Soluţie. Definim mulţimile $A_1 = \{a_i | a_i \geq 0,\ i \text{ par}\}$; $A_2 = \{a_i | a_i < 0,\ i \text{ par}\}$; $A_3 = \{a_i | a_i \geq 0,\ i \text{ impar}\}$ şi $A_4 = \{a_i | a_i < 0,\ i \text{ impar}\}$. Se observă că $\sum\limits_{x \in A_i} |x| = |\sum\limits_{x \in A_i} x|$, $i = \overline{1, 4}$ şi atunci $\sum\limits_{i=1}^{4} |\sum\limits_{x \in A_i} x| = \sum\limits_{j=1}^{n} |a_j|$. Ca urmare, cel puţin una dintre submulţimile A_i, $i = \overline{1, 4}$, are valoarea absolută a sumei elementelor cel puţin egală cu $\frac{1}{4} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_j|$.

G219. *Fie a, b, c numere nenule, a impar, $b > c$ astfel încât $a = \frac{2bc}{b - c}$ şi $(a, b, c) = 1$. Arătaţi că abc este pătrat perfect.*

Neculai Stanciu, Buzău şi Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie (Gheorghe Iurea). Fie $d = (b, c) \in \mathbb{N}^*$; atunci $b = dx$, $c = dy$ cu $x, y \in \mathbb{N}^*$, $(x, y) = 1$, iar $a = \frac{2dxy}{x - y}$. Cum $(x, x - y) = (y, x - y) = (x, y) = 1$, rezultă că $n = \frac{2d}{x - y}$ este număr natural. Întrucât $a = nxy$ este număr impar, numerele

n, x, y vor fi impare. Avem că $a = nxy$, $b = n\dfrac{x-y}{2}x$, $c = n\dfrac{x-y}{2}y$ şi $(a, b, c) = 1$; deducem că $n = 1$ şi atunci $abc = (xy)\left(\dfrac{x-y}{2}x\right)\left(\dfrac{x-y}{2}y\right) = \left(xy\dfrac{x-y}{2}\right)^2$.

G220. *Determinaţi cifrele a cu proprietatea că există pătrate perfecte de forma* $\overline{2\underbrace{aa\ldots a}_{n \text{ ori}}6}$.

Adriana Dragomir şi Lucian Dragomir, Oţelu-Roşu

Soluţie. Cum nu există pătrate perfecte de forma $M_3 + 2$, rezultă că a nu poate lua valorile $0, 3, 6$ sau 9. Întrucât nu există pătrate perfecte de forma $M_4 + 2$, eliminăm şi cazurile $a \in \{2, 4, 8\}$. Arătăm în continuare că nu putem avea nici $a = 7$. Se verifică imediat că $276, 2776, 27776$ şi 277776 nu sunt părate perfecte. Dacă $n \geq 5$, atunci $2\underbrace{77\ldots7}_{n \text{ de } 7}6 = 16 \cdot 1736\underbrace{11\ldots1}_{n-3 \text{ de } 1}$; 16 este pătrat perfect, în timp ce al doilea factor este de forma $M_4 + 3$, deci nu este pătrat perfect.

Dacă $a = 1$, numărul $2116 = 46^2$ este pătrat perfect. Pentru $a = 5$, numărul $256 = 16^2$ este pătrat perfect. În concluzie, numerele care satisfac cerinţele problemei sunt $a = 1$ şi $a = 5$.

G221. *Determinaţi numerele naturale n pentru care*

$$A = 168\left(\frac{1}{[\sqrt{n^2+n+15}]} - \frac{1}{[\sqrt{n^2+n+16}]}\right) \in \mathbb{N}.$$

Mircea Fianu, Bucureşti

Soluţie. Observăm că

$$\sqrt{n^2+n+16} - \sqrt{n^2+n+15} = \frac{1}{\sqrt{n^2+n+16} + \sqrt{n^2+n+15}} < 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

prin urmare numerele $[\sqrt{n^2+n+15}]$ şi $[\sqrt{n^2+n+16}]$ sunt fie egale, fie consecutive. În primul caz, cerinţa problemei este îndeplinită ($0 \in \mathbb{N}$); rămâne să studiem situaţia $[\sqrt{n^2+n+16}] = [\sqrt{n^2+n+15}] + 1$. Această egalitate are loc dacă şi numai dacă $n^2+n+16 = k^2$, $k \in \mathbb{N}$, adică $4k^2 - (4n^2+4n+1) = 63 \Leftrightarrow (2k-2n-1)(2k+2n+1) = 63$. Avem posibilităţile $63 = 1 \cdot 63 = 3 \cdot 21 = 7 \cdot 9$ şi obţinem că $n \in \{15, 4, 0\}$. Corespunzător, $A \in \left\{\dfrac{7}{30}, \dfrac{28}{5}, 14\right\}$, prin urmare $A \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n \in \mathbb{N}\backslash\{4, 15\}$.

G222. Rezolvaţi ecuaţia $(x+2)^3 = x(x^2-2)^5$, $x \in (0, \infty)$.

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

Soluţie. Se vede că $x = 2$ este soluţie; vom arăta că ecuaţia nu mai are alte soluţii. Evident, nu putem avea $x \in (0, \sqrt{2})$: primul membru ar fi pozitiv, în timp ce al doilea ar fi negativ. Dacă $x \in (2, \infty)$, atunci $x(x^2-2) > x+2$ (inegalitate echivalentă cu $(x-2)(x+1)^2 \geq 0$), iar $(x^2-2)^4 > (x+2)^2$ (echivalent cu $(x-2)(x^3+2x^2-1) > 0$, ceea ce este adevărat pentru $x \geq 2$). Prin înmulţire, obţinem că $x(x^2-2)^5 > (x+2)^3$, deci ecuaţia nu are soluţii $x \in (2, \infty)$. Reluând raţionamentul, găsim că $x(x^2-2)^5 < (x+2)^3$, $\forall x \in [\sqrt{2}, 2)$, deci ecuaţia nu are soluţii nici în $[\sqrt{2}, 2)$.

G223. *Pentru $x, y, z \geq 0$, demonstraţi că are loc inegalitatea*

$$xy(x^2-y^2)^2+xz(x^2-z^2)^2+yz(y^2-z^2)^2 \geq 4(x-y)^2(x-z)^2(y-z)^2.$$

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Inegalitatea fiind simetrică, putem presupune fără a restrânge generalitatea că $x \geq y \geq z \geq 0$. Dacă $z = 0$, avem de demonstrat că $xy(x^2-y^2)^2 \geq 4x^2y^2(x-y)^2$ sau $xy(x-y)^4 \geq 0$, ceea ce este evident adevărat (cu egalitate dacă $y = 0$ sau dacă $x = y$). Dacă $z > 0$, atunci $xy(x^2-y^2)^2 = xy(x+y)^2(x-y)^2 \geq 4(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2$ (rezultă prin înmulţirea inegalităţilor $x > x-z \geq 0$, $y > y-z \geq 0$ şi $(x+y)^2 > (x-z+y-z)^2 \geq 4(x-z)(y-z)$). Adăugând în stânga încă doi termeni nenegativi, obţinem concluzia problemei. Egalitatea se realizează pentru $x = y = z$.

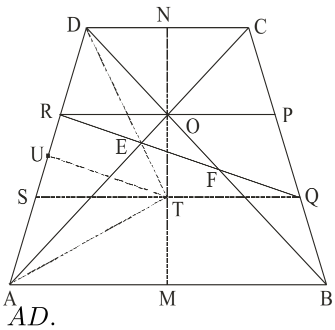
G224. *Trapezul isoscel $ABCD$ are baza mare AB şi diagonalele perpendiculare în O. Paralela prin O la baze taie laturile neparalele BC şi AD în P, respectiv R. Punctul Q este simetricul lui P faţă de mijlocul lui BC. Dreapta RQ intersectează AC şi BD în punctele E, respectiv F. Demonstraţi că:*

a) $RQ \perp AD$ şi $RQ = AD$;

b) $RE = FQ = CP$ şi $PQ = EF$.

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

Soluţie. a) Fie S simetricul lui Q faţă de axa de simetrie MN a trapezului, iar $\{T\} = SQ \cap MN$; atunci $TS = TQ$ şi $TM = ON$. În triunghiurile dreptunghice isoscele OCD şi OAB avem că $DN = ON = TM$ şi $AM = OM = TN$. Rezultă că $\triangle AMT \equiv \triangle TND$ (C.C.), de unde $AT = DT$ şi $\widehat{TAM} \equiv \widehat{DTN}$. Cum $\widehat{TAM}$ şi $\widehat{ATM}$ sunt complementare, obţinem că $\widehat{DTN}$ şi $\widehat{ATM}$ sunt complementare, aşadar $\widehat{ATD}$ este unghi drept. Astfel, $\triangle ATD$ este dreptunghic isoscel. Dacă U este mijlocul lui AD, atunci $TU \perp AD$ şi $TU = \frac{1}{2}AD$. Pe de altă parte, TU este linie mijlocie în $\triangle SRQ$, aşadar $TU \| RQ$ şi $TU = \frac{1}{2}RQ$, prin urmare $RQ \perp AD$ şi $RQ = AD$.

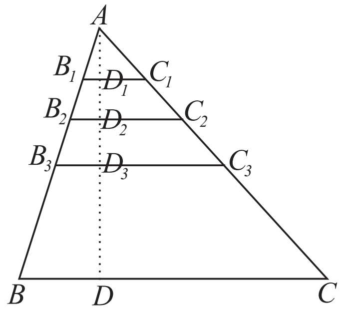


b) Patrulaterul $DOER$ are unghiurile $\widehat{R}$ şi $\widehat{O}$ drepte, deci este inscriptibil; deducem că $m(\widehat{DER}) = m(\widehat{DOR}) = 45°$. Atunci $\triangle RDE$ este dreptunghic isoscel, cu $RD = RE$. Apoi, cum $m(\widehat{RDE}) = m(\widehat{RDT}) = 45°$, punctele D, E şi T vor fi coliniare şi analog se arată că punctele A, T şi F sunt coliniare. Avem că $m(\widehat{QFB}) = m(\widehat{DFR}) = 90° - m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{DAO}) = m(\widehat{DBC})$, deci $\triangle QBF$ este isoscel, cu $QF = QB = SA$. Deoarece $RE = DR = SA$, obţinem că $RE = FQ = CP$. Acum, $EF = QR - (ER + FQ) = AD - (AS + DR) = RS = PQ$ şi cu aceasta soluţia este completă.

G225. *Lucian-Georges are o placă triunghiulară omogenă ABC de masă 40 şi o balanţă cu două talere. El doreşte să taie placa ABC după m drepte paralele cu BC astfel încât, folosind aceste plăci ca greutăţi dispuse pe talerele dorite ale balanţei, să* *poată cântări orice obiect cu masa număr natural n, cu $1 \leq n \leq 40$. Cum îl sfătuiţi să procedeze, astfel încât m să fie minim posibil?*

Dan Brânzei, **Iaşi**

Soluţie. Valoarea minimă a lui m este 3: dacă obţinem, după tăiere, patru plăci cu masele $1, 3, 9$, şi 27, putem cântări orice obiect cu masa număr natural n, cu $1 \leq n \leq 40$. De exemplu, pentru a cântări un obiect cu masa 17, aşezăm obiectul şi plăcile de mase 1 şi 9 pe un taler şi placa de masă 27 pe celălalt taler. (Rezultatul este cunoscut ca *problema lui Bachet*).



Fie B_1C_1, B_2C_2 şi B_3C_3 cele trei drepte paralele cu BC şi D_1, D_2, D_3 intersecţiile lor cu înălţimea AD. Avem că $\dfrac{\mathcal{A}_{AB_1C_1}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \dfrac{1}{40}$, deci $\left(\dfrac{AD_1}{AD}\right)^2 = \dfrac{1}{40}$ şi atunci $AD_1 = \dfrac{1}{2\sqrt{10}}AD$. Apoi, $\dfrac{\mathcal{A}_{AB_2C_2}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \dfrac{1+3}{40}$, prin urmare $\left(\dfrac{AD_2}{AD}\right)^2 = \dfrac{1}{10}$, de unde $AD_2 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}AD$. În sfârşit, $\dfrac{\mathcal{A}_{AB_3C_3}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \dfrac{1+3+9}{40}$, aşadar $\left(\dfrac{AD_3}{AD}\right)^2 = \dfrac{13}{40}$, şi astfel $AD_3 = \dfrac{\sqrt{13}}{2\sqrt{10}}AD$. În concluzie, cele trei drepte paralele cu BC împart înălţimea AD în părţile AD_1, D_1D_2, D_2D_3 şi D_3D proporţionale cu numerele $1, 1, \sqrt{13}-2$ şi $2\sqrt{10}-\sqrt{13}$.

B. Nivel liceal

L216. *Tangentele unghiurilor unui triunghi ABC sunt numere raţionale. Arătaţi că numerele $E_n = \sin^n A \cdot \sin^n B \cdot \sin^n C + \cos^n A \cdot \cos^n B \cdot \cos^n C$ sunt raţionale, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.*

Cătălin Calistru, Iaşi

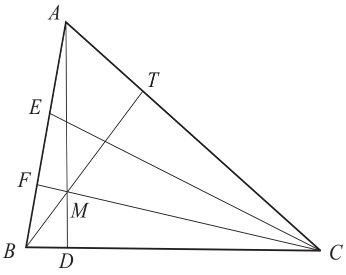
Soluţie (**Titu Zvonaru**, Comăneşti)**.** Mai general, vom arăta că fiecare dintre termenii sumei E_n este număr raţional. Deoarece $\sin 2A = \dfrac{2\operatorname{tg} A}{1+\operatorname{tg}^2 A}$, rezultă că numerele $\sin 2A, \sin 2B, \sin 2C$ sunt raţionale. Din identitatea $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \sin B \sin C$ deducem că produsul $\sin A \sin B \sin C$ este raţional. Analog, din $\cos 2A = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2 A}{1+\operatorname{tg}^2 A}$ şi $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4\cos A \cos B \cos C$ obţinem că şi numărul $\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$ este raţional.

Notă. S-au primit soluţii corecte de la **D. Văcaru** şi **I.V. Codreanu**.

L217. *Măsurile unghiurilor B şi C ale triunghiului ABC sunt de $70°$, respectiv $30°$. Pe latura AB se consideră punctele E şi F astfel încât $\widehat{ACE} \equiv \widehat{ECF} \equiv \widehat{FCB}$. Fie AD înălţimea din A, $D \in BC$, iar $\{M\} = AD \cap CF$. Demonstraţi că MB este bisectoarea unghiului $\widehat{DMF}$.*

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

Soluţie. Fie $\{T\} = BM \cap AC$. Cu teorema lui Menelaus în $\triangle ADC$ şi transversala $B - M - T$ obţinem că $\frac{BD}{BC} \cdot \frac{CT}{TA} \cdot \frac{AM}{MD} = 1$, de unde $\frac{CT}{TA} = \frac{MD}{MA} \cdot \frac{BC}{BD} = \frac{CM}{MA} \cdot \frac{MD}{CM} \cdot \frac{BC}{BD}$. Însă $\frac{MD}{MC} \cdot \frac{BC}{BD} = \sin 10° \cdot \frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \sin 10° \frac{AB \cdot AC \cdot \sin 80°}{AB \cdot AD \cdot \sin 20°} = \sin 10° \cdot \frac{1}{\sin 30°} \cdot \frac{\sin 80°}{\sin 20^{20}} = \frac{2 \sin 10° \cdot \cos 10°}{\sin 20°} = 1$. Rezultă că $\frac{CT}{TA} = \frac{CM}{MA}$, deci TM este bisectoarea unghiului $\widehat{AMC}$ şi de aici urmează concluzia problemei.



Notă. Au rezolvat problema şi **Gh. Iurea**, **T. Zvonaru**, **D. Văcaru** şi **Şt. Dominte**. Soluţia autorului se bazează pe o construcţie auxiliară: consideră punctul $N \in (CF)$ astfel încât $m(\widehat{NAC}) = 20°$, demonstrează că $\triangle ABN$ este echilateral etc.

L218. *Fie ABC un triunghi isoscel cu $AB = AC$ şi D un punct pe latura BC. Considerăm punctele E şi F pe laturile AB, respectiv AC astfel încât $BD = DE$ şi $CD = CF$. Notăm $\{T\} = BF \cap CE$. Arătaţi că patrulaterul $BDTE$ este inscriptibil dacă şi numai dacă patrulaterul $DCFT$ este inscriptibil.*

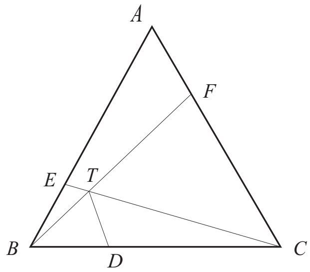
Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie (**Gabriel Popa**, Iaşi)**.** Condiţia $BD = DE$ este suficientă pentru a obţine concluzia problemei; vom da o soluţie care nu ţine seama de ipoteza $CD = CF$. Din triunghiurile isoscele DBE şi ABC obţinem că $\widehat{DEB} \equiv \widehat{B} \equiv C$. Atunci: patrulaterul $DCFT$ este inscriptibil $\Leftrightarrow \widehat{BTD} \equiv \widehat{C} \Leftrightarrow \widehat{BTD} \equiv \widehat{BED} \Leftrightarrow$ patrulateral $BDTE$ este inscriptibil.

Notă. Au rezolvat problema **Daniel Văcaru** şi **Ştefan Dominte**.

Între enunţul şi soluţia problemei primită din partea d-lui T. Zvonaru era o neconcordanţă: enunţul este cel publicat în revistă, însă soluţia se bazează pe ipoteza $BD = BE$ (în loc de $BD = DE$). Noua problemă este mult mai dificilă şi expunem în continuare soluţia autorului:

Notăm $b = BD$, $c = CD$, $t = AB = AC$. Din relaţia lui Stewart $BC^2 \cdot AE + AC^2 \cdot BE = CE^2 \cdot AB + AB \cdot AE \cdot EB$ deducem că $t \cdot CE^2 = (b+c)^2(t-b) + tb^2$. Cu teorema lui Menelaus în $\triangle ACE$ cu transversala $B - T - F$ obţinem că $\frac{BE}{BA} \cdot \frac{FA}{FC} \cdot \frac{TC}{TE} = 1$, deci $\frac{TC}{TE} = \frac{tc}{bt - bt}$, de unde $\frac{CT}{CE} = \frac{tc}{t(b+c) - bc}$. Atunci: $BDTE$ este patrulater inscriptibil $\Leftrightarrow CT \cdot CE = CD \cdot CB \Leftrightarrow \frac{c}{t(b+c) - bc} \cdot t \cdot CE^2 = c(b+c) \Leftrightarrow (b+c)^2 t - b(b+c)^2 + tb^2 = (b+c)^2 t - bc(b+c) \Leftrightarrow tb = (b+c)^2 - c(b+c) \Leftrightarrow t = b+c \Leftrightarrow \triangle ABC$ este echilateral. Analog obţinem că $DCFT$ este patrulater inscriptibil $\Leftrightarrow \triangle ABC$ este echilateral, de unde cerinţa problemei.



L219. *Fie date un triunghi ABC şi numerele naturale $m \geq n \geq 1$. Construiţi cu rigla şi compasul punctele A' din planul triunghiului pentru care triunghiul $A'BC$ are* *perimetrul şi aria de m, respectiv n ori mai mare decât cele ale triunghiului ABC.*

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Cu notaţiile uzuale, condiţiile din enunţ revin la $b'+c'=m(a+b+c)-a$ şi $h'_a=n\cdot h_a$. Prima spune că punctul A' se află pe elipsa $\mathcal{E}$ cu focarele B şi C şi având semiaxa mare $\alpha=\dfrac{1}{2}[m(a+b+c)-a]$. A doua condiţie arată că A' se află pe una din dreptele d paralele cu BC şi situate la distanţa nh_a de BC. Aşadar, $A'\in\mathcal{E}\cap d$.

Pentru semiaxa mică β a elipsei $\mathcal{E}$ avem: $\beta^2=\dfrac{1}{4}[m(a+b+c)-a]^2-\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{1}{4}m(a+b+c)[m(a+b+c)-2a]$. Cu rigla şi compasul pot fi construite segmentele α şi β. Construim apoi cercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ cu centrele în O (mijlocul segmentului BC) şi având razele de lungimi α, respectiv β. În condiţiile problemei, dreapta d intersectează $\mathcal{C}_2$; într-adevăr,

$$\begin{aligned}
nh_a\le\beta \Leftrightarrow \frac{4n^2S^2}{a^2}&\le\frac{1}{4}m(a+b+c)[m(a+b+c)-2a]\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow n^2(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)\le ma^2[m(a+b+c)-2a]\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow n^2(b+c-a)[a^2-(b-c)^2]\le ma^2[m(a+b+c)-2a]\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow -n^2(b+c-a)(b-c)^2-a^2[-n^2(b+c-a)+m^2(a+b+c)-2am]\le 0\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow -n^2(b+c-a)(b-c)^2-a^2\{(b+c)(m^2-n^2)+a[(m-1)^2+n^2-1]\}\le 0.
\end{aligned}$$

Are loc inegalitatea strictă $nh_a<\beta$, dacă excludem cazul banal $m=n=1$ şi $b=c$; atunci avem două puncte P_1 şi P_2 de intersecţie între d şi $\mathcal{C}_2$.

Acum, construcţia punctelor A' este imediată (sugerată de construcţia elipsei prin puncte): fie $\{Q_1\}=\mathcal{C}_1\cap(OP_1$, $\{Q_2\}=\mathcal{C}_1\cap(OP_2$, $A'_1=Pr_dQ_1$ şi $A'_2=Pr_dQ_2$. Alte două puncte, A'_3 şi A'_4, se obţin în cazul în care d se află în semiplanul opus determinat de dreapta BC. Se justifică uşor faptul că punctele A'_i, $i=\overline{1,4}$, astfel construite se află pe elipsa $\mathcal{E}$, prin urmare problema are patru soluţii (construibile cu rigla şi compasul).

L220. *a) Fie $n\in\mathbb{N},n\ge 10$. Arătaţi că există o infinitate de n-uple $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, cu $x_i\in(0,1)$, $\forall i=\overline{1,n}$ şi $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\dfrac{n}{2}$.*

b) Pentru un n-uplu ca la a), notăm $E_n=\dfrac{x_1}{1-x_1}+\dfrac{x_2}{(1-x_1)(1-x_2)}+\ldots+\dfrac{x_n}{(1-x_1)\ldots(1-x_n)}$. Arătaţi că $\dfrac{1}{E_n+1}$ se exprimă ca număr zecimal în care cel puţin primele $3\cdot\left[\dfrac{n}{10}\right]$ zecimale sunt zerouri.

Cecilia Deaconescu, Piteşti

Soluţie. a) Dacă $n=2p$, luăm $x_1=\dfrac{1}{2}-\alpha_1,\ldots,x_p=\dfrac{1}{2}-\alpha_p$, $x_{p+1}=\dfrac{1}{2}+\alpha_p,\ldots,x_{2p}=\dfrac{1}{2}+\alpha_1$, unde $\alpha_i\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ sunt astfel încât $\alpha_1>\alpha_2>\ldots>\alpha_p$. Dacă $n=2p+1$, luăm $x_1=\dfrac{1}{2}-\alpha_1,\ldots,x_p=\dfrac{1}{2}-\alpha_p$, $x_{p+1}=\dfrac{1}{2}$, $x_{p+2}=\dfrac{1}{2}+\alpha_p,\ldots,x_{2p+1}=$

$\dfrac{1}{2}+\alpha_1$, cu o alegere similară a numerelor α_i, $i=\overline{1,p}$.

b) Notăm $y_i = 1 - x_i$, $i = \overline{1,n}$; atunci $y_i \in (0,1)$, $i = \overline{1,n}$ şi $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i = \dfrac{n}{2}$, iar $E_n = \dfrac{1-y_1}{y_1} + \dfrac{1-y_2}{y_1y_2} + \ldots + \dfrac{1-y_n}{y_1y_2\ldots y_n} = \left(\dfrac{1}{y_1}-1\right) + \left(\dfrac{1}{y_1y_2} - \dfrac{1}{y_1}\right) + \ldots + \left(\dfrac{1}{y_1\ldots y_n} - \dfrac{1}{y_1\ldots y_{n-1}}\right) = \dfrac{1}{y_1\ldots y_n} - 1$. Astfel, $\dfrac{1}{E_n+1} = y_1y_2\ldots y_n \le \left(\dfrac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}\right)^n = \dfrac{1}{2^n}$. Notând $k = \left[\dfrac{n}{10}\right]$, avem că $\dfrac{1}{2^n} \le \dfrac{1}{2^{10k}} = \dfrac{1}{1024^k} < \dfrac{1}{1000^k} = \dfrac{1}{10^{3k}}$, deci numărul $\dfrac{1}{E_n+1}$ are cel puţin primele $3k$ zecimale egale cu 0.

Notă. Am primit soluţii corecte de la **D. Văcaru**, Piteşti, şi **T. Zvonaru**, Comăneşti.

L221. *Fie n un număr natural impar. Stabiliţi câte numere naturale nenule p au proprietatea că p^2+n^2 este pătrat perfect şi determinaţi cel mai mare asemenea număr.*

Marian Panţiruc, Iaşi

Soluţie. Fie $n = \prod n_i^{\alpha_i}$ descompunere în factori primi a lui n, cu $n_1 < n_1 < \ldots$, şi $p \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $n^2+p^2 = k^2$; atunci $(k-p)(k+p) = \prod n_i^{2\alpha_i}$, iar $k-p < k+p$ (deoarece $p \neq 0$). Numărul de numere p pentru care n^2+p^2 este pătrat perfect va fi, deci, cel mult egal cu numărul de divizori ai lui n^2 strict mici decât n, număr dat de $N = \dfrac{1}{2}[\prod(2\alpha_i+1)-1]$. Vom arăta că acest maxim N este efectiv atins.

Există numerele naturale $0 \le a_i \le 2\alpha_i$ astfel încât $k-p = \prod n_i^{a_i}$ şi $k+p = \prod n_i^{2\alpha_i - a_i}$, prin urmare $p = \dfrac{1}{2}(\prod n_i^{2\alpha_i-a_i} - \prod n_i^{a_i})$. Pentru a demonstra că există N numere p ca în enunţ, ar fi suficient să justitificăm faptul că un anumit p nu poate fi scris în două moduri distincte ca în relaţia precedentă. Să presupunem, prin absurd, că

$$(*) \qquad p = \frac{1}{2}\left(\prod n_i^{2\alpha_i-a_i} - \prod n_i^{a_i}\right) = \frac{1}{2}\left(\prod n_i^{2\alpha_i-b_i} - \prod n_i^{b_i}\right).$$

Atunci se observă că $\min(2\alpha_i - a_i, 2\alpha_i - b_i) = \min(a_i, b_i)$, de unde $2\alpha_i - \max(a_i,b_i) = \min(a_i,b_i)$, adică $2\alpha_i = a_i + b_i$. Revenind în (*), obţinem că $\prod n_i^{b_i} - \prod n_i^{a_i} = \prod n_i^{a_i} - \prod n_i^{b_i}$, adică $\prod n_i^{a_i} = \prod n_i^{b_i}$, fapt care este adevărat doar dacă $a_i = b_i$, oricare ar fi i, aşadar numărul numerelor p ca în enunţ este $N = \dfrac{1}{2}[\prod(2\alpha_i+1)-1]$.

Un număr p este cu atât mai mare cu cât a_i sunt mai mici, deci $p_{\max} = \dfrac{1}{2}(n^2-1)$.

Notă. A rezolvat problema **D. Văcaru**, Piteşti.

L222. *Pentru a,b,c numere reale pozitive, demonstraţi inegalitatea*

$$a\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) + b\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right) + c\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) \ge \frac{18}{a+b+c}.$$

Florin Stănescu, Găeşti

Notă. S-au primit soluţii corecte, diferite de cea dată de autor, de la **Daniel Văcaru** (o soluţie), **Titu Zvonaru** (6 soluţii) şi **I.V. Codreanu** (3 soluţii). A se vedea în articolul *Câteva soluţii ale problemei L222*, publicat în acest număr de revistă la pag. 120.

L223. *Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive cu $a + b + c = 3$, arătaţi că*

$$\sum \frac{ab}{ab+a+b} + \frac{1}{9}\sum \frac{(a-b)^2}{ab+a+b} \le 1.$$

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Avem că $3(ab+a+b) = 3ab+(a+b)(a+b+c) = a^2+b^2+5ab+bc+ac$, de unde $\dfrac{ab}{ab+a+b}+\dfrac{(a-b)^2}{9(ab+a+b)}-\dfrac{1}{3} = \dfrac{9ab+(a^2+b^2-2ab)-(a^2+b^2-5ab-bc-ac)}{9(ab+a+b)}$ $= \dfrac{b(a-c)}{9(ab+a+b)} + \dfrac{a(b-c)}{9(ab+a+b)}$. Atunci

$$\sum \frac{ab}{ab+a+b} + \frac{1}{9}\sum \frac{(a-b)^2}{ab+a+1} - 1 \le \sum \left(\frac{b(a-c)}{9(ab+a+b)} + \frac{a(b-c)}{9(ab+a+b)} \right) =$$

$$= \sum \left(\frac{b(a-c)}{9(ab+a+b)} + \frac{b(c-a)}{9(bc+b+c)} \right) = \sum \left(-\frac{b(a-c)^2(b+1)}{9(ab+a+b)(bc+b+c)} \right) \le 0,$$

adică tocmai inegalitatea din enunţ. Avem egalitate doar dacă $a = b = c = 1$.

Notă. Rezultatul problemei întăreşte inegalitatea propusă de **Cao Minh Quang** în *Crux Mathematicorum 4/2009*.

Notă. S-a primit soluţie corectă de la **D. Văcaru**, Piteşti.

L224. *Fie n şi k numere întregi pozitive. Demonstraţi identităţile:*

a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} \left[\frac{j}{k}\right] = n\left[\frac{n}{k}\right] - \frac{k}{2}\left[\frac{n}{k}\right]\left(\left[\frac{n}{k}\right]+1\right)$; b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left[\sqrt[k]{\frac{n}{j}}\right] = \sum_{q=1}^{[\sqrt[k]{n}]} \left[\frac{n}{q^k}\right]$.

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. a) Identitatea se scrie echivalent sub forma

$$\sum_{j=1}^{n-1} \left[\frac{n-j}{k}\right] = \sum_{r=1}^{[\frac{n}{k}]} (n-kr).$$

Aceasta provine din exprimarea în două moduri a numărului de progresii aritmetice neconstante care au $k+1$ termeni din mulţimea $\{1, 2, \ldots, n\}$: în partea stângă, $\left[\dfrac{n-j}{k}\right]$ reprezintă numărul progresiilor aritmetice de acest tip care încep cu j, iar în membrul drept, $n - kr$ este numărul acestor progresii care au raţia r.

b) Rezultă analog, numărând în două moduri progresiile geometrice neconstante cu $k+1$ termeni în mulţimea $\{1, 2, \ldots, n\}$ (după primul termen şi după raţie); obţinem că

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\left[\sqrt[k]{\frac{n}{j}}\right] - 1 \right) = \sum_{q=2}^{\sqrt[k]{n}} \left[\frac{n}{q^k}\right],$$

iar această inegalitate se pune cu uşurinţă în forma din enunţ.

Notă. Daniel Văcaru, Piteşti, rezolvă problema explicitând termenii celor două sume şi urmărind contribuţia lor în rezultatul final.

L225. *Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi X un vector nenul din $\mathbb{R}^n$ astfel încât $AX = O$ şi există $Y \in \mathbb{R}^n$ pentru care $AY = BX$. Notăm cu A_j matricea obţinută înlocuind coloana j a matricei A cu coloana j a matricei B. Arătaţi că $\sum\limits_{j=1}^{n} detA_j = 0$.*

Adrian Reisner, Paris

Soluţie. Notăm cu δ_{ij} complemenţii algebrici ai matricei A şi cu b_{ij} elementele lui B . Dezvoltând după coloana j determinantul matricei A_j, obţinem că $\det A_j = \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ij}\delta_{ij}$. Cum această sumă este elementul de indici (j, j) al matricei $M = A^*B$ (unde A^* este adjuncta lui A), rezultă că $\sum\limits_{j=1}^{n} \det A_j = \operatorname{tr} M$. Întrucât $AX = O$, cu $X \neq O$, vom avea că A nu este inversabilă, deci $\operatorname{rang} A \leq n - 1$. În cazul în care $\operatorname{rang} A < n - 1$, evident că A^* este nulă şi concluzia este imediată.

Prespunem că $\operatorname{rang} A = n - 1$; atunci $\operatorname{Ker} A = \{\alpha X | \alpha \in \mathbb{R}\}$. Pe de altă parte, $A \cdot A^* = (\det A)I_n = O_n$, prin urmare $\operatorname{Im} A^* \subset \operatorname{Ker} A$ şi astfel $\operatorname{rang} A^* \leq 1$ (în realitate, $\operatorname{rang} A^* = 1$, fiindcă A are măcar un minor de ordin $n - 1$ nenul). Avem deci $\operatorname{rang} M \leq 1$ şi $\operatorname{Im} M \subset \operatorname{Ker} A$. Dacă $M = O_n$, rezultatul este trivial. Dacă $M \neq O_n$, fie $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ o bază a subspaţiului vectorial $\operatorname{Ker} M$, pe care o completăm cu vectorul e_n până la o bază a lui $\mathbb{R}^n$. Matricea endomorfismului canonic asociat matricei M în baza $\{e_1, \ldots, e_n\}$ este $\begin{pmatrix} O_{n-1,n-1} & K_{n-1,1} \\ O_{1,n-1} & d \end{pmatrix}$, unde $d = \operatorname{tr} M$. Are loc echivalenţa: $\operatorname{tr} M = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} M \subset \operatorname{Ker} M$. În cazul nostru, $BX \in \operatorname{Im} A$, deci $BX \in \operatorname{Ker} A^*$ şi atunci $MX = O$, de unde concluzia problemei.

Premiu pe anul 2012 acordat de
ASOCIAŢIA ,,RECREAŢII MATEMATICE"

Se acordă un premiu în valoare de 100 lei elevului

CEUCĂ Răzvan-Dumitru – Colegiul Naţional, Iaşi

pentru nota ,,*O dublă inegalitate integrală şi câteva aplicaţii*" apărută în acest număr al revistei *Recreaţii Matematice*, pag. 111.