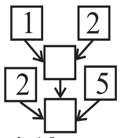
PROBLEME ŞI SOLUŢII

Soluţiile problemelor propuse în nr. 1/2012

Clasele primare

P.226. *Scrieţi vecinii numărului care rezultă din compunerea alăturată.*



(*Clasa I*) **Mihaela Cucoranu, elevă, Iaşi**

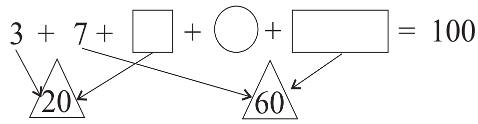
Soluţie. Prin compunerea numerelor 1 şi 2 obţinem numărul 3, iar prin compunerea numerelor $2, 3$ şi 5 obţinem numărul 10. Vecinii numărului 10 sunt 9 şi 11.

P.227. *La plecare în vacanţă, trei elevi au convenit să-şi trimită felicitări: fiecare să trimită o singură felicitare la unul dintre ceilalţi doi. Este posibil ca unul dintre elevi să primească felicitare de la elevul căruia el însuşi i-a trimis felicitare?*

(*Clasa I*) **Lavinia Dascălu, elevă, Iaşi**

Soluţie. Este posibil. De exemplu, elevii $E1$ şi $E2$ îşi trimit felicitări reciproc, iar elevul $E3$ poate trimite felicitare elevului $E1$ sau elevului $E2$.

P.228. *Priviţi cu atenţie exerciţiul de mai jos:*



Calculaţi: a) $\boxed{} + \boxed{}$ *b)* $100 - \bigcirc$.

(*Clasa I*) **Ştefania Gavril, elevă, Iaşi**

Soluţie. $3 + \boxed{} = 20 \Rightarrow \boxed{} = 20 - 3 = 10 + 10 - 3 = 10 + 7 = 17$; $7 + \boxed{} = 60 \Rightarrow \boxed{} = 60 - 7 = 50 + 10 - 7 = 50 + 3 = 53$; $20 + 60 + \bigcirc = 100 \Rightarrow 80 + \bigcirc = 100 \Rightarrow \bigcirc = 100 - 80 = 20$.

a) $\boxed{} + \boxed{} = 53 + 17 = 50 + 10 + 3 + 7 = 60 + 10 = 70$;

b) $100 - \bigcirc = 100 - 20 = 80$.

P.229. *Într-o cutie sunt* 17 *bile albe şi* 19 *bile negre. Sorin ia la întâmplare* 5 *bile. Câte bile de fiecare culoare rămân în cutie?*

(*Clasa a II-a*) **Inst. Maria Racu, Iaşi**

Soluţie.

bile albe rămase	17	16	15	14	13	12
bile negre rămase	14	15	16	17	18	19

P.230. *Arătaţi că oricum am lua şase numere din şirul* $11, 12, 13, \ldots, 20$, *există două care au suma* 31.

(*Clasa a II-a*) **Mihaela Gâlcă, elevă, Iaşi**

Soluţie. Avem $11+20 = 31$, $12+19 = 31$, $13+18 = 31$, $14+17 = 31$, $15+16 = 31$. În cel mai nefavorabil caz, luăm câte un termen din fiecare adunare. Al şaselea număr va fi al doilea termen al unei adunări şi existenţa este justificată.

P.231. *Asupra numerelor* $10, 11, 12$ *şi* 13 *se efectuează operaţia următoare: numerele pare se înlocuiesc cu predecesorii lor şi cele impare se înlocuiesc cu succesorii lor. În al doilea pas se repetă această operaţie asupra rezultatului obţinut; se continuă în acelaşi fel în paşii următori. Aflaţi de câte ori se repetă scrierea iniţială a numerelor între paşii* 101 *şi* 230 *ai şirului de operaţii.*

(*Clasa a II-a*) **Paula Zaharia, elevă, Iaşi**

Soluţie. Se observă că în paşii de ordin par numerele se scriu exact ca în forma iniţială. Între paşii 101 şi 230, paşii de ordin par sunt: $102, 104, 106, \ldots, 228$ care sunt în număr de 64.

P.232. *Cei şase membri ai unei echipe care participă la un concurs de matematică au vârste diferite, de cel puţin* 10 *ani şi cel mult* 15 *ani. În timpul concursului membrii echipei s-au aşezat la masă în ordinea vârstelor. Să se afle ce vârstă are fiecare ştiind că Ioana este cea mai mică, Anca este cea mai mare, Bogdan se află lângă Ioana şi nu se află lângă Bianca şi Andrei, iar Alexandra se află între doi băieţi.*

(*Clasa a III-a*) **Constanţa Tudorache şi Nelu Tudorache, Iaşi**

Soluţie. Ordinea aşezării, în ordinea crescătoare a vârstelor, este: Ioana, Bogdan, Alexandru, Andrei, Bianca şi Anca. Cum vârstele sunt diferite, iar de la 10 la 15 ani sunt 6 numere, urmează că cel mai mic are 10 ani, iar cel mai mare 15 ani. Ceilalţi membri au $11, 12, 13$ şi respectiv 14 ani.

P.233. *Dacă* $a \times b = 441$ *şi* b *se împarte exact la* a*, determinaţi* a *şi* b*.*

(*Clasa a III-a*) **Tatiana Ignat, elevă, Iaşi**

Soluţie. Dacă b se împarte exact la a, atunci 441 se împarte exact la $a \times a$. Cum $441 = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$, avem cazurile: 1) $a = 1$, $b = 441$; 2) $a = 3$, $b = 147$; 3) $a = 7$, $b = 63$ şi 4) $a = 21$, $b = 21$.

P.234. *Aflaţi numerele naturale* a *şi* b *astfel încât* $(a + 2) : (b + 1) = a$*.*

(*Clasa a III-a*) **Codruţa Filip, elevă, Iaşi**

Soluţie. Nu putem avea $a = 0$ sau $b = 0$. Atunci $a+2 = (b+1)a$ şi avem cazurile: $b = 1$, $a = 2$; $b = 2, a = 1$. Pentru $b \geq 3$ nu avem soluţii.

P.235. *O carte are rupte mai multe foi consecutive. Prima pagină de pe prima foaie ruptă are numărul* 163*, iar ultima pagină are numărul format din aceleaşi cifre. Pot fi împărţite foile rupte în grupe de câte* 3*?*

(*Clasa a III-a*) **Andreea Bîzdîgă, elevă, Iaşi**

Soluţie. Pe ultima pagină trebuie să fie un număr par, mai mare ca 163, deci 316. Numărul total de pagini este $316 - 163 + 1 = 154$, iar numărul foilor este $154 : 2 = 77$. Cum $77 = 3 \times 25 + 2$, deducem că foile rupte nu pot fi împărţite în grupe de câte 3.

P.236. *În două cutii sunt mingi de tenis, în prima fiind de două ori mai multe decât în a doua. Dacă din prima cutie se scot* 30 *de mingi şi din a doua* 20*, atunci în prima cutie rămân de trei ori mai multe mingi decât în a doua. Câte mingi sunt în fiecare cutie?*

(*Clasa a IV-a*) **Înv. Petru Miron, Paşcani**

Soluţie. Fie $2a$, respectiv a numărul mingilor din cele două cutii. Din $2a - 30 = 3(a - 20)$ obţinem că $a = 30$, prin urmare în cele două cutii se află 60, respectiv 30 de mingi.

P.237. *Într-o cameră sunt scaune cu* 3 *picioare şi cu* 4 *picioare. Când toate scaunele sunt ocupate, numărul picioarelor din cameră este* 39. *Câte scaune cu* 4 *picioare sunt în cameră?*

(*Clasa a IV-a*) **Inst. Laura Chirilă, Iaşi**

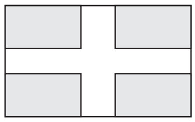
Soluţie. Dacă avem a scaune cu 3 picioare şi b scaune cu 4 picioare şi toate scaunele sunt ocupate, numărul total de picioare este $5a + 6b$. Căutăm a şi b astfel încât $5a + 6b = 39$. Deoarece 39 şi $6b$ se împart exact la 3 atunci şi $5a$ se împarte exact la 3, deci a se împarte exact la 3. Unica soluţie este: $a = 3$ şi $b = 4$.

P.238. *Aflaţi numerele care se măresc de* 11 *ori prin adăugarea unei cifre diferite de zero la sfârşitul lor.*

(*Clasa a IV-a*) **Nicoleta Cumpătă, elevă, Iaşi**

Soluţie. Dacă numărul are cel puţin două cifre, atunci $10 \cdot \overline{ab} + c = 11 \cdot \overline{ab}$, de unde $\overline{ab} = c$, c fiind cifra adăugată. Rezultă că numerele căutate au o singură cifră. Vom avea $10 \cdot a + c = 11a$, ceea ce implică $a = c$, $a \neq 0$. Numerele care îndeplinesc condiţia problemei sunt $1, 2, 3, \ldots, 9$.

P.239. *Dreptunghiul alăturat reprezintă o grădină care este formată din două alei şi patru straturi dreptunghiulare egale. Aflaţi dimensiunile grădinii ştiind că lăţimea fiecărei alei este de* $2m$, *diferenţa dintre dimensiunile unui strat este de* $1m$, *iar lungimea unui strat reprezintă* $\frac{2}{5}$ *din lungimea grădinii.*



(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

Soluţie. Suma lungimilor a două straturi reprezintă $\frac{4}{5}$ din lungimea grădinii, deci $2m$ reprezintă $\frac{1}{5}$ din lungimea grădinii, de unde deducem că lungimea grădinii este de $10m$, iar lungimea fiecărui strat este de $4m$. Lăţimea grădinii este $2 \times (4-1) + 2 = 8m$.

Clasa a V-a

V.144. *Aflaţi numerele naturale* $\overline{abc}$ *cu proprietatea că* $\overline{abc} = a + 19b + 10c$.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

Soluţie. Cum $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, reducând termenii şi împărţind prin 9, din ipoteză deducem că $11a = b + c$. Vom avea obligatoriu că $a = 1$, $b + c = 11$, deci $\overline{abc} \in \{129, 138, 147, 156, 165, 174, 183, 192\}$.

V.145. *Demonstraţi că numărul* $A = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2012}$ *nu este pătrat perfect.*

Anca Chiriţescu, Ţigănaşi (Iaşi)

Soluţie. Cum A se divide cu 2, dar nu se divide cu 4, rezultă că nu este pătrat perfect.

V.146. *Se consideră mulţimea* $A = \{\overline{abc} \,|\, a, c$ *cifre pare,* b *cifră impară*$\}$. *Determinaţi cardinalul lui* A *şi suma elementelor lui* A.

Bogdan Chiriac, student, Iaşi

Soluţie. Întrucât $a \in \{2, 4, 6, 8\}$, $b \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $c \in \{0, 2, 4, 5, 8\}$, rezultă că $|A| = 4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$. Pe poziţia sutelor, fiecare dintre cifrele $2, 4, 6$ şi 8 apare de câte 25 de ori; pe poziţia zecilor, fiecare cifră impară apare de câte 20 de ori, iar pe poziţia unităţilor fiecare cifră pară apare de câte 20 de ori. Suma elementelor lui A va fi $100 \cdot 25(2+4+6+8) + 20 \cdot 20(1+3+5+4+9) + 20(0+2+4+6+8) = 55\,400$.

V.147. *Putem aşeza pe un cerc numerele* $1, 2, 3, \ldots, 2012$ *astfel încât suma oricăror patru numere consecutive să se dividă cu* 5*?*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Dacă, prin absurd, ar exista o astfel de aşezare, fie aceasta $a_1, a_2, \ldots, a_{2012}$, atunci din $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \vdots 5$, $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \vdots 5, \ldots, a_{2012} + a_1 + a_2 + a_3 \vdots 5$ ar rezulta, prin sumare, că $4(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2012}) \vdots 5$, adică $4(1 + 2 + \ldots + 2012) \vdots 5$, ceea ce este fals.

V.148. *Arătaţi că* $\dfrac{2^{371} + 26 \cdot 3^{237}}{3^{240}} < \dfrac{3^{371} + 124 \cdot 5^{247}}{5^{250}}$.

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. Vom arăta că prima fracţie este subunitară, iar a doua este supraunitară. Avem: $2^{371} + 26 \cdot 3^{237} = (2^{11})^{33} \cdot 2^8 + 26 \cdot 3^{237} < (3^7)^{33} \cdot 3^6 + 26 \cdot 3^{237} = 3^{237} + 26 \cdot 3^{237} = 27 \cdot 3^{237} = 3^{240}$, iar $3^{371} + 124 \cdot 5^{247} = (3^9)^{41} \cdot 3^2 + 124 \cdot 5^{247} > (5^6)^{41} \cdot 5 + 124 \cdot 5^{247} = 5^{247} + 124 \cdot 5^{247} = 125 \cdot 5^{247} = 5^{250}$ şi astfel soluţia problemei este completă.

V.149. *Demonstraţi că* 6^n $(n \in \mathbb{N})$ *nu poate fi scris ca sumă de două pătrate perfecte nenule.*

Elena Iurea, Iaşi

Soluţie. Pentru $n \geq 2$, să presupunem că $6^n = a^2 + b^2$, cu $a, b \in \mathbb{N}^*$. Se arată uşor că a, b sunt pare şi divizibile cu 3, deci $a = 6x$, $b = 6y$, cu $x, y \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că $6^{n-2} = x^2 + y^2$, cu $x, y \in\in \mathbb{N}^*$. Continuând raţionamentul obţinem că 6^{n-4}, 6^{n-6} etc. se pot scrie ca sumă de două pătrate perfecte nenule. În final, 6^0 sau 6^1 vor avea această proprietate, ceea ce este evident fals.

V.150. *Despre un număr natural* $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$ *spunem că este număr bun dacă există o infinitate de pătrate perfecte care au suma cifrelor egală cu* $\overline{a_{n-1} a_n}$. *Arătaţi că* 2012 *nu este număr bun, însă* 2013 *este număr bun.*

Cristian Lazăr, Iaşi

Soluţie. Un pătrat perfect nu poate avea suma cifrelor 12, deoarece $12 = M_9 + 3$ şi un număr de forma $M_9 + 3$ conţine în descompunerea sa în factori primi factorul 3^1, deci 2012 nu este număr bun. Deoarece numerele de forma $49\underbrace{00\ldots0}_{2n \text{ zerouri}}$ sunt pătrate perfecte şi au suma cifrelor 13, rezultă că 2012 este număr bun.

Clasa a VI-a

VI.144. *Fie* p *un număr prim impar. Arătaţi că există un singur număr natural nenul* k *pentru care* $p^2 + k^2$ *este pătrat perfect.*

Marian Panţiruc, Iaşi

Soluţie. Dacă $p^2 + k^2 = n^2$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $(n-k)(n+k) = p^2$. Cum p este prim, rezultă că $n - k = 1$, $n + k = p^2$, deci $k = \dfrac{p^2 - 1}{2} \in \mathbb{N}^*$ este singurul număr cu proprietăţile din enunţ.

VI.145. *Fie* $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$ *şi mulţimea* $A = \{x \in \mathbb{Z} | a - a^2 + 1 \leq x \leq a + a^2 + 1\}$. *Determinaţi cardinalul lui* A *şi suma elementelor din* A.

Ionel Nechifor, Iaşi

Soluţie. Mulţimea A conţine $a^2 - a - 1$ elemente negative, $a^2 + a + 1$ elemente pozitive şi îl conţine şi pe 0, prin urmare $|A| = (a^2 - a - 1) + (a^2 + a + 1) + 1 = 2a^2 + 1$. Când calculăm suma elementelor lui A, cele $a^2 - a - 1$ numere negative se reduc cu primele $a^2 - a - 1$ numere pozitive, deci rămâne de aflat suma $S = (a^2 - a) + (a^2 - a + 1) + \ldots + (a^2 + a + 1)$. Excluzându-l pe $a^2 + a + 1$, cei $2a + 1$ termeni rămaşi sunt simetrici faţă de a^2, aşadar suma lor este $(2a + 1) \cdot a^2$. În final, obţinem că $S = (2a + 1)a^2 + (a^2 + a + 1) = (a + 1)(2a^2 + 1)$.

VI.146. *Se pot împărţi numerele* $1, 2, 3, \ldots, 2012$ *în câteva submulţimi disjuncte astfel încât cel mai mare element al fiecărei submulţimi să fie egal cu produsul celorlalte elemente ale respectivei submulţimi?*

Mihai Crăciun, Paşcani

Soluţie. Dacă o astfel de împărţire ar fi posibilă, produsul elementelor fiecărei submuţimi ar fi egal cu pătratul celui mai mare element al ei, deci 2012! ar fi pătrat perfect. Însă 2012! se divide cu numărul prim 2011 şi nu se divide cu 2011^2, aşadar nu este pătrat perfect. Rezultă că împărţirea cerută în problemă nu este posibilă.

VI.147. *Găsiţi două numere raţionale mai mari decât* 40 *al căror produs să fie* 2012*, fiecare dintre ele având câte o infinitate de zecimale nenule.*

Cristian Lazăr, Iaşi

Soluţie. De exemplu, $2012 = \dfrac{4 \cdot 72}{7} \cdot \dfrac{503 \cdot 7}{72} = 41,(142857) \cdot 48,902(7)$.

VI.148. *Determinaţi fracţiile ireductibile* $\dfrac{a}{b}$ *care se scriu sub formă zecimală ca fracţii periodice, cu zecimala de pe poziţia* b *egală cu* b.

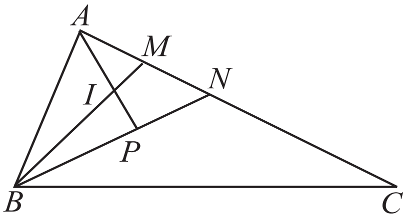
Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Cum b este cifră şi $\dfrac{a}{b}$ fracţie periodică, rezultă că $b \in \{3, 6, 7, 9\}$. Observăm că este suficient să determinăm fracţiile subunitare ireductibile $\dfrac{a_0}{b}$, soluţia generală a problemei fiind $\dfrac{a_0 + nb}{b}$, cu $n \in \mathbb{N}$. Dacă $b = 3$, atunci $a_0 \in \{1, 2\}$; singura soluţie convenabilă este $\dfrac{a_0}{b} = \dfrac{1}{3} = 0,33\mathbf{3}3\ldots$. Dacă $b = 6$, atunci $a_0 \in \{1, 5\}$; singura soluţie convenabilă este $\dfrac{a_0}{b} = \dfrac{1}{6} = 0,16666\mathbf{6}6\ldots$. Dacă $b = 7$, atunci $a_0 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; singura soluţie convenabilă este $\dfrac{a_0}{b} = \dfrac{5}{7} = 0,714285\mathbf{7}142857\ldots$. Dacă $b = 9$, atunci $a_0 \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ şi, cum $\dfrac{a_0}{9} = 0,(a_0)$, cu $a_0 \neq 9$, nu obţinem noi soluţii. În concluzie, $\dfrac{a}{b} \in \{\dfrac{3n+1}{3}, \dfrac{6n+1}{6}, \dfrac{7n+5}{7} | n \in \mathbb{N}\}$.

VI.149. *Se consideră triunghiul* ABC *cu* $m(\widehat{B}) = 3 \cdot m(\widehat{C})$. *Fie* $M, N \in AC$ *astfel încât* $\widehat{ABM} \equiv \widehat{MBN} \equiv \widehat{NBC}$ *şi* $AP \perp BN$, *cu* $P \in BN$; *notăm* $\{I\} = BM \cap AP$. *Demonstraţi că* NI *este bisectoarea unghiului* $\widehat{ANB}$

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

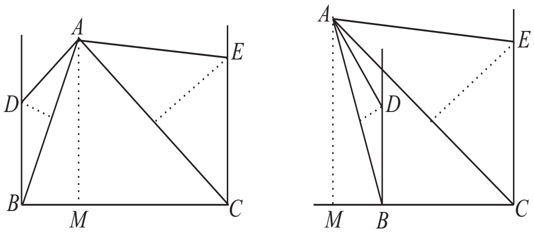
Soluţie. Cum $\widehat{ANB}$ este unghi exterior triunghiului isoscel NBC, rezultă că $m(\widehat{ANB}) = 2 \cdot m(\widehat{C}) = m(\widehat{ABN})$, deci $\triangle ABN$ este isoscel. Înălţimea bazei, AP, va fi şi bisectare, prin urmare I este intersecţia a două bisectoare din $\triangle ABN$. Urmează de aici că NI este bisectoarea unghiului $\widehat{ANB}$.



VI.150. *Fie ABC un triunghi. Notăm cu D punctul de intersecţie dintre perpendiculara în B pe BC şi mediatoarea laturii AB şi cu E punctul de intersecţie dintre perpendiculara în C pe BC şi mediatoarea laturii AC. Dacă $\alpha = m(\widehat{BAC})$, caculaţi $m(\widehat{DAE})$ în funcţie de α.*

Adrian Zanoschi, Iaşi

Soluţie. I. Dacă $\alpha < 90^\circ$, deosebim situaţiile: (i) $\widehat{B}, \widehat{C}$ sunt ascuţite; (ii) $\widehat{B}$ este obtuz; (iii) $\widehat{B}$ este drept. Fie AM înălţimea din A a triunghiului. În cazul (i), avem că $\widehat{BAM} \equiv \widehat{ABD} \equiv \widehat{DAB}$ şi $\widehat{MAC} \equiv \widehat{ACE} \equiv \widehat{EAC}$, deci $m(\widehat{DAE}) = 2 \cdot m(\widehat{BAM}) + 2m(\widehat{CAM}) = 2\alpha$. În cazul (ii), avem că $\widehat{MAB} \equiv \widehat{ABD} \equiv \widehat{DAB}$ şi $\widehat{MAC} \equiv \widehat{ACE} \equiv \widehat{EAC}$, deci $m(\widehat{DAE}) = m(\widehat{BAE}) - m(\widehat{BAD}) = \alpha + m(\widehat{CAE}) - m(\widehat{BAD}) = \alpha + (90^\circ - \widehat{C}) - (\widehat{B} - 90^\circ) = \alpha + (180^\circ - \widehat{B} - \widehat{C}) = 2\alpha$. În cazul (iii), este evident că $m(\widehat{DAE}) = 2\alpha$. La fel se procedează în cazurile: (ii') $\widehat{C}$ este obtuz; (iii') $\widehat{C}$ este drept.



II. Dacă $\alpha = 90^\circ$, atunci $m(\widehat{DAE}) = 180^\circ$.

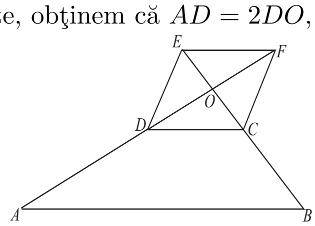
III. Dacă $\alpha > 90^\circ$, atunci $m(\widehat{DAE}) = 360^\circ - 2\alpha$.

Clasa a VII-a

VII.144. *Fie $ABCD$ un trapez cu $AB \| CD$ şi $AB = 3 \cdot CD$. Dacă E şi F sunt simetricele punctelor B şi A faţă de C, respectiv D, arătaţi că $CDEF$ este paralelogram.*

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

Soluţie. Fie $\{O\} = AD \cap BC$; din asemănări imediate, obţinem că $AD = 2DO$, iar $BC = 2CO$. Întrucât $AD = DF$ şi $BC = CE$, rezultă că $OD = OF$ şi $OC = OE$, adică $CDEF$ este paralelogram.



VII.145. *În triunghiul ABC, se consideră mediana AD şi bisectoarea CE. Notăm $\{P\} = AD \cap CE$ şi $\{F\} = PB \cap AC$. Demonstraţi că triunghiul EFC este isoscel.*

Valentina Blendea şi Gheorghe Blendea, Iaşi

Soluţie. Din teorema lui Ceva $\dfrac{AF}{FC} \cdot \dfrac{DC}{BD} \cdot \dfrac{BE}{EA} = 1$, obţinem că $\dfrac{AF}{FC} = \dfrac{EA}{EB}$, prin urmare $EF \| BC$. Rezultă că $\widehat{CEF} \equiv \widehat{ECB}$ (alterne interne); însă $\widehat{ECB} \equiv \widehat{ECF}$, aşadar $\widehat{CEF} \equiv \widehat{ECF}$, adică $\triangle CEF$ este isoscel cu baza CE.

VII.146. *Fie H ortocentrul triunghiului ascuţiunghic ABC şi D, E, F intersecţiile dreptelor AH, BH respectiv CH cu cercul circumscris triunghiului. Ştiind că patrulaterele $HBDC$, $HCEA$ şi $HAFB$ au ariile egale, arătaţi că $\triangle ABC$ este echilateral.*

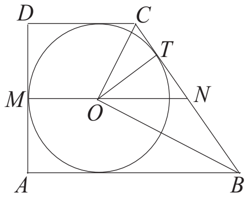
Adriana Dragomir şi Lucian Dragomir, Oţelu-Roşu

Soluţie. Observăm că $\widehat{HBC} \equiv \widehat{DAC}$ (au acelaşi complement $\widehat{C}$) şi că $\widehat{DBC} \equiv \widehat{DAC}$ (subîntind acelaşi arc), aşadar $\widehat{HBC} \equiv \widehat{DBC}$. Analog obţinem că $\widehat{HCB} \equiv \widehat{DCB}$ şi atunci $\triangle HBC \equiv \triangle DBC$ (U.L.U.), prin urmare $\mathcal{A}_{HBDC} = 2 \cdot \mathcal{A}_{HBC}$. Procedăm la fel pentru celelalte patrulatere şi astfel ipoteza $\mathcal{A}_{HBDC} = \mathcal{A}_{HCEA} = \mathcal{A}_{HAFB}$ revine la $\mathcal{A}_{HBC} = \mathcal{A}_{HCA} = \mathcal{A}_{HAB}$. Se ştie însă că singurul punct din interiorul unui triunghi care, unit cu vârfurile, dă naştere la trei triunghiuri echivalente, este centrul de greutate G. Deducem că în triunghiul nostru $H = G$, adică $\triangle ABC$ este echilateral.

VII.147. *Trapezul dreptunghic $ABCD$ ($AB \| CD, AD \perp AB$) este circumscris cercului de centru O. Arătaţi că $\mathcal{A}_{ABCD} < \frac{1}{2}(OB + OC)^2$.*

Daniela Munteanu, Iaşi

Soluţie. Deoarece $m(\widehat{OBC}) + m(\widehat{OCB}) = \frac{1}{2}[m(\widehat{B}) + m(\widehat{C})] = 90°$, avem că $m(\widehat{BOC}) = 90°$, deci $\triangle OBC$ este dreptunghic în O. Notăm $OB = x$, $OC = y$; atunci raza cercului este egală cu înălţimea OT a triunghiului OBC, adică $r = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Fie MN linia mijlocie a trapezului. Avem că $MN = OM + ON = r + \frac{1}{2}BC = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{(x+y)^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}$. Astfel, inegalitatea de demonstrat se rescrie succesiv:



$$\mathcal{A}_{ABCD} < \frac{1}{2}(OB + OC)^2 \Leftrightarrow 2MN \cdot AD < (OB + OC)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{2(x+y)^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} < (x+y)^2 \Leftrightarrow 2xy < x^2 + y^2 \Leftrightarrow (x-y)^2 > 0.$$

Evident că $(x-y)^2 \geq 0$ şi, cum $ABCD$ este trapez, atunci $x \neq y$. Rezultă că $(x-y)^2 > 0$ şi soluţia problemei este completă.

VII.148. *Rezolvaţi în numere întregi ecuaţia $x(x+4) = 5(3^y - 1)$.*

Neculai Stanciu, Buzău

Soluţie. Întrucât $x \in \mathbb{Z}$ şi $(3,5) = 1$, rezultă că $y \in \mathbb{N}$. Dacă $y \in \mathbb{N}^*$, obţinem că $3 \big| x(x+4) + 5$, adică $3 \big| (x+2)^2 + 1$; acest fapt nu este posibil, deoarece $(x+2)^2$ nu poate fi de forma $M_3 + 2$. Rămâne că $y = 0$, deci $x^2 + 4x = 0$, cu soluţiile $x_1 = 0$ şi $x_2 = -4$. În final, $(x,y) \in \{(0,0); (-4,0)\}$.

VII.149. *Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi $a = 2^{n^3-n+2}$, $b = 5^{8n^3-2n+2}$. Arătaţi că produsul $a \cdot b$ se poate scrie ca sumă de patru cuburi perfecte nenule.*

Constantin Dragomir, Piteşti

Soluţie. Avem că $a\cdot b=10^2\cdot 2^{(n-1)n(n+1)}5^{(2n-1)2n(2n+1)}$. Cum $(n-1)n(n+1)=3p$, $(2n-1)2n(2n+1)=3q$, cu $p,q\in\mathbb{N}^*$, iar $10^2=1^3+2^3+3^3+4^3$, rezultă că $a\cdot b=(2^p\cdot 5^q)^3+(2^{p+1}\cdot 5^q)^3+(3\cdot 2^p\cdot 5^q)^3+(2^{p+2}\cdot 5^q)^3$.

VII.150. *Fie x,y numere reale strict pozitive cu $x>y$. Demonstraţi că $x^2+y^2\geq 2\sqrt{xy\cdot(x^2-y^2)}$ şi interpretaţi geometric rezultatul.*

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

Soluţie. Inegalitatea din enunţ este echivalentă cu $(x^2-xy-y^2)^2\geq 0$, care este evident adevărată pentru $x,y\in(0,\infty)$. Scrisă sub forma $\dfrac{x^2+y^2}{2}\geq\dfrac{2xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$, relaţia din enunţ arată că mediana ipotenuzei triunghiului dreptunghic de laturi x^2-y^2, $2xy$ şi x^2+y^2 este cel puţin egală cu înălţimea ipotenuzei. Egalitatea se atinge atunci când $x=(1+\sqrt{2})y$.

Clasa a VIII-a

VIII.144. *Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub şi $VA'B'C'D'$ o piramidă patrulateră regulată cu toate muchiile egale şi vârful V în exteriorul cubului. Aflaţi sinusul unghiului dintre dreapta $A'C$ şi planul $(VA'B')$.*

Mirela Marin, Iaşi

Soluţie. Notăm cu O' centrul pătratului $A'B'C'D'$ şi fie T proiecţia lui O' pe apotema VM, unde M este mijlocul lui $A'B'$. Ducem $O'P\|A'C$, cu $P\in VA'$; atunci $\measuredangle(A'C,(VA'B'))=\measuredangle(O'P,(VA'B'))=\measuredangle(O'P,Pr_{(VA'B')}O'P)=\measuredangle(O'P,TP)=\widehat{O'PT}$. Dacă Q este centrul cubului, din $\triangle VPO'\sim\triangle VA'Q$ obţinem că $O'P=\dfrac{VO'\cdot A'Q}{VQ}=\dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}+\frac{a}{2}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2(1+\sqrt{2})}$, unde a este muchia cubului. Apoi, $O'T$ este înălţime în triunghiul dreptunghic $VO'M$, prin urmare $O'T=\dfrac{VO'\cdot O'M}{VM}=\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. În concluzie, $\sin(\widehat{O'PT})=\dfrac{O'T}{O'P}=\dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$.

VIII.145. *Fie $a\in(1,\infty)$ şi $x_1,x_2,\ldots,x_n$ numere reale astfel încât $x_1+x_2+\ldots+x_n=a+n-1$ şi $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=a^2+n-1$. Determinaţi cea mai mare valoare posibilă a lui x_n.*

Lucian Tuţescu, Craiova şi Dumitru Săvulescu, Bucureşti

Soluţie. Observăm că $(x_1-1)^2+(x_2-1)^2+\ldots+(x_n-1)^2=(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)-2(x_1+x_2+\ldots+x_n)+n=a^2+n-1-2(a+n-1)+n=(a-1)^2$. Atunci $(x_n-1)^2\leq(a-1)^2$, de unde $x_n\leq a$. Cea mai mare valoare căutată este $x_n=a$, atinsă când $x_1=\ldots=x_{n-1}=1$.

VIII.146. *Rezolvaţi în $\mathbb{R}^2$ sistemul* $\begin{cases}x^2-xy=3\\ 48x^2+4xy(x+1)^2=(x+1)^4\end{cases}$.

Vasile Chiriac, Bacău

Soluţie. Înmulţim prima ecuaţie a sistemului cu $4(x+1)^2$ şi o adunăm la cea de-a doua; efectuând calculele, ajungem la $(3x+1)(x-1)(x^2+2x+13)=0$. Soluţiile sistemului sunt $(1,-2)$ şi $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{26}{3}\right)$.

VIII.147. *Determinaţi bazele de numeraţie $x \in \mathbb{N} \backslash \{0,1\}$ pentru care numărul $N = 11111_{(x)}$ este pătrat perfect.*

Cătălin Calistru, Iaşi

Soluţie. Observăm că $\left(x^2 + \frac{1}{2}x\right)^2 < N = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 < \left(x^2 + \frac{1}{2}x + 1\right)^2$. Dacă x ar fi număr par, atunci $a = \left(x^2 + \frac{1}{2}x\right)^2$ şi $b = \left(x^2 + \frac{1}{2}x + 1\right)^2$ ar fi pătrate perfecte consecutive, prin urmare N nu va putea fi pătrat perfect. Dacă x este impar, atunci N este pătrat perfect dacă şi numai dacă $N = \left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)^2$. Efectuând calculele, obţinem unica soluţie acceptabilă $x = 3$.

VIII.148. *Stabiliţi câte submulţimi $\{a,b\}$ ale mulţimii $A = \{1,2,3,\ldots,100\}$ au proprietatea că $a^3 + b^3$ se divide cu 12.*

Dorel Luchian, Iaşi

Soluţie. Dacă $a \equiv r \pmod{12}$ şi $a^3 \equiv r' \pmod{12}$, între resturile r şi r' există următoarea corespondenţă:

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
r'	0	1	8	3	4	5	0	7	8	9	4	11

Fie r_1 şi r_2 resturile modulo 12 ale numerelor a, b cu proprietatea că $a^3 + b^3 \vdots 12$; presupunând că $r_1 \leq r_2$, vom avea că $(r_1, r_2) \in \{(0,0);(0;6);(6,6);(1,11);(2;4);(2,10);(4,8);(8,10);(3,9);(5,7)\}$. Cum A conţine 8 multipli de 12, există $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ de submulţimi $\{a,b\}$ corespunzătoare situaţiei $(r_1, r_2) = (0,0)$. Apoi, vom avea $8 \cdot 8 = 64$ submulţimi $\{a,b\}$ pentru $(r_1, r_2) = (0,6)$; $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ submulţimi când $(r_1, r_2) = (6,6)$; $9 \cdot 8 = 72$ submulţimi dacă $(r_1, r_2) = (1,11)$ etc. În total, obţinem $28 + 64 + 28 + 72 + 81 + 72 + 72 + 64 + 72 + 64 = 617$ submulţimi cu proprietatea din enunţ.

VIII.149. *Demonstraţi că $abc(a+b+c)^2 \leq 3(a^5 + b^5 + c^5)$, $\forall a,b,c \in \mathbb{R}_+^*$.*

Gheorghe Struţu şi Adrian Stan, Buzău

Soluţie. Folosind inegalitatea $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$, $\forall a,b,c \in \mathbb{R}_+^*$, rămâne să arătăm că $a^3bc + ab^3c + abc^3 \leq a^5 + b^5 + c^5$, fapt care rezultă din inegalitatea rearanjărilor.

VIII.150. *Determinaţi mulţimea $A = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{x}{x^4 - x^3 + 1} \in \mathbb{Z}\right\}$.*

Elena Iurea, Iaşi

Soluţie. Evident că $0 \in A$. Fie $x \in A \cap (0,\infty)$. Cum $x^4 - x^3 + 1 > 0$ ($x \in (0,1) \Rightarrow x^4 - x^3 + 1 = x^4 + (1 - x^3) > 0$; $x \in [1,\infty) \Rightarrow x^4 - x^3 + 1 = x^3(x-1) + 1 > 0$) rezultă că $\frac{x}{x^4 - x^3 + 1} \in \mathbb{N}^*$, deci $\frac{x}{x^4 - x^3 + 1} \geq 1$. Atunci $x^4 - x^3 - x + 1 \leq 0$, adică $(x-1)^2(x^2 + x + 1) \leq 0$, prin urmare $x = 1$; se verifică faptul că $1 \in A$.

Fie acum $x \in A \cap (-\infty, 0)$; pentru $t = -x$, avem că $\frac{t}{t^4 + t^3 + 1} \in \mathbb{Z}$, cu $t \in (0,\infty)$. Deoarece $\frac{t}{t^4 + t^3 + 1} > 0$, rezultă că $\frac{t}{t^4 + t^3 + 1} \geq 1$, deci $t^4 + t^3 - t + 1 \leq 0$. Acest lucru este însă imposibil: dacă $t \in (0,1)$, atunci $t^4+t^3-t+1 = t^4+t^3+(1-t) > 0$, iar dacă $t \in [1,\infty)$, atunci $t^4+t^3-t+1 = t^4+1+t(t^2-1) > 0$. În concluzie, $A = \{0,1\}$.

Clasa a IX-a

IX.126. *În triunghiul ABC notăm cu O centrul cercului circumscris şi cu O' centrul cercului circumscris triunghiului median MNP. Atrătaţi că $\overrightarrow{O'O} = \overrightarrow{O'A} + \overrightarrow{O'B} + \overrightarrow{O'C}$.*

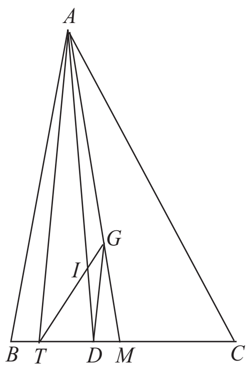
Ion Pătraşcu, Craiova

Soluţie. Punctul O' este, de fapt, centrul cercului celor nouă puncte asociat $\triangle ABC$, adică O' este mijlocul segmentului OH (unde H este ortocentrul triunghiului). Ţinând seama de relaţia lui Sylvester, obţinem că $\overrightarrow{O'A} + \overrightarrow{O'B} + \overrightarrow{O'C} = (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{O'O} + 2\overrightarrow{O'O} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{O'O}$.

IX.127. *Fie ABC un triunghi cu $AB \neq AC$, I centrul cercului înscris, G centrul de greutate, $\{D\} = AI \cap BC$ şi $\{T\} = IG \cap BC$. Demonstraţi că $GD \| AT$ dacă şi numai dacă $3a = b + c$. (A se vedea şi articolul din RecMat–2/2011, pag. 132-133.)*

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Fie M mijlocul laturii BC. Folosind teorema bisectoarei şi teorema lui Van Aubel, obţinem că $\dfrac{AI}{ID} = \dfrac{b+c}{a}$. Aplicând acum teorema lui Menelaus în $\triangle ADM$ cu transversala $T-I-G$, deducem că $\dfrac{TD}{TM} \cdot \dfrac{GM}{GA} \cdot \dfrac{IA}{ID} = 1$, deci $\dfrac{TD}{TM} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{b+c}{a} = 1$, prin urmare $\dfrac{TD}{TM} = \dfrac{2a}{b+c}$. În aceste condiţii, $GD \| AT \Leftrightarrow \dfrac{TD}{TM} = \dfrac{AG}{AM} \Leftrightarrow \dfrac{2a}{b+c} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow b + c = 3a$, adică are loc echivalenţa dorită.



IX.128. *Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numere reale pozitive cu suma egală cu n. Demonstraţi că $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2(x_i + n) \geq n^2 + n$.*

Ion Nedelcu, Ploieşti şi Lucian Tuţescu, Craiova

Soluţie. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$; atunci $x_1^2 \geq x_2^2 \geq \ldots \geq x_n^2$ şi $x_1 + n \geq x_n + n \geq \ldots \geq x_n + n$. Conform inegalităţii lui Cebîşev, deducem că $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2(x_i+n) \geq \dfrac{1}{n}(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2)(\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i+n)) = (n+1)(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2)$ şi ar fi suficient să mai demonstam că $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \geq n$. Această ultimă inegalitate rezultă din $C-B-S$: $(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2)(\sum\limits_{i=1}^{n} 1^2) \geq (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)^2 \Leftrightarrow n(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2) \geq n^2 \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \geq n$.

IX.129. *Fie a, b, c numere reale pozitive cu $a \leq b \leq 24000$ şi $\sqrt{a+2012} + \sqrt{b+2012} = 2\sqrt{c+2012}$. Determinaţi partea întreagă a numărului $\dfrac{a+b}{c}$.*

Ionel Tudor, Călugăreni (Giurgiu)

Soluţie. Vom demonstra că $2 \leq \dfrac{a+b}{c} < 3$, deci $\left[\dfrac{a+b}{c}\right] = 2$. Avem:

$$\begin{aligned}
&2c \leq a+b \Leftrightarrow 4c + 4\cdot 2012 \leq 2(a+b) + 4\cdot 2012 \Leftrightarrow \\
&\quad\Leftrightarrow (\sqrt{a+2012} + \sqrt{b+2012})^2 \leq 2(a+b) + 4\cdot 2012 \Leftrightarrow \\
&\quad\Leftrightarrow 2\sqrt{(a+2012)(b+2012)} \leq a+b+2\cdot 2012,
\end{aligned}$$

fapt care rezultă din inegalitatea mediilor. Apoi, folosindu-ne de egalitatea din enunţ pentru a-l înlocui pe c, obţinem:

$$\begin{aligned}
&a+b < 3c \Leftrightarrow \frac{3}{4}(a+b-2\cdot 2012 + 2\sqrt{(a+2012)(b+2012)}) > a+b \Leftrightarrow \\
&\quad\Leftrightarrow 6\sqrt{(a+2012)(b+2012)} > a+b+6\cdot 2012 \Leftrightarrow \\
&\quad\Leftrightarrow 36(p + 2012s + 2012^2) > s^2 + 12\cdot 2012s + 36\cdot 2012^2 \Leftrightarrow \\
&\quad\Leftrightarrow s^2 - 36p < 24\cdot 2012s,
\end{aligned}$$

unde $s = a+b$, $p = a\cdot b$. Această ultimă inegalitate este însă evident adevărată, întrucât $s \leq 48000 < 24\cdot 2012$, de unde $s^2 - 36p < s^2 < 24\cdot 2012\cdot s$.

IX.130. *Rezolvaţi în numere naturale ecuaţia* $2^a + 1 = 3b^2$.

Adrian Zanoschi, Iaşi

Soluţie. Dacă $a = 2n$, $n \in \mathbb{N}$, atunci $2^a + 1 = 4^n + 1 = M_3 + 2$ şi $3b^2 = M_3$, deci egalitatea din enunţ nu poate avea loc. Dacă $a = 2n+1$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $2^a + 1 = 2^{2n+1} + 1 = (2+1)(2^{2n} - 2^{2n-1} + \ldots + 2^2 - 2 + 1) = 3(M_4 - 1)$ şi deducem că $b^2 = M_4 - 1$, fals. În sfârşit, dacă $a = 1$, obţinem că $b = 1$, deci unica soluţie a ecuaţiei date este $(1,1)$.

Clasa a X-a

X.126. *Fie* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $ab + bc + ca \geq 0$. *Demonstraţi că* $|a+bi| + |b+ci| + |c+ai| \geq \sqrt{6(ab+bc+ca)}$.

Ovidiu Pop, Satu Mare

Soluţie. Din inegalitatea modulului obţinem că $|a+bi| + |b+ci| + |c+ai| \geq |(a+bi) + (b+ci) + (c+ai)| = |a+b+c|\cdot|1+i| = \sqrt{2}|a+b+c|$. Se verifică imediat inegalitatea $|a+b+c| \geq \sqrt{3(ab+bc+ca)}$ şi de aici rezultă cerinţa problemei.

X.127. *Dacă* $a, b, c \in (1, \infty)$, *demonstraţi că are loc inegalitatea*

$$\frac{(\log_a \frac{a}{b})^2}{\log_a ab} + \frac{(\log_a \frac{a}{c})^2}{\log_a ac} + \frac{(\log_a bc)^2}{\log_a \frac{a^2}{bc}} \geq 1.$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

Soluţie. Cu notaţiile $\log_a b = x$, $\log_a c = y$, cu $x, y > 0$, inegalitatea de demonstrat devine $\dfrac{(1-x)^2}{1+x} + \dfrac{(1-y)^2}{1+y} + \dfrac{(x+y)^2}{2-x-y} \geq 1$. Această relaţie rezultă din inegalitatea lui Bergström:

$$\frac{(1-x)^2}{1+x} + \frac{(1-y)^2}{1+y} + \frac{(x+y)^2}{2-x-y} \geq \frac{(1-x+1-y+x+y)^2}{1+x+1+y+2-x-y} = \frac{4}{4} = 1.$$

X.128. *În raport cu reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(a,b)$, $0<a<b$.*

a) Arătaţi că există o infinitate de puncte B, cu ambele coordonate strict pozitive, pentru care $\min_{M\in Oy}(MA+MB)=\min_{N\in Ox}(NA+NB)$.

b) Expuneţi un procedeu de obţinere a punctelor B folosind doar rigla şi compasul.

Cecilia Deaconescu, Piteşti

Soluţie. Considerăm $B(c,d)$ cu proprietatea că $\min\limits_{M\in Oy}(MA+MB)=\min\limits_{N\in Ox}(NA+NB)$. Fie $A'(-a,b)$ simetricul lui A faţă de Oy şi $B'(c,-d)$ simetricul lui B faţă de Ox. Notăm $\{P\}=A'B\cap Oy$, $\{Q\}=AB'\cap Ox$; ca în *problema biliardului* se arată că $\min\limits_{M\in Oy}(MA+MB)=PA+PB=A'B$, iar $\min\limits_{N\in Ox}(NA+NB)=QA+QB=AB'$ şi astfel condiţia din problemă revine la $A'B=AB'$. Însă $A'B=AB'\Leftrightarrow\sqrt{(c+a)^2+(d-b)^2}=\sqrt{(c-a)^2+(-d-b)^2}\Leftrightarrow ac=bd\Leftrightarrow\dfrac{d}{c}=\dfrac{a}{b}\Leftrightarrow \operatorname{tg}\widehat{BOx}=\operatorname{ctg}\widehat{AOx}\Leftrightarrow\widehat{BOx}=\dfrac{\pi}{2}-\widehat{AOx}\Leftrightarrow$ semidreptele $(OA$ şi $(OB$ sunt simetrice faţă de bisectoarea unghiului $\widehat{xOy}$. Astfel, rezultă că există o infinitate de puncte B cu proprietatea dorită.

b) Trasăm bisectoarea unghiului $\widehat{xOy}$, determinăm simetricul A_1 al lui A faţă de această bisectoare şi apoi desenăm semidreapta $(OA_1$; toate aceste construcţii pot fi realizate folosind doar rigla şi compasul.

X.129. *Fie z_1,z_2,z_3 numere complexe distincte de modul 1. Arătaţi că*

$$\frac{(z_1+z_2)^4}{(z_1z_2)^2}+\frac{(z_2+z_3)^4}{(z_2z_3)^2}+\frac{(z_3+z_1)^4)}{(z_3z_1)^2}\geq 3.$$

Florin Stănescu, Găeşti

Soluţie. Vom folosi metode din nota *Aplicaţii ale numerelor complexe în geometria triunghiului*, publicată de autorul problemei în *RecMat 1/2012*. Acolo s-a arătat că $\dfrac{(z_2+z_3)^2}{4z_2z_3}=\cos^2 A$, deci $\dfrac{(z_2+z_3)^4}{16z_2^2z_3^2}=\cos^4 A$; rezultă că inegalitatea din enunţ se poate scrie sub forma $\cos^4 A+\cos^4 B+\cos^4 C\geq\dfrac{3}{16}$. Această inegalitate se demonstrează folosind $C-B-S$ şi cunoscuta $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\geq\dfrac{3}{4}$.

X.130. *Fie $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$; arătaţi că ecuaţia $x^4+4x^3+(4-4\sin\alpha-2\sin^2\alpha)x^2-(8\sin\alpha+4\sin^2\alpha)x+(4\sin^2\alpha+4\sin^3\alpha+\sin^4\alpha)=0$ are toate soluţiile reale.*

Ionel Tudor, Călugăreni (Giurgiu)

Soluţie. Termenul liber fiind nenul pentru $\alpha\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, rezultă că $x=0$ nu este soluţie a ecuaţiei; putem atunci împărţi ecuaţia prin x^2, obţinând $x^2+\dfrac{(2\sin\alpha+\sin^2\alpha)^2}{x^2}+4\left(x-\dfrac{2\sin\alpha+\sin^2\alpha}{x}\right)+(4-4\sin\alpha-2\sin^2\alpha)=0$. Cu notaţia $x-\dfrac{2\sin\alpha+\sin^2\alpha}{x}=y$, găsim ecuaţia rezolventă $y^2+4y+4=0$, cu soluţia dublă $y_1=y_2=-2$. Apoi, $x^2+2x-(2\sin\alpha+\sin^2\alpha)=0$, adică $(x+1)^2=(1+\sin\alpha)^2$, prin urmare soluţiile ecuaţiei din enunţ sunt $x_1=x_2=\sin\alpha$, $x_3=x_4=-2\sin\alpha$.

Clasa a XI-a

Notă. Dl. **Moubinool Omarjee** (Paris) observă că exemplul prezentat în soluţia *Problemei XI.122* din *RecMat 1/2012*, pag. 59, nu este corect. Se poate construi un exemplu bun folosind blocuri pătratice de ordin 2 sau 3 pe diagonala principală.

XI.126. *Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice cu proprietatea că $A^4 + (A + I_n)^4 = O_n$. Demonstraţi că matricea $A^2 + A + I_n$ este inversabilă.*

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

Soluţie. Efectuând calculele, relaţia din enunţ revine la $2(A^4+2A^3+3A^2+2A+I_n) = I_n$, adică $2(A^2+A+I_n)^2 = I_n$. Rezultă că A^2+A+I_n este matrice inversabilă, cu inversa $2(A^2 + A + I_n)$.

XI.127. *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un şir de numere din intervalul $(0,1)$ şi $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şirul lui Fibonacci ($F_1 = F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$). Arătaţi că*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{F_k}{x_k(1-x_k^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}(F_{n+2} - 1),\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

Soluţie. Studiind variaţia funcţiei $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x(1-x^2)}$, constatăm că $x_0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ este punct de minim; rezultă că $\dfrac{1}{x(1-x^2)} \geq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, $\forall x \in (0,1)$. Atunci $\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)F_k \geq \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \sum\limits_{k=1}^{n}(F_{k+2} - F_{k+1}) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}(F_{n+2} - 1)$.

XI.128. *Studiaţi convergenţa şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{x_n}{x_n + a}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, unde $a, x_0 \in (0,\infty)$ sunt date.*

Adrian Corduneanu, Iaşi

Soluţie. Se observă că $x_n \in (0,1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, deci şirul (x_n) este mărginit. Întrucât

$$x_{n+1} - x_n = \frac{a(x_n - x_{n-1})}{(x_n + a)(x_{n-1} + a)\left(\sqrt{\frac{x_n}{x_n+a}} + \sqrt{\frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+a}}\right)},$$

rezultă că (x_n) este strict crescător dacă $x_1 > x_0$, constant dacă $x_1 = x_0$ şi strict descrescător dacă $x_1 < x_0$. În concluzie, şirul dat este convergent. Se constată că, în fiecare dintre cazurile de mai sus, $\lim\limits_{u\to\infty} x_n = \dfrac{1}{2}(\sqrt{a^2+4} - a)$.

XI.129. *Determinaţi cel mai mic număr real α pentru care $\operatorname{tg} x \geq 4\sin x - \alpha$, $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. (În legătură cu problema IX.109. din RecMat–1/2010.)*

Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Studiem variaţia funcţiei $f : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x - 4\sin x + \alpha$. Avem că $f'(x) = \dfrac{1 - 4\cos^3 x}{\cos^2 x}$, care se anulează doar în $x_0 = \arccos \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$, este negativă pe $[0, x_0)$ şi pozitivă pe $(x_0, \dfrac{\pi}{2})$. Rezultă că f are un minim în x_0, valoarea minimă fiind $f(x_0) = \alpha - (4 - \sqrt[3]{4})\sqrt{1 - \frac{1}{2\sqrt[3]{4}}}$. Astfel, valoarea minimă a lui α pentru care $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ este $\alpha = (4 - \sqrt[3]{4})\sqrt{1 - \frac{1}{2\sqrt[3]{4}}}$.

Cu ajutorul unui calculator, obţinem $\alpha \simeq 1,99681$, valoarea extrem de apropiată de $\alpha = 2$, care apare în enunţul problemei IX.109.

XI.130. *Se consideră numerele reale* $1 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < e^2$ *astfel încât* $\sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{x_i} = n\sqrt{e}$ *şi* $\prod\limits_{i=1}^{n} x_i = e^n$. *Arătaţi că* $ex_n \ln^2 x_1 < x_1 x_n < ex_1 \ln^2 x_n$.

Mihai Haivas, Iaşi

Soluţie. Considerăm funcţia $f : (1, e^2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, care este strict crescătoare; rezultă că $\frac{\ln x_1}{\sqrt{x_1}} < \frac{\ln x_2}{\sqrt{x_2}} < \ldots < \frac{\ln x_n}{\sqrt{x_n}}$. Conform unei inegalităţi uzuale, deducem că $\frac{\ln x_1}{\sqrt{x_1}} < \frac{\ln x_1 x_2 \ldots x_n}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \ldots + \sqrt{x_n}} < \frac{\ln x_n}{\sqrt{x_n}}$. Folosind ipotezele problemei, obţinem că $\frac{\ln x_1}{\sqrt{x_1}} < \frac{n}{n\sqrt{e}} < \frac{\ln x_n}{\sqrt{x_n}}$, de unde inegalitatea cerută.

Clasa a XII-a

XII.126. *Calculaţi* $I = \int \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{5x^2 - (x^2 - x + 1)^2}} dx$, $x \in [1, 2]$.

Constantin Dragomir, Piteşti

Soluţie. Pentru început, observăm că expresia de sub radical este strict pozitivă pentru $x \in [1, 2]$. Avem că $5x^2 - (x^2 - x + 1)^2 = -x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x - 1 = x^2\left[-\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2\right] = x^2\left[-\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4\right]$. Cu substituţia $x + \frac{1}{x} = t$, calculul integralei din enunţ revine la $\int \frac{1}{\sqrt{-t^2 + 2t + 4}} dt = \int \frac{1}{\sqrt{5 - (t-1)^2}} dt = \arcsin \frac{t-1}{\sqrt{5}}$. În concluzie, $I = \arcsin \frac{x^2 - x + 1}{x\sqrt{5}} + \mathcal{C}$, $x \in [1, 2]$.

XII.127. *Calculaţi* $I = \int_{1/2}^{2} \left(1 + x + \frac{1}{x}\right) e^{x - \frac{1}{x}} dx$.

Adrian Corduneanu, Iaşi

Soluţie. Întrucât $(e^{x-\frac{1}{x}})' = \frac{x^2+1}{x^2} \cdot e^{x - \frac{1}{x}}$, rezultă că $\left(1 + x + \frac{1}{x}\right) e^{x - \frac{1}{x}} = \left(1 + x\frac{x^2+1}{x^2}\right) e^{x-\frac{1}{x}} = e^{x-\frac{1}{x}} + x(e^{x-\frac{1}{x}})' = (x \cdot e^{x-\frac{1}{x}})'$. În aceste condiţii, $I = x \cdot e^{x - \frac{1}{x}}\Big|_{1/2}^{2} = 2e^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}}$.

XII.128. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *o funcţie de două ori derivabilă, cu* $f''(x) < 0$, $\forall x \in$

$[a, a+c]$. *Demonstraţi că*

$$\int_0^{2c} f(x)dx + 2cf(2a) \leq 4\int_a^{a+c} f(x)dx.$$

Mihai Haivas, Iaşi şi I.V. Maftei, Bucureşti

Soluţie. Pe intervalul $[a, a+c]$ funcţia f este concavă, prin urmare $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, $\forall x_1, x_2 \in [a, a+c]$. Atunci, cum f este integrabilă, avem:

$$\int_a^{a+c} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{c}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{c\cdot k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{c}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2a+\frac{2ck}{n}}{2}\right) \geq$$

$$\geq \lim_{n\to\infty} \frac{c}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left[f(2a) + f\left(\frac{2ck}{n}\right)\right] = \frac{c}{2}f(2a) + \frac{1}{4}\int_0^{2c} f(x)dx,$$

de unde concluzia problemei.

XII.129. *Fie $m, p \in \mathbb{N}$, cu $m \geq 2$ şi p număr prim. Demonstraţi că există un grup finit G care are p^{m^2} elemente, în care fiecare element diferit de elementul neutru are ordinul p.*

Constantin Şcheau, Ploieşti

Soluţie. Se verifică uşor că $(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_p), +)$ este un grup care are proprietăţile dorite.

XII.130. *Determinaţi perechile de polinoame de gradul doi, cu coeficienţii reali şi unitare, ce verifică condiţia că rădăcinile unuia sunt coeficienţii celuilalt (se au în vedere coeficienţii lui X şi X^0). Indicaţi polinoamele de acest fel care intră în pereche cu ele însele.*

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Conform relaţiilor lui Viète, $P(X) = X^2 + p_1X + p_2$ şi $Q(X) = X^2 + q_1X + q_2$ formează o pereche ce îndeplineşte condiţiile din enunţul problemei dacă

$$(1) \qquad p_1 + p_2 = -q_1,\ \ p_1p_2 = q_2,\ \ q_1 + q_2 = -p_1,\ \ q_1q_2 = p_2.$$

Combinând prima şi a treia ecuaţie ale sistemului (1), avem $(p_1+p_2)(q_1+q_2) = p_1q_1 \Leftrightarrow p_2q_1 + q_2(p_1+p_2) = 0 \Leftrightarrow p_2q_1 - q_1q_2 = 0 \Leftrightarrow q_1(p_2 - q_2) = 0$.

Cazul $q_1 = 0$. Sistemul (1) are soluţia $p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = 0$, adică obţinem perechea de polinoame $P(X) = X^2$ şi $Q(X) = X^2$.

Cazul $p_2 = q_2$. A doua ecuaţie a sistemului (1) se va scrie $p_2(p_1 - 1) = 0$ şi vom distinge două subcazuri. Dacă $p_2 = 0$, deci şi $q_2 = 0$, (1) revine la ecuaţia $p_1 = -q_1$, ceea ce conduce la perechile de polinoame $P(X) = X^2 + pX$ şi $Q(X) = X^2 - pX$, $p \in \mathbb{R}$. Dacă $p_1 = 1$, sistemul (1) revine la $1 + p_2 = -q_1$, $q_1 + p_2 = -1$, $q_1p_2 = p_2$. Cum $p_2 \neq 0$, rezultă $q_1 = 1$. Singura ecuaţie ce rămâne, $1 + p_2 = -1$, ne dă $p_2 = -2$. Ca urmare, avem o singură soluţie $p_1 = q_1 = 1$, $p_2 = q_2 = -2$, adică o pereche de polinoame, date de $P(X) = Q(X) = X^2 + X - 2$.

În concluzie, răspund la cerinţele problemei perechile de polinoame: $P(X) = X^2 + pX$ şi $Q(X) = X^2 - pX$, $p \in \mathbb{R}$, precum şi $P(X) = Q(X) = X^2 + X - 2$. Există numai două polinoame ce intră în pereche cu ele însele: $P(X) = X^2$ şi $P(X) = X^2 + X - 2$.