Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor propuse în nr. 1/2011

A. Nivel gimnazial

G196. *Fie M mulţimea numerelor naturale nenule scrise numai cu cifre pare, care au cel mult* 2011 *cifre. Arătaţi că suma inverselor elementelor lui M este mai mică decât* 4.

Cecilia Deaconescu, Piteşti

Soluţie. Pentru fiecare $n \in \{1, 2, \ldots, 2011\}$, mulţimea M conţine $4 \cdot 5^{n-1}$ elemente care se scriu cu n cifre pare şi orice astfel de element este cel puţin egal cu $\overline{2\underbrace{0\ldots0}_{n-1 \text{ de } 0}} = 2 \cdot 10^{n-1}$. Notând cu S_n suma inverselor numerelor de n cifre din M, avem că $S_n < 4 \cdot 5^{n-1} \cdot \dfrac{1}{2 \cdot 10^{n-1}} = \dfrac{1}{2^{n-2}}$. Atunci $\sum\limits_{x \in M} \dfrac{1}{x} = \sum\limits_{n=1}^{2011} S_n < \sum\limits_{n=1}^{2011} \dfrac{1}{2^{n-2}} = 4\left(1 - \dfrac{1}{2^{2011}}\right) < 4$, ceea ce încheie rezolvarea.

G197. *Determinaţi cea mai mare putere a lui* 3 *care divide numărul* $N = 16^{2011} - 2 \cdot 8^{2011} + 3 \cdot 4^{2011} - 2 \cdot 2^{2011} + 1$.

Pedro H.O. Pantoja, Brazil

Soluţie. Cum $2^9 = -1 (\bmod 27)$ şi $2011 = 223 \cdot 9 + 4$, atunci $2^{2011} = (2^9)^{223} \cdot 2^4 \equiv -16 \equiv 11 (\bmod 27)$, deci $4^{2011} \equiv 121 \equiv 13 (\bmod 27)$, $8^{2011} \equiv 13 \cdot 11 \equiv 8 (\bmod 27)$, iar $16^{2011} \equiv 13^2 \equiv 7 (\bmod 27)$. Rezultă că $N \equiv 7 - 2 \cdot 8 + 3 \cdot 13 - 2 \cdot 11 + 1 \equiv 9 (\bmod 27)$, prin urmare $N = 27k + 9$, $k \in \mathbb{N}$. Astfel, N se divide cu 3^2, dar nu cu 3^3, adică cea mai mare putere a lui 3 care divide pe N este 3^2.

G198. *Rezolvaţi în numere naturale ecuaţia* $6^n + 2800 = m^6$.

Andrei Eckstein, Timişoara

Soluţie. Deoarece $6^n = (7-1)^n = M_7 + (-1)^n$, $2800 = M_7$ şi orice pătrat perfect dă la împărţire prin 7 unul dintre resturile $0, 1, 2$ sau 4, deducem că n este număr par, deci $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Ecuaţia devine $(m^3 - 6^k)(m^3 + 6^k) = 2800$, de unde $6^k \leq 2800$, adică $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Înlocuind în ecuaţia iniţială, obţinem că $m^6 \in \{2801, 2836, 4096, 49456, 1682416\}$ şi convine doar varianta $m^6 = 4096 = 4^6$. În concluzie, unica soluţie a ecuaţiei date este $m = n = 4$.

G199. *Determinaţi $b \in \mathbb{N}^*$ pentru care există $a \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a^2 + ab + b^2$ să fie pătrat perfect.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$ pentru care $a^2 + ab + b^2 - p^2 = 0$, cu $p \in \mathbb{N}^*$; atunci $\Delta = 4p^2 - 3b^2 = q^2$, cu $q \in \mathbb{N}$, prin urmare $3b^2 = (2p - q)(2p + q)$, cu $p, q \in \mathbb{N}$. În cazul în care $b = 2t + 1$, $t \in \mathbb{N}^*$, scrierea precedentă este posibilă alegând, de exemplu, $2p - q = 1$, $2p + q = 3b^2$, adică $p = 3t^2 + 3t + 1$ şi $q = 6t^2 + 6t + 1$. Rezultă că pentru orice $b \geq 3$ impar, $b = 2t + 1$, $t \in \mathbb{N}^*$, există $a = 3t^2 + 2t$ astfel încât $a^2 + ab + b^2$ să fie pătrat perfect. Procedând analog, pentru $b = 4t$, $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 2$, găsim (de exemplu) $a = 3t^2 - 2t - 1$, iar pentru $b = 4t + 2$, $t \in \mathbb{N}^*$, găsim $a = 6t^2 + 4t$ astfel încât să fie îndeplinită cerinţa problemei.

Dacă $b = 1$, atunci $a^2 + ab + b^2 = a^2 + a + 1$ nu este pătrat când $a \in \mathbb{N}^*$, întrucât $a^2 < a^2 + a + 1 < (a+1)^2$. Dacă $b = 2$, atunci $a^2 + ab + b^2 = a^2 + 2a + 4$ nu este pătrat perfect pentru $a \in \mathbb{N}^*$, deoarece $(a+1)^2 < a^2 + 2a + 4 < (a+2)^2$. Dacă $b = 4$, atunci $a^2 + ab + b^2 = a^2 + 4a + 16$ are proprietatea că $(a+2)^2 < a^2 + 4a + 16 < (a+4)^2$ şi $a^2 + 4a + 16 = (a+3)^2$, deci iarăşi nu este pătrat perfect.

În concluzie, valorile căutate sunt $b \in \mathbb{N}^* \backslash \{1, 2, 4\}$.

G200. *Arătaţi că* $\dfrac{a^2}{2b^3 + 2c^3 + 5} + \dfrac{b^2}{2a^3 + 2c^3 + 5} + \dfrac{c^2}{2a^3 + 2b^3 + 5} \leq \dfrac{1}{3}$, $\forall a, b, c \in [0, 1]$.

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

Soluţie. Întrucât $c^3 \in [0, 1]$, rezultă că $2c^3 + 3 \leq 5$, deci $\dfrac{a^2}{2b^3 + 2c^3 + 5} \leq \dfrac{a^3}{2(a^3 + b^3 + c^3) + 3}$. Scriind şi analoagele, după sumare obţinem că $\sum \dfrac{a^2}{2b^3 + 2c^3 + 5} \leq \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2(a^3 + b^3 + c^3) + 3}$. Dar $2a^3 + 1 \geq 3a^2$ (echivalent cu $(a-1)^2(2a+1) \geq 0$, adevărat când $a \in [0, 1]$) şi, similar, $2b^3 + 1 \geq 3b^2$, $2c^3 + 1 \geq 3c^2$, prin urmare $2(a^3 + b^3 + c^3) + 3 \geq 3(a^2 + b^2 + c^2)$, adică $\dfrac{a^2 + b^2 + c^3}{2(a^3 + b^3 + c^3) + 3} \leq \dfrac{1}{3}$, şi de aici concluzia problemei.

G201. *Se consideră triunghiul ABC cu $AC \neq BC > AB$. Dacă există un punct $D \in (BC)$ pentru care $AB^2 = BD \cdot BC$ şi $AD^2 = BD \cdot DC$, arătaţi că* $-\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{AB^2}{BC^2 - AC^2} \leq 1$.

Ovidiu Pop, Satu Mare

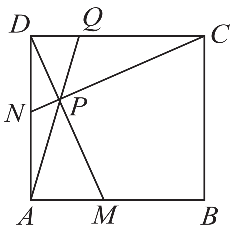
Soluţie. Cu notaţiile uzuale în triunghi, din $BD = \dfrac{c^2}{a}$ şi $AD^2 = BD(a - BD)$ obţinem că $AD = \dfrac{c}{a}\sqrt{a^2 - c^2}$. Pe de altă parte, folosind formula lui Heron, avem că $h_a = \dfrac{2S}{a} = \dfrac{1}{2a}\sqrt{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4}$. Întrucât $AD \geq h_a$, rezultă că $4a^2c^2 - 4c^4 \geq 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4$, adică $(3c^2 + a^2 - b^2)(c^2 + b^2 - a^2) \leq 0$.

Dacă $a < b$, relaţia precedentă conduce la $3c^2 + a^2 - b^2 \leq 0$, de unde $\dfrac{c^2}{b^2 - a^2} \leq \dfrac{1}{3}$ şi atunci $-\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{c^2}{a^2 - b^2} < 0 < 1$. Dacă $a > b$, obţinem că $c^2 + b^2 - a^2 \leq 0$, prin urmare $-\dfrac{1}{3} < 0 < \dfrac{c^2}{a^2 - b^2} \leq 1$ şi cu aceasta soluţia este completă.

G202. *Fie $ABCD$ pătrat, iar punctele M şi N pe laturile AB, respectiv AD sunt astfel încât $AM = DN = k \cdot AB$. Notăm $\{P\} = CN \cap DM$ şi $\{Q\} = AP \cap CD$. Determinaţi valorile lui k pentru care PQ este bisectoare, respectiv mediană în triunghiul CDP.*

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

Soluţie. Se arată uşor că $DM \perp CN$. Folosind teorema catetei în $\triangle CDN$,



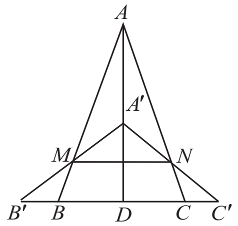
obţinem că $\dfrac{NP}{PC} = \dfrac{DN^2}{CD^2} = k^2$. Cu teorema lui Menelaus în $\triangle CDN$ (transversala $Q-P-A$) deducem că $\dfrac{NP}{PC} \cdot \dfrac{CQ}{QD} \cdot \dfrac{DA}{AN} = 1$, deci $k^2 \cdot \dfrac{CQ}{QD} \cdot \dfrac{1}{k-1} = 1$, prin urmare $\dfrac{QD}{QC} = \dfrac{k^2}{1-k}$.

Din asemănarea $\triangle PCD \sim \triangle DCN$ obţinem că $\dfrac{PD}{PC} = \dfrac{DN}{DC} = k$. Atunci PQ este bisectoare în $\triangle CDP$ dacă şi numai dacă $\dfrac{DQ}{QC} = \dfrac{PD}{PC}$, adică $\dfrac{k^2}{1-k} = k$, de unde $k = 0$ (care nu convine) sau $k = \dfrac{1}{2}$, care este valoarea căutată. Apoi, PQ este mediană în $\triangle CDP$ dacă şi numai dacă $\dfrac{k^2}{1-k} = 1$, cu soluţia acceptabilă $k = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

G203. *Fie date numerele reale a şi b cu $a < b < 2a$. Triunghiurile isoscele ABC şi $A'B'C'$ au aceeaşi axă de simetrie, aceeaşi dreaptă suport a bazelor, iar $BC = a$, $AB = AC = b$, $B'C' = b$, $A'B' = A'C' = a$. Dacă $\{M\} = AB \cap A'B'$, $\{N\} = AC \cap A'C'$, arătaţi că MN este linie mijlocie în $\triangle ABC$ dacă şi numai dacă $a^3 + b^3 = 2a^2b$.*

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Din motive de simetrie, avem că $MN \| BC$. Notăm cu D mijlocul comun al segmentelor BC şi $B'C'$ şi fie $h = AD$, iar $h' = A'D$; evident că $h = \sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{4}}$, $h' = \sqrt{a^2 - \dfrac{b^2}{4}}$. Aplicând teorema lui Menelaus în $\triangle ABD$, cu transversala $A' - M - B'$, obţinem că $\dfrac{MB}{MA} = \dfrac{b-a}{b} \cdot \dfrac{h'}{h-h'}$ şi, cum $MA + MB = b$, deducem că $AM = \dfrac{b^2(h-h')}{bh - ah'}$. Din faptul că $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ rezultă că $MN = \dfrac{a}{b} \cdot AM = \dfrac{ab(h-h')}{bh-ah'} = \dfrac{ab(\sqrt{4b^2-a^2} - \sqrt{4a^2-b^2})}{b\sqrt{4b^2-a^2} - a\sqrt{4a^2-b^2}}$. Condiţia ca MN să fie linie mijlocie în $\triangle ABC$ este $2MN = a$, ceea ce revine la $2b(\sqrt{4b^2-a^2} - \sqrt{4a^2-b^2}) = b\sqrt{4b^2-a^2} - a\sqrt{4a^2-b^2}$, adică $b\sqrt{4b^2-a^2} = (2b-a)\sqrt{4a^2-b^2}$; după ridicare la pătrat şi reduceri, se obţine $a^3 + b^3 = 2a^2b$.



Analog se poate arăta că MN este linie mijlocie în $\triangle A'B'C'$ dacă şi numai dacă $a^3 + b^3 = 2ab^2$.

G204. *Despre un punct de pe o muchie a unui tetraedru vom spune că este punct bisector dacă el este piciorul a două bisectoare ale unor unghiuri ale feţelor. Arătaţi că numărul punctelor bisectoare ale unui tetraedru este 0, 2 sau 6.*

Silviu Boga, Iaşi

Soluţie. Pe fiecare muchie există cel mult un punct bisector. Dacă $M \in (AB)$ este punct bisector, atunci CM şi DM sunt bisectoare, deci $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{CA}{CB} = \dfrac{DA}{DB}$. Rezultă că $\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{BC}{BD}$, prin urmare bisectoarele unghiurilor $\widehat{CAD}$ şi $\widehat{CBD}$ se vor întâlni într-un punct $P\in(CD)$ încât $\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{BC}{BD}=\dfrac{PC}{PD}$, adică P este şi el punct bisector; deducem astfel că numărul punctelor bisectoare este par. Dacă un tetraedru ar avea patru puncte bisectoare, fie acestea $M\in(AB)$, $P\in(CD)$, $N\in(BC)$ şi $Q\in(AD)$, din $AC\cdot BD=AD\cdot BC$ şi $AC\cdot BD=AB\cdot CD$ urmează că $AD\cdot BC=AB\cdot CD$, ceea ce arată că vom avea puncte bisectoare şi pe muchiile AC şi BC; astfel, numărul punctelor bisectoare poate fi foar $0,2$ sau 6.

Evident, tetraedrul regulat are şase puncte bisectoare. Alegând faţa ABC cu laturile de lungimi distincte şi vârful D astfel încât proiecţia sa pe planul (ABC) să fie centrul cercului circumscris acestei feţe, obţinem un tetraedru fără puncte bisectoare. În sfârşit, un tetraedru cu $AB=BC=CA$ şi $DA\neq DB=DC\neq BC$ are exact două puncte bisectoare.

G205. *Două panouri luminoase sunt situate în plane paralele (verticale). Ele au forma a două dreptunghiuri identice, împărţite fiecare în câte zece pătrate congruente cu ajutorul câte unei linii orizontale şi a câte patru linii verticale. În cele 18 vârfuri de pătrate care se formează pe fiecare panou sunt instalate beculeţe. La un moment dat pe fiecare panou se aprind câte două beculeţe, la întâmplare. Care este probabilitatea ca cele patru beculeţe aprinse să se afle într-un acelaşi plan?*

Gabriel Popa şi Cristian Lazăr, Iaşi

Soluţie. Două beculeţe dintre cele 18 aflate pe un panou pot fi alese în $\dfrac{18\cdot 17}{2}=153$ moduri. Cele patru beculeţe pot fi alese în 153^2 moduri.

Gândim o pereche de beculeţe de pe un panou ca pe un segment cu capetele în nodurile reţelei de pătrate. Două segmente de pe cele două panouri sunt coplanare dacă şi numai dacă sunt incluse în drepte paralele. Acest lucru se întâmplă când sunt ambele orizontale, ambele verticale sau ambele oblice, dar formând unghiuri egale cu orizontala.

Pe fiecare dreptunghi avem câte $\dfrac{6\cdot 5}{2}\cdot 3=45$ segmente orizontale, $3\cdot 6=18$ segmente verticale, 5 segmente de o pantă 2, 14 cu panta 1, 3 cu panta $\dfrac{2}{3}$, 10 cu panta $\dfrac{1}{2}$, un segment cu panta $\dfrac{2}{5}$, 6 cu panta $\dfrac{1}{3}$, 4 cu panta $\dfrac{1}{4}$ şi 2 segmente cu panta $\dfrac{1}{5}$. Rezultă că numărul cazurilor favorabile evenimentului urmărit este $45^2+18^2+5^2+14^2+3^2+10^2+1+6^2+4^2+2^2=2736$.

Probabilitatea cerută este $P=\dfrac{304}{2601}\simeq 0,117$.

B. Nivel liceal

L196. *Demonstraţi că în orice triunghi ascuţitunghic are loc inegalitatea*

$$\frac{(\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C)^3}{(\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B)(\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C)(\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}A)}\geq\frac{8}{3\sqrt{3}}\frac{(1+\cos A\cos B\cos C)^3}{\sin A\sin B\sin C}.$$

Gheorghe Costovici, Iaşi

Soluţie. Cum $\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B=\dfrac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}=\dfrac{\sin C}{\sin A\sin B}$, avem că

$$E=\frac{(\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C)^3}{(\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B)(\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C)(\operatorname{ctg} C+\operatorname{ctg} A)}\cdot\frac{\sin A\sin B\sin C}{(1+\cos A\cos B\cos C)^3}=$$
$$=\frac{(\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C)^3(\sin A\sin B\sin C)^3}{\sin A\sin B\sin C\cdot(1+\cos A\cos B\cos C)^3}=$$
$$=\frac{(\cos A\sin B\sin C+\cos B\sin C\sin A+\cos C\sin A\sin B)^3}{\sin A\sin B\sin C(1+\cos A\cos B\cos C)^3}.$$

Întrucât $-\cos C=\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$, rezultă că

$$\begin{aligned}&\cos A\sin B\sin C+\cos B\sin C\sin A+\cos C\sin A\sin B=\\&=\sin C\sin(A+B)+\cos C(\cos C+\cos A\cos B)=\\&=\sin^2 C+\cos^2 C+\cos A\cos B\cos C=1+\cos A\cos B\cos C.\end{aligned}$$

Atunci $E=\dfrac{1}{\sin A\sin B\sin C}\geq\dfrac{27}{(\sin A+\sin B+\sin C)^3}\geq\dfrac{27}{(3\sin\frac{A+B+C}{3})^3}=\dfrac{1}{\sin^3\frac{\pi}{3}}=$ $\dfrac{8}{3\sqrt{3}}$ (am aplicat inegalitatea mediilor $MG\leq MA$ şi inegalitatea lui Jensen pentru funcţia concavă $\sin:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\to[0,1]$).

Nota autorului. Problema este inspirată de cea a d-lui **Marian Tetiva**, apărută în *AMM 2008*, pg. 77:

$$\frac{(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C)}{\cos A\cos B\cos C}\geq\frac{8(\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C)^3}{27(\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B)(\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C)(\operatorname{tg} C+\operatorname{tg} A)}.$$

Asemănător rezolvă problema d-l **Titu Zvonaru**, Comăneşti. O altă soluţie, primită de la d-nii **Mihàly Bencze**, Braşov şi **Ioan Viorel Codreanu**, Maramureş, reduce inegalitatea de demonstrat la una cunoscută, anume, $S\leq\dfrac{3\sqrt{3}}{4}R^2$.

L197. *Fie $ABCDEFGH$ un paralelipiped dreptunghic, iar $\mathcal{S}$ o sferă prin A care intersectează segmentele AB, AD, AE şi AG în M, N, P, respectiv Q. Arătaţi că $AM\cdot AB+AN\cdot AD+AP\cdot AE=AQ\cdot AG$.*

Claudiu Ştefan Popa, Iaşi

Soluţie. Planul dreptunghiului $ABCD$ şi sfera $\mathcal{S}$ au în comun punctele necoliniare A, M şi N, deci intersectează $\mathcal{S}$ după cercul circumscris triunghiului AMN. Dreapta AC intersectează cercul circumscris triunghiului AMN, deci şi sfera $\mathcal{S}$, într-un punct $R\in(AC]$ (în caz contrar, am avea că $AR>AC>$ diametrul sferei, fals). Conform cu L166 din *RecMat 2/2009*, obţinem că $AM\cdot AB+AN\cdot AD=AR\cdot AC$. Planul dreptunghiului $ACGE$ şi $\mathcal{S}$ au în comun punctele A, P şi R; repetând raţionamentul, deducem că $AR\cdot AC+AP\cdot AE=AQ\cdot AG$ şi de aici cerinţa problemei.

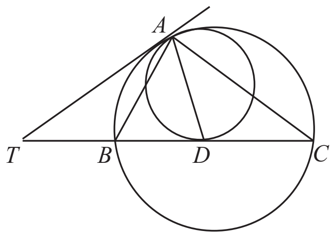
Aşa cum, în plan, problema L166 extinde teorema lu Pitagora, problema L197 extinde cunoscuta: pătratul diagonalei unui paralelipiped dreptunghic este suma pătratelor dimensiunilor sale (care se obţine când paralelipipedul este înscris în sferă). Probabil că o relaţie asemănătoare este valabilă în $\mathbb{R}^n$.

Notă. Soluţie corectă au dat şi d-nii **I.V. Codreanu** şi **T. Zvonaru**.

L198. *Fie ABC un triunghi ascuţitunghic înscris în cercul $\mathcal{C}$. Cercul $\mathcal{C}'$ este tangent cercului $\mathcal{C}$ în punctul A şi laturii BC în punctul D. Arătaţi că AD este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$.*

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Dacă triunghiul ABC este isoscel cu $b = c$, concluzia este imediată. Presupunem că $b > c$ şi fie T intersecţia cu BC a tangentei în A la cercul $\mathcal{C}$. Cu puterea punctului T faţă de $\mathcal{C}$, obţinem că $TA^2 = TB \cdot TC \Leftrightarrow TA^2 = TB(TB + a)$. Aplicând teorema cosinusului în $\triangle TAB$, deducem că $TA^2 = TB^2 + AB^2 - 2TB \cdot AB \cdot \cos\widehat{TBA}$ şi atunci $TB^2 + a \cdot TB = TB^2 + c^2 + 2c \cdot TB \cdot \cos B$, de unde $TB = \dfrac{c^2}{a - 2c\cos B}$, iar $TB + a = \dfrac{c^2 + a^2 - 2ac\cos B}{a - 2c\cos B} = \dfrac{b^2}{a - 2c \cdot \cos B}$. Deoarece TA şi TD sunt tangente cercului $\mathcal{C}'$, avem că $TA = TD$, prin urmare



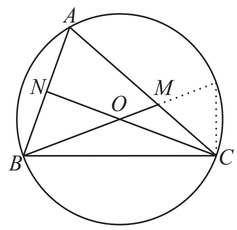
$$BD = TD - TB = \sqrt{TB(TB + a)} - TB = \frac{bc - c^2}{a - 2c\cos B} =$$
$$= \frac{c(b - c)a}{a^2 - 2ac\cos B} = \frac{ac(b - c)}{b^2 - c^2} = \frac{ac}{b + c} \Rightarrow CD = \frac{ab}{b + c}$$

şi de aici concluzia rezultă imediat.

Notă. Profesorul **N. Roman** semnalează că problema apare în lucrarea *Transformări geometrice* de *D. Smaranda* şi *N. Soare*, la p. 104, cu numărul 67 (soluţia de la p. 216 foloseşte omotetia).

L199. *Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC şi $\{M\} = OB \cap AC$, $\{N\} = OC \cap AB$. Dacă $OM = ON$, arătaţi că triunghiul este isoscel sau dreptunghic.*

Temistocle Bîrsan, Iaşi



Soluţie (**Gh. Iurea** şi **T. Zvonaru**). Se constată uşor că nici B, nici C nu poate fi obtuz sau drept. Întrucât $\triangle MOC \equiv \triangle NOB$ (L.U.L.), obţinem că $\widehat{MBN} \equiv \widehat{MCN}$. Dacă $O \in \operatorname{Int} ABC$, atunci $\dfrac{\pi}{2} - C = \dfrac{\pi}{2} - B$, adică $\triangle ABC$ este isoscel; dacă $O \in \operatorname{Ext} ABC$, deducem că $\dfrac{\pi}{2} + C = \dfrac{\pi}{2} + B$, adică $\triangle ABC$ este isoscel; în sfârşit, dacă $O \in (BC)$, rezultă că $\triangle ABC$ este dreptunghic şi soluţia este completă.

Notă. Redacţia regretă includerea acestei probleme în secţiunea pentru pregătirea concursurilor.

L200. *În raport cu un reper cartezian xOy, se consideră punctele $M\left(\dfrac{3}{2}, 1\right)$, $B\left(\dfrac{3a-2}{a}, 0\right)$ şi $C\left(0, \dfrac{2a+3}{a}\right)$, unde $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{3}{2}\right\}$, precum şi familia de drepte*

$d_m : y = mx + \dfrac{2-3m}{2}$, *$m \in \mathbb{R}$. Notăm cu $\mathcal{C}_a$ cercul circumscris triunghiului OBC.*

a) Demonstraţi că, pentru orice $m \in \mathbb{R}$, dreapta d_m intersectează $\mathcal{C}_a$ în două puncte distincte P şi Q.

b) Arătaţi că produsul $MP \cdot MQ$ este independent de a şi m.

Gabriel Popa şi Paul Georgescu, Iaşi

Soluţie. a) Observăm că $BC^2 = \dfrac{13(a^2+1)}{a^2}$, deci raza cercului C_a este $r = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{\sqrt{13(a^2+1)}}{2|a|}$. Centrul cercului este mijlocul S al ipotenuzei BC, de coordonate $S\left(\dfrac{3a-2}{2a}, \dfrac{2a+3}{2a}\right)$, iar $SM = \sqrt{(x_S - x_M)^2 + (y_S - y_M)^2} = \dfrac{\sqrt{13}}{2|a|}$. Evident că $SM < r$, prin urmare $M \in IntC_a$. Pe de altă parte, punctul M aparţine oricărei drepte d_m din familia considerată şi de aici cerinţa problemei.

b) Faptul că $MP \cdot MQ$ nu depinde de m rezultă din puterea punctului M faţă de C_a. Pentru a arăta că produsul nu depinde de a, vom demonstra că toate cercurile C_a au aceeaşi axă radicală, iar M se află pe această axă radicală. Observăm că $OM^2 + SM^2 = \dfrac{13}{4} + \dfrac{13}{4a^2} = \dfrac{13(a^2+1)}{4a^2} = r^2$, prin urmare $OM \perp SM$. Fie $A(3,2)$ simetricul punctului O faţă de M; deducem că $A \in C_a$, $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{3}{2}\right\}$, deci axa radicală a tuturor cercurilor C_a este OA.

Notă. Au rezolvat problema şi d-nii **I.V. Codreanu** şi **T. Zvonaru**.

L201. *Demonstraţi că pentru orice număr prim $p > 2^{2k} + 1$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, numărul $p^{2^{2k+1}} - 1$ se divide cu $2^{2(k+1)} \cdot \prod_{j=1}^{m} q_j$, unde $\{q_j | j = \overline{1,m}\}$ este mulţimea numerelor prime din mulţimea $\{2^i + 1 | i = \overline{1,2k}\}$.*

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

Soluţie. Avem că $p^{2^{2k+1}} - 1 = (p^{2^{2k}} + 1)(p^{2^{2k-1}} - 1) \ldots (p^2+1)(p+1)(p-1)$. Cum p este evident impar, fiecare factor din descompunerea precedentă se divide cu 2, deci $p^{2^{2k+1}} - 1$ se divide cu $2^{2(k+1)}$.

Pe de altă parte, $p^{ab} - 1$ se divide cu $p^a - 1$ şi cu $p^b - 1$. Cum $2^{2k+1} = 2^n 2^{2k+1-n}$, cu $n = \overline{1,k}$, rezultă că $p^{2^{2k+1}} - 1$ se divide cu $p^{2^n} - 1$ şi cu $p^{2^{2k+1-n}} - 1$, pentru $n = \overline{1,k}$. Folosind mica teoremă a lui Fermat, dacă q_j este un număr prim de forma $2^i + 1$, atunci $p^{q_j - 1}$ se divide cu q_j şi deci $p^{2^{2k+1}} - 1$ se va divide cu q_j. Cum numerele $2^{2(k+1)}, q_1, q_2, \ldots, q_m$ sunt relativ prime două câte două, rezultă concluzia problemei.

Notă. Pentru $k = 2$ obţinem problema 8258 din *G.M.-B. 6/1968*. Pentru $k = 4$ găsim că pentru orice număr prim $p > 2^8 + 1 = 257$, numărul $p^{512} - 1$ se divide cu $2^{10} \cdot 2 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 257$.

L202. *Determinaţi numerele reale a şi b pentru care $a\dfrac{\sqrt{n+2}}{n+1} \leq \sqrt{n+2} - \sqrt{n-1} \leq b\dfrac{\sqrt{n+1}}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Ipoteza problemei este echivalentă cu $a \leq \dfrac{(n+1)(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})}{\sqrt{n+2}} = x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi $b \geq \dfrac{n(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})}{\sqrt{n+1}} = y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Se arată că şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ sunt strict crescătoare şi atunci $a \leq x_1$, iar $b \geq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, prin urmare $a \leq \dfrac{2(3-\sqrt{6})}{3}$ şi $b \geq \dfrac{1}{2}$.

L203. *Fie f, g polinoame cu coeficienţii reali, nu ambele constante, iar $P = f + ig \in \mathbb{C}[X]$. Presupunem că rădăcinile lui P sunt numere complexe cu părţile imaginare strict negative. Dacă $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$, arătaţi că rădăcinile polinomului $Q = \lambda f + \mu g$ sunt reale.*

Adrian Reisner, Paris

Soluţie. Fie z_k, $k = \overline{1,n}$, rădăcinile polinomului P, deci $P = a \cdot \prod\limits_{k=1}^{n} (X - z_k)$. Dacă z este un număr complex cu partea imaginară strict pozitivă, este imediat că $|z - z_k| > |\overline{z} - z_k|$, deci $\prod\limits_{k=1}^{n} |z - z_k| > \prod\limits_{k=1}^{m} |\overline{z} - z_k|$, adică $|P(z)| > |P(\overline{z})|$. Dacă z este număr complex cu partea imaginară strict negativă, atunci $|P(z)| < |P(\overline{z})|$. Conchidem că $|P(z)| = |P(\overline{z})|$ dacă şi numai dacă $z \in \mathbb{R}$.

Fie z o rădăcină a lui Q; vom arăta că $|P(z)| = |P(\overline{z})|$, de unde concluzia. Avem $|P(z)|^2 - |P(\overline{z})|^2 = (f(z) - ig(z))(\overline{f(\overline{z})} - ig(\overline{z})) - (f(\overline{z}) + ig(\overline{z}))(f(z) - ig(z)) = 2i(g(z)\overline{f(z)} - f(z)\overline{g(z)}) = 4\,\mathrm{Im}\,(f(z)\overline{g(z)})$. Cum $\lambda f(z) + \mu g(z) = 0$, unde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$, rezultă că imaginile geometrice ale lui $f(z)$ şi $g(z)$ sunt coliniare cu originea, deci $f(z)\overline{g(z)} \in \mathbb{R}$ şi astfel $|P(z)| = |P(\overline{z})|$, ceea ce încheie rezolvarea.

L204. *Fie A o matrice pătratică de ordinul n având elementele a_{ij} din mulţimea $\{0, 1\}$ şi următoarele proprietăţi: i) $a_{ii} = 0$ pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$; ii) dacă $a_{ij} = 1$ (pentru $i \neq j$ din mulţimea $\{1, 2, \ldots, n\}$), atunci $a_{ji} = 0$; iii) pentru fiecare $p \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, matricea are o linie pe care se află exact p elemente egale cu 1.*

Să se arate că există o permutare a mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât, dacă se aplică această permutare liniilor matricei A şi apoi coloanelor matricei astfel obţinute, rezultă în final o matrice cu toate elementele care sunt egale cu 1 situate deasupra diagonalei principale. Care este polinomul caracteristic al unei asemenea matrice?

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Fie i_k linia matricei A pe care se găsesc exact $n - k$ elemente egale cu 1 (pentru fiecare $1 \leq k \leq n$) şi permutarea α definită prin $\alpha(k) = i_k$, oricare ar fi $k \in \{1, \ldots, n\}$. Spunem că aplicăm liniilor matricei A permutarea α dacă formăm o nouă matrice B obţinută din A mutându-i linia i_1 pe prima poziţie, linia i_2 pe poziţia a doua şi aşa mai departe. Spunem aşa deoarece, de fapt, $B = PA$, unde P este matricea (numită *de permutare*) corespunzătoare permutării α, adică matricea care are toate elementele 0, cu excepţia elementelor din poziţiile (k, i_k), egale cu 1. Dacă o matrice se înmulţeşte cu P^{-1} (care este matricea de permutare corespunzătoare inversei lui α la dreapta, precum şi transpusa matricei P) rezultatul este matricea iniţială asupra coloanelor căreia s-a efectuat aceeaşi permutare α.

Facem acest lucru, adică formăm din A matricea B obţinută din permutarea liniilor lui A conform permutării α. Desigur, B are $n-1$ elemente egale cu 1 pe prima linie, $n-2$ elemente egale cu 1 pe linia a doua şi tot aşa (are toate elementele nule pe ultima linie).

Fie j_k numărul elementelor egale cu 1 de pe coloana i_k, pentru fiecare k, $1 \leq k \leq n$. Avem $j_k \leq n-1-(n-k) = k-1$ pentru orice $1 \leq k \leq n$ (conform proprietăţilor i) şi ii)) şi $j_1 + \ldots + j_n = n(n-1)/2$ (conform proprietăţii iii) şi faptului că numărul total de elemente egale cu 1 de pe coloane este egal cu numărul elementelor egale cu 1 numărate pe linii). Din acestea două obţinem că, de fapt, $j_k = k-1$ pentru orice $1 \leq k \leq n$. Aplicăm coloanelor matricei B tot permutarea α şi obţinem astfel matricea $C = BP^{-1}$ care are pe linia i exact $n-i$ elemente egale cu 1 pentru fiecare $1 \leq i \leq n$ şi are pe coloana j exact $j-1$ elemente egale cu 1, pentru fiecare $1 \leq j \leq n$.

Mai mult, cele $j-1$ elemente de pe coloana j trebuie să fie primele (de sus în jos), altfel nu s-ar respecta numărul elementelor de pe linii. Astfel, C este matricea căutată, obţinută din A prin aplicarea permutării α asupra liniilor sale şi apoi prin aplicarea permutării α asupra coloanelor matricei B (care rezultă după permutarea liniilor).

Cum $C = PAP^{-1}, C$ şi A au aceleaşi polinom caracteristic; dar C este (strict) superior triunghiulară, deci polinomul este X^n - adică şi polinomul caracteristic al lui A este tot X^n.

Nota autorului. Această problemă reprezintă o variantă a problemei 11487 din *The American Mathematical Monthly 2/2010.*

L205. *Calculaţi* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\ln k}{k}$.

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Seria este convergentă conform criteriului lui Leibniz. Avem: $\sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}\ln k}{k} = \sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{\ln k}{k} - 2\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln 2k}{2k} = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln k}{k} - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)\ln 2 = = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln k}{k} - \frac{\ln^2 2n - \ln^2 n}{2} - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right)\ln 2 + \frac{\ln^2 2}{2}$. După cum se ştie, constanta lui Euler este definită prin $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} (\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n)$. Exact aşa cum se justifică existenţa şi finitudinea acestei limite, putem arăta că şirul $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{\ln^2 n}{2}$, $\forall n \geq 1$, este convergent. (Folosim monotonia funcţiei $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ şi teorema lui Lagrange pentru a obţine inegalităţile $\frac{\ln(n+1)}{n+1} < \frac{\ln^2(n+1) - \ln^2 n}{2} < \frac{\ln n}{n}$, $\forall n \geq 3$, iar aceste inegalităţi folosesc pentru demonstrarea convergenţei şirului menţionat.) Din această convergenţă rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} (\sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln k}{k} - \frac{\ln^2 2n - \ln^2 n}{2}) = 0$ şi atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}\ln k}{k} = \frac{\ln^2 2}{2} - \gamma \ln 2$. Evident, aceasta va fi şi suma seriei din enunţ.