Soluţiile problemelor propuse în nr. 1/2011

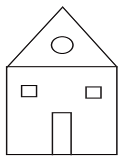
Clasele primare

P.206. *Dan a scris în ordine descrescătoare numerele de la* 75 *la* 23*. Calculaţi diferenţa dintre al zecelea şi al* 32*-lea număr.*

(*Clasa I*) **Andreea Bîzdîgă, elevă, Iaşi**

Soluţie. Al zecelea număr este $75-10+1=66$, iar al 32-lea este $75-32+1=44$. Diferenţa celor două numere este 22.

P.207. *Fiecărei forme geometrice îi corespunde un preţ de cost:* $\square \rightarrow$ 10 *lei,* ▯ $\rightarrow$ 20 *lei,* $\triangle \rightarrow$ 30 *lei,* $\bigcirc \rightarrow$ 20 *lei. Cât costă confecţionarea căsuţei?*



(*Clasa I*) **Mariana Nastasia, elevă, Iaşi**

Soluţie. Căsuţa costă 10 lei + 10 lei + 10 lei +20 lei +30 lei +20 lei = 110 lei.

P.208. *Pe trei rafturi sunt* 75 *cărţi. Dacă pe primul raft punem jumătate din cărţile de pe cel de-al doilea, atunci vom avea pe rafturi numere consecutive de cărţi. Câte cărţi erau la început pe fiecare raft?*

(*Clasa I*) **Iulia Sticea, elevă, Iaşi**

Soluţie. La început, pe primul raft erau a cărţi, pe al doilea $b+b$ cărţi, iar pe al treilea c cărţi. În final, pe primul raft sunt $a+b$ cărţi, pe al doilea b cărţi, iar pe al treilea c cărţi. Deoarece $a+b>b$, inseamnă că pe primul raft vor fi 26 cărţi, pe al doilea 25 cărţi, iar pe al treilea 24 cărţi. La început, pe cele trei rafturi erau $1, 50$, respectiv 24 de cărţi.

P.209. *Numărul lalelelor dintr-o vază este cu* 7 *mai mare decât numărul trandafirilor, care reprezintă jumătate din numărul lalelelor. Câte flori sunt în vază?*

(*Clasa a II-a*) **Inst. Maria Racu, Iaşi**

Soluţie. Numărul florilor din vază este $(7+7)+7=14+7=21$.

P.210. *Ce zi nu poate fi astăzi, dacă alaltăieri nu a fost luni şi poimâine nu este sâmbătă?*

(*Clasa a III-a*) **Mihaela Gâlcă, elevă, Iaşi**

Soluţie. Astăzi nu poate fi nici miercuri, nici joi.

P.211. *Suma a două numere este un număr de două cifre al căror produs este* 5*. Care sunt cele două numere, dacă diferenţa lor este* 7*?*

(*Clasa a III-a*) **Ana Cojocariu, Iaşi**

Soluţie. Suma celor două numere poate fi 15 sau 51. Deoarece diferenţa lor este 7, atunci numerele sunt 4 şi 11 sau 22 şi 29.

P.212. *Un elev a greşit la adunarea a două numere: a scris cifra zero la sfârşitul primului număr în loc s-o scrie la sfârşitul celui de-al doilea şi astfel a obţinut suma* 98 *şi nu* 89 *- suma corectă. Aflaţi cele două numere.*

(*Clasa a III-a*) **Cristina Timofte, Iaşi**

Soluţie. Dacă numerele sunt a şi b, avem $a+b=89$, iar $10a+b:10=98$ sau $a+b=89$ şi $100a+b=980$, de unde $99a+89=980$. Găsim $a=9$, $b=80$.

P.213. *O vilă turistică are apartamente cu* 3 *şi* 4 *camere. Ştiind că în uşa de intrare a fiecărui apartement se află câte* 2 *chei, iar numărul camerelor şi al cheilor la un loc este* 39*, aflaţi câte apartamente cu* 3 *camere sunt în vilă.*
(*Clasa a IV-a*) **Dorel Luchian, Iaşi**

Soluţie. Notăm cu x numărul apartamentelor cu 3 camere şi cu y numărul celor cu 4 camere. Avem $(3x + 4y) + (2x + 2y) = 39 \Leftrightarrow 5x + 6y = 39$, cu soluţia unică $x = 3$, $y = 4$.

P.214. *La o masă rotundă stau cinci copii, fiecare având câte un jeton pe care este scris un număr. Toţi copiii afirmă că vecinii lor au jetoane cu numere de parităţi diferite. Arătaţi că măcar un copil nu spune adevărul.*
(*Clasa a IV-a*) **Iuliana Moldovan, studentă, Iaşi**

Soluţie. Fie A, B, C, D şi E cei cinci copii şi să presupunem că niciunul dintre ei nu minte. Spunem că A este *par* dacă are un jeton cu număr par şi spunem că A este *impar* în caz contrar.

Dacă A este par, avem succesiv că C este impar, E par, B impar, D par, A impar – contradicţie. Analog ajungem la contradicţie dacă A este impar. În concluzie, cel puţin un copil minte.

P.215. *Într-un rucsac sunt* 12 *şosete care pot forma şase perechi de culori diferite, iar două dintre ele sunt rupte. Câte şosete trebuie scoase la întâmplare din rucsac pentru a avea o pereche bună?*
(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

Soluţie. Avem de analizat două cazuri. Primul, când cele două şosete rupte au aceeaşi culoare. Cea mai dezavantajoasă situaţie este să scoatem 7 şoşete, dintre care 5 şosete bune de culori diferite şi o pereche de aceeaşi culoare, însă rupte. Dacă mai extragem o şosetă, atunci putem forma o pereche de şosete bune.

Al doilea, când cele două şosete rupte au culori diferite. În această situaţie, cel mai dezavantajos este să extragem 8 şosete, 6 şosete bune de culori diferite şi două şosete rupte, tot de culori diferite. Dacă mai extragem o şosetă, aceasta este bună şi putem forma o pereche de şosete bune. În concluzie, pentru a fi siguri că avem o pereche de şosete bune, trebuie să extragem 9 şosete.

Clasa a V-a

V.130. *Determinaţi numărul* $\overline{a0bb}_{(3)}$*, dacă* $\overline{a0bb}_{(3)} = \overline{bba}_{(7)}$.
Nicolae Ivăşchescu, Craiova

Soluţie. Trecând în baza 10, egalitatea din enunţ devine $27a+4b = 56b+a$, adică $26a = 52b$, prin urmare $a = 2b$. Cum a şi b sunt cifre în baza 3, $a \neq 0$, convine doar situaţia $a = 2$, $b = 1$. În concluzie, $\overline{a0bb}_{(3)} = \overline{2011}_{(3)}$.

V.131. *Se consideră numărul* $N = 1 + 7 + 13 + 19 + a + b + 37$*, unde termenii sumei sunt scrişi în ordine strict crescătoare. Determinaţi numărul perechilor* (a, b) *pentru care* N *este pătrat perfect.*
Anca Chiriţescu, Ţigănaşi (Iaşi)

Soluţie. Observăm că $N_{\min} = 1 + 7 + 13 + 19 + 20 + 21 + 37 = 118$, iar $N_{\max} = 1 + 7 + 13 + 19 + 35 + 36 + 37 = 148$, deci N este pătrat perfect dacă este egal cu 121 sau cu 144. Rezultă $a + b$ poate lua valorile 44 sau 67, prin urmare $(a, b) \in$

$\{(20,24);(21,23);(31,36);(32,35);(33,34)\}$. În concluzie, există cinci perechi (a,b) pentru care N este pătrat perfect.

V.132. *Numerele* $0,1,\ldots,2011$ *sunt aranjate într-un tablou astfel:*

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 7 & 8 & 15 & \ldots & 2008 \\ 1 & 6 & 9 & 14 & \ldots & 2009 \\ 2 & 5 & 10 & 13 & \ldots & 2010 \\ 3 & 4 & 11 & 12 & \ldots & 2011. \end{array}$$

a) *Stabiliţi care sunt elementele coloanei 211 (de sus în jos).*

b) *Calculaţi suma elementelor de pe a treia linie.*

Ioana Maria Popa, elevă, Iaşi

Soluţie. a) Coloana n conţine numerele $4n-4, 4n-3, 4n-2$ şi $4n-1$, în ordine crescătoare dacă n este impar şi în ordine descrescătoare dacă n este par. Atunci elementele coloanei 211 sunt (de sus în jos): $840, 841, 842, 843$.

b) Suma elementelor de pe a treia linie este $S = S_1 + S_2$, unde $S_1 = 2 + 10 + 18 + \ldots + 2010 = \dfrac{(2+2010)\cdot 252}{2} = 253\,512$, iar $S_2 = 5 + 13 + 21 + \ldots + 2005 = \dfrac{(5+2005)\cdot 251}{2} = 252\,255$. În concluzie, $S = 505\,767$.

V.133. *Calculaţi sumele:*

a) $S_1 = 85 + 985 + 9985 + \ldots + \underbrace{99\ldots9}_{2011\,\mathrm{de}\,9}85$;

b) $S_2 = 17 + 197 + 1997 + \ldots + 1\underbrace{99\ldots9}_{2011\,\mathrm{de}\,9}7$.

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

Soluţie. a) Observăm că $S_1 = (100-15) + (1000-15) + \ldots + (1\underbrace{00\ldots0}_{2013\text{ de }0} - 15) = \underbrace{11\ldots11}_{2012 de 1}00 - 15\cdot 2012 = \underbrace{11\ldots11}_{2008\text{ de }1}080920$.

b) Cum $S_1 = 5S_2$, atunci $S_2 = S_1 : 5 = \underbrace{22\ldots22}_{2008\text{ de }2}16184$.

V.134. *Lucian-Georges rămâne nesupravegheat la calculator şi, din neatenţie, printează toate numerele naturale de* 1 *la* 1000000*. Drept pedeapsă, el trebuie să numere de câte ori a fost tipărită cifra* 5*. Care este răspunsul corect pe care trebuie să-l dea copilul?*

Andrei Nedelcu şi Cătălin Budeanu, Iaşi

Soluţie. Numărul apariţiilor cifrei 5 nu se modifică dacă în loc de numerele $1\ldots1000000$ considerăm numerele $0\ldots999999$, iar fiecare număr se scrie cu ajutorul a şase cifre, adăugând zerouri în stânga sa (de exemplu, în loc de 2011 vom scrie 002011). În acest fel, numărul total de cifre va fi 6×10^6 şi fiecare cifră va avea acelaşi număr de apariţii, deci cifra 5 va fi folosită de $6\cdot10^6 : 10 = 600\,000$ ori.

V.135. *Demonstraţi că* $2^{122} < 10^{37}$.

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Cum $2^{10} = 1024 < 1029 = 3 \cdot 343 = 3 \cdot 7^3$, atunci $2^{20} < 9 \cdot 7^6 = 9 \cdot (7^2)^3 < 9 \cdot 50^3 = 9 \cdot 2^3 \cdot 5^6$, deci $2^{17} < 9 \cdot 5^6$. Deducem că $2^{23} < 9 \cdot 10^6$, prin urmare $2^{69} < 729 \cdot 10^{18} < 3 \cdot 2^8 \cdot 10^{18}$, de unde $2^{61} < 3 \cdot 10^{18}$. Obţinem că $2^{122} < 9 \cdot 10^{36} < 10^{37}$.

Notă (**T. Zvonaru**). Pe parcurs, am obţinut că $2^{23} < 9 \cdot 10^6$, deci $2^{17} < 10^7$. Această inegalitate poate fi folosită pentru a demonstra că $2^{100} < 2^{61}$, fără a calcula 2^{33} (a se vedea soluţia problemei **V.111.** din *Rec.Mat.* 2/2010). Într-adevăr, $2^{23} < 10^7 \Rightarrow 2^{207} < 10^{63} \Rightarrow 2^{200} < \dfrac{10^{63}}{128}$ şi, cum $128 > 10^2$, rezultă că $2^{200} < 10^{61}$.

V.136. *Se consideră şirul de numere naturale* $4, 19, 163, 1945, \ldots$. *Determinaţi ultimele* 501 *cifre ale celui de-al* 2011*-lea termen al şirului.*

Mihai Crăciun, Paşcani

Avem: $a_1 = 4 = 3^1 \cdot 1! + 1$, $a_2 = 19 = 3^2 \cdot 2! + 1$, $a_3 = 163 = 3^3 \cdot 3! + 1$, $a_4 = 1945 = 3^4 \cdot 4! + 1$. Atunci $a_{2011} = 3^{2011} \cdot 2011! + 1$. Numărul de zerouri cu care se termină scrierea zecimală a numărului 2011! este $\left[\dfrac{2011}{5}\right] + \left[\dfrac{2011}{5^2}\right] + \left[\dfrac{2011}{5^3}\right] + \ldots = 402 + 80 + 16 + 3 + 0 + \ldots = 501$, deci ultimele 501 cifre ale lui a_{2011} sunt $\underbrace{00\ldots00}_{500 de 0}1$.

Clasa a VI-a

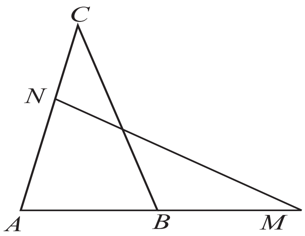
VI.130. *Fie* $A_1, A_2, \ldots, A_{2011}$ *puncte echidistante pe o dreaptă* d. *Notăm cu* $B_1, B_2, \ldots, B_{2010}$ *mijloacele segmentelor* $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{2010}A_{2011}$*; apoi, fie* $C_1, C_2, \ldots, C_{2009}$ *mijloacele segmentelor* $B_1B_2, B_2B_3, \ldots, B_{2009}B_{2010}$ *ş.a.m.d., până când obţinem un singur punct* M. *Determinaţi poziţia punctului* M.

Elena Iurea, Iaşi

Soluţie. La fiecare pas, numărul punctelor scade cu 1. În etapa 1, avem punctele $A_1, A_2, \ldots, A_{2011}$. După un pas, în etapa 2, avem punctele $B_1, B_2, \ldots, B_{2010}$. În etapa 3, punctele sunt $C_1 = A_2$, $C_2 = A_3, \ldots, C_{2009} = A_{2010}$ şi în toate etapele cu număr de ordine impar vom obţine puncte dintre cele iniţiale: $A_3, A_4, \ldots, A_{2009}$ în etapa 5; $A_4, \ldots, A_{2008}$ în etapa 7; $\ldots$; $A_{1005}, A_{1006}, A_{1007}$ în etapa 2009; A_{1006} în etapa 2011. În concluzie, $M = A_{1006}$.

VI.131. *Se consideră* $\triangle ABC$ *cu* $AC = BC$ *şi punctele* M, N *cu* $B \in [AM]$, $N \in [AC]$. *Arătaţi că* $MA = MN$ *dacă şi numai dacă* $\widehat{MBC} \equiv \widehat{CNM}$.

Petru Asaftei, Iaşi



Soluţie. Folosind faptul că $\widehat{CAB} \equiv \widehat{CBA}$, avem: $MA = MN \Leftrightarrow \widehat{MAN} \equiv \widehat{MNA} \Leftrightarrow \widehat{CBA} \equiv \widehat{MNA} \Leftrightarrow \widehat{MBC} \equiv \widehat{CNM}$.

VI.132. *Se consideră triunghiurile isoscele* ABC *şi* ABD *cu* $AB = AC = AD$, $m(\widehat{BAC}) = 28°$, $m(\widehat{BAD}) = 32°$, *punctele* C *şi* D *fiind de o parte şi de alta a dreptei* AB. *Dacă* E *este mijlocul segmentului* AC *şi* $\{M\} = DE \cap BC$, *determinaţi măsurile unghiurilor triunghiului* MAB.

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

Soluţie. Triunghiul ACD are $AC = AD$ şi $m(\widehat{CAD}) = 28° + 32° = 60°$, deci este echilateral; cum DE este mediană, rezultă că $DE \perp AC$. Atunci ME

este mediatoarea segmentului AC şi triunghiul MAC va fi isoscel, cu $m(\widehat{MAC}) \equiv m(\widehat{MCA}) = \frac{1}{2}(180° - 28°) = 76°$ şi $m(\widehat{AMC}) = 180° - 2 \cdot 76° = 28°$. Apoi, $m(\widehat{MAB}) = 76° - 28° = 48°$, iar $m(\widehat{ABM}) = 180° - 28° - 48° = 104°$.

VI.133. *Măsura unui unghi este $u = \overline{ab}'\overline{ab}''$, unde $0 < \overline{ab} < 60$, iar numărul natural nenul n are proprietatea că $n \cdot u$ exprimă un număr întreg de grade. Aflaţi u pentru care n este minim.*

Marian Panţiruc, Iaşi

Soluţie. Observăm că $u = \left(\frac{\overline{ab}}{60} + \frac{\overline{ab}}{3600}\right)^{\circ} = \left(\frac{61 \cdot \overline{ab}}{3600}\right)^{\circ}$. Cum $n \cdot u \in \mathbb{N}^*$, $0 < \overline{ab} < 60$, 61 este relativ prim cu 3600 iar n este minim, rezultă că $\overline{ab}$ trebuie să fie multiplu al celui mai mare divizor al lui 3600 mai mic decât 60. Astfel, $\overline{ab} = 45$, caz în care $n = 80$.

VI.134. *Arătaţi că numărul $A = 2010^{2010} + 2012^{2012} - 2$ este divizibil cu 2011.*

Daniela Munteanu, Iaşi

Soluţie. Cum $2010^{2010} = (2011 - 1)^{2010} = M_{2011} + (-1)^{2010} = M_{2011} + 1$ şi $2012^{2012} = (2011+1)^{2012} = M_{2011}+1$, rezultă că $A = (M_{2011}+1)+(M_{2011}+1)-2 = M_{2011}$.

VI.135. *Determinaţi câte fracţii ireductibile şi subunitare au proprietatea că suma dintre numărător şi numitor este 1005.*

Mirela Marin, Iaşi

Soluţie. Fracţiile căutate sunt de forma $\frac{a}{1005 - a}$, cu $a < 1005 - a$, adică $a \in \{1, 2, \ldots, 502\}$. O astfel de fracţie este reductibilă prin d dacă $d|a$ şi $d|1005 - a$, deci când $d|1005$, adică $d \in \{3, 5, 67, 3 \cdot 5, 3 \cdot 67, 5 \cdot 67\}$. Numărul fracţiilor reductibile este $\left[\frac{502}{3}\right] + \left[\frac{502}{5}\right] + \left[\frac{502}{67}\right] - \left[\frac{502}{15}\right] - \left[\frac{502}{201}\right] - \left[\frac{502}{335}\right] = 167 + 100 + 7 - 33 - 2 - 1 = 238$, prin urmare numărul de fracţii ireductibile va fi $502 - 238 = 264$.

VI.136. *După ce fiecare echipă a jucat cu fiecare dintre celelalte câte un meci, clasamentul grupei A de la Campionatul mondial de fotbal 2010 arăta astfel:*

1. Uruguay	*3*	*2 1 0*	*4-0*	*7*
2. Mexic	*3*	*1 1 1*	*3-2*	*4*
3. Africa de Sud	*3*	*1 1 1*	*3-5*	*4*
4. Franţa	*3*	*0 1 2*	*1-4*	*1*

Ştiind că în meciul Uruguay-Franţa nu s-a marcat niciun gol, aflaţi rezultatele fiecăruia dintre cele şase meciuri.

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Deoarece rezultatul meciului Uruguay-Franţa a fost $0 - 0$, scorurile posibile pentru fiecare echipă sunt:

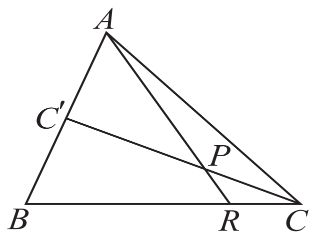
Uruguay:	(0-0,1-0,3-0) sau (0-0,2-0,2-0)
Franţa:	(0-0,1-2,0-2) sau (0-0,1-3,0-1)
Mexic:	(0-0,2-0,1-2) sau (0-0,3-0,0-2) sau (0-0,3-1,0-1) sau (1-1,2-0,0-1)
Africa de Sud:	(0-0,1-0,2-5) sau (0-0,2-0,1-5) sau (0-0,3-0,0-5) sau (0-0,2-1,1-4) sau (0-0,3-1,0-4) sau (0-0,3-2,0-3) sau (1-1,1-0,1-4) sau (1-1,2-0,0-4) sau (1-1,2-1,0-3).

Cum printre scorurile posibile ale echipelor Uruguay, Franţa şi Mexic nu se găsesc $5-2, 5-1, 5-0, 4-1, 4-0, 3-2$ singura posibilitate pentru Africa de Sud rămâne $(1-1, 2-1, 0-3)$. Deoarece meciul egal al Africii de Sud a fost cu Mexicul, scorurile acestei echipe vor fi $(1-1, 2-0, 0-1)$. Acum obţinem uşor scorurile echipelor Uruguay: $(0-0, 1-0, 3-0)$ şi Franţei: $(0-0, 1-2, 0-2)$. Rezultatele complete ale grupei au fost:

Uruguay-Franţa $0-0$; Mexic-Africa de Sud $1-1$;
Uruguay-Africa de Sud $3-0$; Mexic-Franţa $2-0$;
Uruguay-Mexic $1-0$; Africa de Sud-Franţa $2-1$.

Clasa a VII-a

VII.130. *Fie C' mijlocul laturii AB a triunghiului ABC, iar P un punct pe segmentul CC'. Dacă $AP \cap BC = \{R\}$, arătaţi că $AP \cdot CR = BC \cdot PR$.*



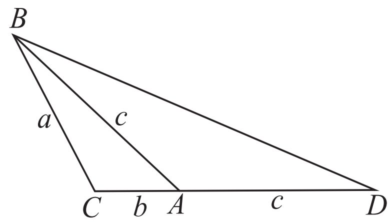
Claudiu Ştefan Popa, Iaşi

Soluţie. Cu teorema lui Menelaus în triunghiul ABR cu transversala $C'-P-C$, obţinem că $\dfrac{AC'}{C'B} \cdot \dfrac{BC}{CR} \cdot \dfrac{RP}{PA} = 1$, deci $\dfrac{BC \cdot PR}{AP \cdot CR} = 1$, de unde cerinţa problemei.

VII.131. *Într-un triunghi ABC, lungimile laturilor verifică relaţia $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b+c}{a}$. Dacă $m(\widehat{A}) = \alpha$, determinaţi măsurile unghiurilor $\widehat{B}$ şi $\widehat{C}$.*

Neculai Stanciu, Buzău

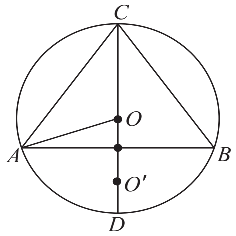
Soluţie. Considerăm punctul D astfel încât $A \in (CD)$, $AD = AB = c$. Cum $\dfrac{CB}{CA} = \dfrac{CD}{CB}$ şi unghiul $\widehat{C}$ este comun, rezultă că $\triangle CAB \sim \triangle CBD$, de unde $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{CDB})$. Însă $\widehat{BAC}$ este unghi exterior triunghiului isoscel ABD, prin urmare $m(\widehat{BAC}) = 2m(\widehat{D}) = 2m(\widehat{CBA})$. Deducem că $m(\widehat{CBA}) = \dfrac{\alpha}{2}$, iar $m(\widehat{C}) = 180° - \dfrac{3\alpha}{2}$. (Evident, se impune ca $\alpha < 120°$, în caz contrar neexistând triunghiuri ca în enunţ.)



VII.132. *În cercul $\mathcal{C}(O, r)$ se consideră coarda $[AB]$. Notăm cu C mijlocul arcului mare $\widehat{AB}$, cu O' simetricul punctului O faţă de AB şi fie $x = m(\widehat{ACB})$. Determinaţi valorile lui x pentru care $O' \in Int\,\mathcal{C}$.*

Geanina Havârneanu, Iaşi

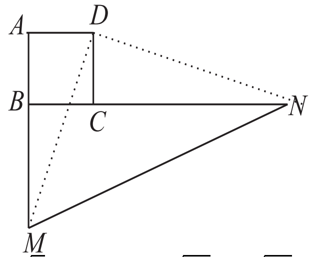
Soluţie. Avem $O' \in Int\,\mathcal{C} \Leftrightarrow OO' < r \Leftrightarrow d(O, AB) < \frac{r}{2} = \frac{AO}{2} \Leftrightarrow \sin(\widehat{OAB}) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow m(\widehat{OAB}) < 30° \Leftrightarrow m(\widehat{AOD}) > 60°$ (unde D este mijlocul arcului mic $\widehat{AB}$) $\Leftrightarrow m(\widehat{AD}) > 60° \Leftrightarrow m(\widehat{AB}) > 120° \Leftrightarrow 2x > 120° \Leftrightarrow x > 60°$. Evident că $x \leq 90°$ (deoarece C se află pe arcul mare $\widehat{AB}$), prin urmare valorile căutate ale lui x sunt cele din intervalul $(60°, 90°]$.



VII.133. *Se consideră pătratul $ABCD$ cu latura de $3\sqrt{5}cm$. Pe semidreptele $(AB$ şi $(BC$ se consideră punctele M, respectiv N, astfel încât $AM = 7\sqrt{5}cm$ şi $BN = 10\sqrt{5}cm$. Determinaţi măsura unghiului $\widehat{MND}$.*

Constantin Apostol, Rm. Sărat

Soluţie. Întrucât $AM = CN = 7\sqrt{5}cm$ şi $AD = CD = 3\sqrt{5}cm$, triunghiurile dreptunghice AMD şi CND sunt congruente ($C.C.$), prin urmare $DM = DN$ şi $\widehat{MDA} \equiv \widehat{NDC}$. Însă $m(\widehat{ADM}) + m(\widehat{MDC}) = 90°$, deci $m(\widehat{NDC}) + m(\widehat{MDC}) = 90°$, adică $m(\widehat{MDN}) = 90°$. Deducem că $\triangle DMN$ este dreptunghic isoscel şi astfel $m(\widehat{MND}) = 45°$.



VII.134. *Comparaţi numerele reale $a = 2\sqrt{1}+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\ldots+2\sqrt{64}$ şi $b = (\sqrt{0}+\sqrt{2})+(\sqrt{1}+\sqrt{3})+(\sqrt{2}+\sqrt{4})+\ldots+(\sqrt{63}+\sqrt{65})$.*

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

Soluţie. Eliminând termenii comuni ai celor două sume, compararea numerelor a şi b revine la compararea numerelor $\sqrt{1}+\sqrt{64}$ cu $\sqrt{65}$. Însă $\sqrt{1}+\sqrt{64} = 9 = \sqrt{81} > \sqrt{65}$, prin urmare $a > b$.

VII.135. *Rezolvaţi în numere întregi ecuaţia $x^3 + y^3 + 3xy = 9$.*

Cristina Ene, elevă, Craiova

Soluţie. Cum $3 \mid x^3 + y^3$, avem două cazuri:

I. $x = 3a, y = 3b$, cu $a, b \in \mathbb{Z}$; atunci $27(a^3 + b^3 + ab) = 9$, imposibil.

II. $x = 3a+1, y = 3b-1$, cu $a, b \in \mathbb{Z}$; atunci $x^3+y^3 = 27a^3+27a^2+9a+1+27b^3-27b^2+9b-1$, deci $x^3+y^3 \vdots 9$. Rezultă atunci că $3xy \vdots 9$, adică $xy = (3a+1)(3b-1) \vdots 3$, ceea ce este imposibil. În concluzie, ecuaţia dată nu are soluţii întregi.

VII.136. *Numerele întregi x, y şi z verifică relaţia $17x + 5y - 2z = 0$. Arătaţi că numărul*

$$A = \frac{(3x+y)(z-x)(2x+2y+z)(3y+3z-x)}{210}$$

este natural, pătrat perfect.

Mihai Haivas, Iaşi

Soluţie. Cum $z = \frac{17x+5y}{2} = 8x + 2y + \frac{x+y}{2}$, rezultă că $x + y = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$. Atunci $y = 2n - x$ şi $z = 5n + 6x$, deci $A = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot (x+n)^2 \cdot (3n+2x)^2}{210} = [(x+n)(3n+2x)]^2$ şi concluzia se impune.

Clasa a VIII-a

VIII.130. *Date fiind punctele A, B şi C, determinaţi punctele P din spaţiu cu proprietatea că $PA^2 + PB^2 - PC^2 = AB^2 - AC^2 - BC^2$.*

Dan Popescu, Suceava

Soluţie. Fie M mijlocul segmentului AB; folosind teorema medianei în triunghiurile PAB şi CAB, obţinem că $PA^2 + PB^2 = 2PM^2 + \frac{1}{2}AB^2$, iar $AC^2 + BC^2 = 2CM^2 + \frac{1}{2}AB^2$. Înlocuind în relaţia din enunţ, găsim că $2(PM^2 + CM^2) = PC^2$. Cu teorema medianei în $\triangle CMP$, avem că $2(PM^2 + CM^2) = 4MN^2 + PC^2$, unde N este mijlocul segmentului CP. Atunci $4MN^2 = 0$, de unde $N = M$. În concluzie, singurul punct P cu proprietatea din problemă este simetricul lui C faţă de mijlocul lui AB.

Notă. Cazul triunghiului dreptunghic în C, situaţie în care relaţia din eunţ devine $PA^2 + PB^2 = PC^2$, constituie obiectul uneia dintre problemele de la *Concursul Naţional de Matematică, R.D.G. 1982*, problemă ce apare şi în *G.M. 11/2000.* A se vedea şi problema înrudită G5 din *RecMat 2/2001.*

VIII.131. *Demonstraţi că* $\sqrt{(1-x)(1+y)} + \sqrt{(1+x)(1-y)} \le \sqrt{4-(x+y)^2}$, $\forall x, y \in [-1, 1]$.

Rodica Pop şi Ovidiu Pop, Satu Mare

Soluţie. Inegalitatea din enunţ se scrie echivalent:

$$(1-x)(1+y) + (1+x)(1-y) + 2\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \le 4-(x+y)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0 \le 2 - x^2 - y^2 - 2\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \Leftrightarrow 0 \le (\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2})^2,$$

inegalitate adevărată. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $y = \pm x$.

VIII.132. *Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ şi $\sqrt{a^2+ab+b^2} + \sqrt{a^2+ac+c^2} + \sqrt{b^2+bc+c^2} = \sqrt{3}(a+b+c)$, arătaţi că $a = b = c$.*

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

Soluţie. Se arată uşor că $\sqrt{a^2+ab+b^2} \ge \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b)$, egalitatea realizându-se când $a = b$. Scriind inegalităţile similare şi sumând, deducem că $\sum \sqrt{a^2+ab+b^2} \ge \sqrt{3}(a+b+c)$. Cum se atinge egalitatea, rezultă că $a = b = c$.

VIII.133. *Fie* $E(x,y,z) = \frac{(1+x)(1+y)}{1+\sqrt{xy}} + \frac{(1+y)(1+z)}{1+\sqrt{yz}} + \frac{(1+z)(1+x)}{1+\sqrt{zx}}$.

a) Arătaţi că $E(x,y,z) \ge x+y+z+3$, $\forall x, y, z \in (0,1)$.

b) Arătaţi că $E(x,y,z) \le x+y+z+3$, $\forall x, y, z \in (1, \infty)$.

Ion Nedelcu, Ploieşti şi Liviu Smarandache, Craiova

Soluţie. a) Dacă $x, y \in (0,1)$, atunci $\frac{(1+x)(1+y)}{1+\sqrt{xy}} \ge 1 + \frac{x+y}{2}$ (după calcule, această inegalitate revine la $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2(\sqrt{xy}-1) \le 0$). Scriind încă două inegalităţi analoage şi adunând membru cu membru, obţinem că $E(x,y,z) \ge x+y+z+3$, cu egalitate când $x = y = z$.

b) Pentru $x, y \in (1, \infty)$, avem că $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2(\sqrt{xy} - 1) \geq 0$, deci $\dfrac{(1+x)(1+y)}{1+\sqrt{xy}} \leq 1 + \dfrac{x+y}{2}$ etc.

VIII.134. *Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ sunt laturile unui triunghi, demonstraţi că* $a^{a^2+2ac} \cdot b^{b^2+2ab} \cdot c^{c^2+2bc} < \left(\dfrac{a+b+c}{2}\right)^{(a+b+c)^2}$.

Răzvan Ceucă, elev, Iaşi

Soluţie. Împărţind ambii membri prin cantitatea din dreapta, inegalitatea de demonstrat devine

$$\left(\frac{2a}{a+b+c}\right)^{a^2+2ac}\left(\frac{2b}{a+b+c}\right)^{b^2+2ab}\cdot\left(\frac{2c}{a+b+c}\right)^{c^2+2bc}<1.$$

Cum $a < b + c$ (inegalitatea triunghiului), rezultă că $\dfrac{2a}{a+b+c} < 1$. Exponentul $a^2 + 2ac$ fiind strict pozitiv, obţinem că primul factor al produsului precedent este subunitar. Procedând analog pentru ceilalţi doi factori, încheiem soluţia problemei.

VIII.135. *Fie $n \geq 2$ un număr natural fixat şi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numere reale pozitive astfel încât $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$. Găsiţi cea mai mică şi cea mai mare valoare ale expresiei $E = \sqrt{x_1 + x_1x_2} + \sqrt{x_2 + x_2x_3} + \ldots \sqrt{x_n + x_nx_1}$.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Folosind inegalitatea mediilor $MG \leq MA$, obţinem:

$$\begin{aligned}E\cdot\sqrt{2} &= \sqrt{2x_1(x_2+1)}+\sqrt{2x_2(x_3+1)}+\ldots+\sqrt{2x_n(x_1+1)} \leq \\ &\leq \frac{1}{2}[(2x_1+x_2+1)+(2x_2+x_3+1)+\ldots+(2x_n+x_1+1)] = \\ &= \frac{1}{2}[3(x_1+x_2+\ldots+x_n)+n] = 2n \Rightarrow E \leq n\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Pentru $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$, avem că $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$ şi $E = n\sqrt{2}$, prin urmare $E_{\max} = n\sqrt{2}$.

Evident că $E \geq \sqrt{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} = \sqrt{n}$ şi, cum pentru $x_1 = n$, $x_2 = \ldots = x_n = 0$ avem că $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$ şi $E = \sqrt{n}$, rezultă că $E_{\min} = \sqrt{n}$.

VIII.136. *Fie $m, n \in \mathbb{Z}$, $m < n$ şi $x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}$ numere întregi dinstincte două câte două, cuprinse între $2m$ şi $2n$. Demonstraţi că printre numerele $x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}$ ori există unul egal cu $m + n$, ori există două având suma $2m + 2n$.*

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

Soluţie. Cum $2m < x_k < 2n$, $\forall k = \overline{1, n-m}$, atunci $2m < 2m + 2n - x_k < 2n$, $\forall k = \overline{1, n-m}$. Astfel, $x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}, 2m{+}2n{-}x_1, 2m{+}2n{-}x_2, \ldots, 2m{+}2n{-}x_{n-m}$ sunt $2n - 2m$ numere întregi cuprinse între $2m$ şi $2n$, primele $n - m$ şi ultimele $n - m$ fiind distincte. Însă între $2m$ şi $2n$ există exact $2m - 2n - 1$ numere întregi, prin urmare două dintre numerele de mai sus vor fi egale: există $i, j \in \{1, 2, \ldots, n-m\}$ astfel încât $x_i = 2m + 2n - x_j$. În cazul în care $i = j$, avem că $x_i = m + n$. Dacă $i \neq j$, atunci $x_i + x_j = 2m + 2n$.

Clasa a IX-a

IX.116. *Rezolvaţi în numere întregi ecuaţia* $8x^3 + y^3 + 12xy = 8$.

Vasile Chiriac, Bacău

Soluţie. Cu notaţiile $s = 2x + y$, $p = 2xy$, ecuaţia dată se scrie succesiv:

$$(2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2) + 12xy - 8 = 0 \Leftrightarrow s(s^2 - 3p) + 6p - 8 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (s - 2)(s^2 + 2s + 4) - 3p(s - 2) = 0 \Leftrightarrow (s - 2)(s^2 + 2s + 4 - 3p) = 0.$$

Dacă $s = 2$, obţinem soluţiile $x = m$, $y = 2 - 2m$, $m \in \mathbb{Z}$. Dacă $s \neq 2$, atunci $(s + 1)^2 + 3 - 2p = 0$, deci $s + 1 \vdots 3$. Rezultă că $s = 3k - 1$, $k \in \mathbb{Z}$, apoi $p = 3k^2 + 1$. Numerele $2x$ şi y vor fi soluţiile ecuaţiei $t^2 - (3k-1)t + (3k^2+1) = 0$, cu discriminantul $\Delta = -3(k + 1)^2 < 0$, prin urmare în acest caz nu obţinem soluţii întregi. În final, ecuaţia dată are soluţiile $(m, 2 - 2m)$, $m \in \mathbb{Z}$.

IX.117. *Determinaţi funcţiile* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *cu proprietatea că* $f(x + y) = f(x) + f(y) + 3xy(x + y)$, $\forall x, y \in \mathbb{N}$.

Mihály Bencze, Braşov

Soluţie. O soluţie evidentă este funcţia $f_0(x) = x^3$, $\forall x \in \mathbb{N}$. Dacă f verifică ecuaţia funcţională din enunţ, funcţia $g(x) = f(x) - x^3$, $x \in \mathbb{N}$, verifică ecuaţia Cauchy $g(x + y) = g(x) + g(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{N}$. Atunci $g(x) = \alpha x$, unde $\alpha = g(1) \in \mathbb{N}$, prin urmare $f(x) = x^3 + \alpha x$, $\forall x \in \mathbb{N}$, unde $\alpha \in \mathbb{N}$.

IX.118. *Dacă* $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$, *demonstraţi că are loc inegalitatea*

$$\sum_{cyclic} \frac{\sqrt{xy}}{x + y} \geq 2 \sum_{cyclic} \frac{z\sqrt{xy}}{(x + z)(y + z)}.$$

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Relaţia $\dfrac{\sqrt{xz}}{x + z} + \dfrac{\sqrt{yz}}{y + z} \geq 4 \cdot \dfrac{z\sqrt{xy}}{(x + z)(y + z)}$ este echivalentă cu $\sqrt{x}(y + z) + \sqrt{y}(x + z) \geq 4\sqrt{xyz}$ şi, cum $y + z \geq 2\sqrt{yz}$ şi $x + z \geq 2\sqrt{xz}$, are loc inegalitatea anunţată. Scriem încă două inegalităţi analoage şi, prin adunare, rezultă inegalitatea din enunţ.

IX.119. *Fie* P *un punct în interiorul triunghiului echilateral* ABC *şi* P_1, P_2, P_3 *proiecţiile lui pe laturile triunghiului. Dacă* G *este centrul de greutate al triunghiului* ABC, *demonstraţi că mijlocul* G_1 *al segmentului* PG *este centru de greutate pentru triunghiul* $P_1P_2P_3$.

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. Vom folosi următoarele proprietăţi uzuale:

(1) G este centrul de greutate al $\triangle ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$;

(2) Dacă $P \in IntABC$ şi G este centrul de greutate al $\triangle ABC$, atunci $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 3\overrightarrow{PG}$;

(3) Dacă $\triangle ABC$ este echilateral atunci, cu notaţiile din enunţ, are loc egalitatea $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 2(\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} + \overrightarrow{PP_3})$.

Întrucât $\overrightarrow{G_1P_1}+\overrightarrow{G_1P_2}+\overrightarrow{G_1P_3}=(\overrightarrow{G_1P}+\overrightarrow{PP_1})+(\overrightarrow{G_1P}+\overrightarrow{PP_2})+(\overrightarrow{G_1P}+\overrightarrow{PP_3})=$ $3\overrightarrow{G_1P}+(\overrightarrow{PP_1}+\overrightarrow{PP_2}+\overrightarrow{PP_3})\overset{(3)}{=}\frac{3}{2}\overrightarrow{GP}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})\overset{(2)}{=}\frac{3}{2}\overrightarrow{GP}+\frac{3}{2}\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{0}$, din (1) rezultă că G_1 este centrul de greutate al triunghiului $P_1P_2P_3$.

IX.120. *Fie P un punct în interiorul triunghiului ABC astfel încât $\widehat{PAB}\equiv\widehat{PBC}\equiv\widehat{PCA}$. Dacă $AB\cdot\overrightarrow{AP}+BC\cdot\overrightarrow{BP}+CA\cdot\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{0}$, arătaţi că $\triangle ABC$ este echilateral.*

Claudiu Mândrilă, elev, Târgovişte

Soluţie. Fie φ măsura comună a unghiurilor din enunţ. Vectorii $AB\cdot\overrightarrow{AP}$ şi $AP\cdot\overrightarrow{AB}$ au acelaşi modul, deci se obţin unul din celălalt printr-o rotaţie de unghi φ. Raţionând analog pentru ceilalţi doi termeni ai sumei, rezultă că vectorul $AP\cdot\overrightarrow{AB}+BP\cdot\overrightarrow{BC}+CP\cdot\overrightarrow{CA}$ se obţine din $AB\cdot\overrightarrow{AP}+BC\cdot\overrightarrow{BP}+CA\cdot\overrightarrow{CP}$ printr-o rotaţie de unghi φ, prin urmare $AP\cdot\overrightarrow{AB}+BP\cdot\overrightarrow{BC}+CP\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{0}$. De aici, $(AP-PB)\cdot\overrightarrow{AB}+(BP-PC)\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$, aşadar $PA=PB=PC$ şi atunci P este centrul cercului circumscris $\triangle ABC$. În aceste condiţii, $m(\widehat{BPC})=2m(\widehat{A})$; însă $m(\widehat{BPC})=180^\circ-m(\widehat{PBC})-m(\widehat{PCB})=180^\circ-\varphi-[m(\widehat{C})-\varphi]=180^\circ-m(\widehat{C})=m(\widehat{A})+m(\widehat{B})$ şi deducem că $\widehat{A}\equiv\widehat{B}$. Analog se arată că $\widehat{B}=\widehat{C}$, adică $\triangle ABC$ este echilateral.

Clasa a X-a

X.116. *O urnă conţine x bile roşii şi $n-x$ bile verzi, unde $x,n\in\mathbb{N}^*$, $x<n$. $\frac{x}{3}$ bile roşii şi $\frac{x}{2}$ bile verzi sunt marcate cu 1, iar celelalte bile sunt marcate cu 2. Din urnă se extrage o bilă şi se consideră evenimentele A: "obţinem o bilă roşie" şi B: "obţinem o bilă marcată cu 1".*

a) Determinaţi n şi x pentru care A şi B sunt evenimente independente.

b) Aflaţi $P(\overline{B}|\overline{A})$.

Laurenţiu Modan, Bucureşti

Soluţie. Se impune ca $x\,\vdots\,3$ şi $x\,\vdots\,2$, deci $x=6k$, $k\in\mathbb{N}^*$, iar $n-x>\frac{x}{2}$, aşadar $x\in\left\{1,2,\ldots,\left[\frac{2n}{3}\right]\right\}$.

a) Evenimentele A şi B sunt independente când $P(A)\cdot P(B)=P(A\cap B)$, adică $\frac{x}{n}\cdot\frac{5x}{6n}=\frac{x}{3n}$. Obţinem că $5x=2n$, prin urmare $x=6k$, $n=15k$, $k\in\mathbb{N}^*$.

b) Avem că $P(\overline{B}|\overline{A})=\dfrac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{A})}$, unde $P(\overline{A})=1-P(A)=\dfrac{n-x}{n}$, iar $P(\overline{A}\cap\overline{B})=\dfrac{n-x-\frac{x}{2}}{n}=\dfrac{2n-3x}{2n}$, deci $P(\overline{B}|\overline{A})=\dfrac{2n-3x}{2(n-x)}$.

X.117. *Demonstraţi că $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}>\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.*

Ionuţ Ivănescu, Craiova

Soluţie. Amplificând în ambii membri cu expresiile conjugate, observăm că ar fi suficient să dovedim că $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}<\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{(n+1)n}+\sqrt[3]{n^2}$; vom arăta că $\sqrt{n+1} \leq \sqrt[3]{(n+1)^2}$ (1) şi că $\sqrt{n} < \sqrt[3]{(n+1)n} + \sqrt[3]{n^2}$ (2). Ridicând ambii membri la puterea a şasea, (1) revine la $(n+1)^3 \leq (n+1)^4$, adevărat pentru $n \in \mathbb{N}^*$. Apoi, din inegalitatea mediilor, $\sqrt[3]{n(n+1)} + \sqrt[3]{n^2} \geq 2\sqrt[6]{n^3(n+1)} > \sqrt[6]{n^3} = \sqrt{n}$, deci are loc şi (2) şi cu aceasta soluţia problemei este completă.

X.118. *Determinaţi $n \in \mathbb{N}$ pentru care*

$$\sin^{2n} x + \cos^{2n} x + n \sin^2 x \cos^2 x = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ani Drăghici şi Ileana Mândruleanu, Craiova

Soluţie. Pentru $x = \dfrac{\pi}{4}$, relaţia din enunţ devine $\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{n}{4} = 1$, sau $1 + (n-4) \cdot 2^{n-3} = 0$. Această egalitate nu poate avea loc pentru $n \geq 4$. Pentru $n = 0$, condiţia din ipoteză devine $2 = 1$, fals. Pentru $n = 1$, obţinem că $1 + \sin^2 x \cos^2 x = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, imposibil. Se verifică imediat că identitatea din enunţ este adevărată pentru $n = 2$ şi $n = 3$, valori care constituie soluţiile problemei.

X.119. *Demonstraţi că pentru orice $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ are loc inegalitatea*

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2 \geq |z_1 + z_2 + z_3|^2 + \mathrm{Im}(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1).$$

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

Soluţie. Se ştie (sau se arată uşor) că $|z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2 - |z_1 + z_2 + z_3|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2$, deci rămâne să dovedim că

$$(*) \qquad |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 \geq \mathrm{Im}(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1).$$

Pornim de la inegalitatea evidentă $\sum |z_1 - i\overline{z}_2|^2 \geq 0$, care se scrie sub forma $\sum (z_1 - i\overline{z}_2)(\overline{z}_1 + iz_2) \geq 0$, sau $2\sum |z_1|^2 + \sum i(z_1 z_2 - \overline{z}_1 \overline{z}_2) \geq 0$. Însă $z - \overline{z} = 2i \cdot \mathrm{Im}\, z$, $\forall z \in \mathbb{C}$, prin urmare $i(z - \overline{z}) = -2\mathrm{Im}\, z$, $\forall z \in \mathbb{C}$, deci obţinem că $2 \cdot \sum |z_1|^2 - 2\sum \mathrm{Im}\, z_1 z_2 \geq 0$, adică tocmai inegalitatea (*).

X.120. *Fie $ABCD$ un patrulater înscris în cercul $\mathcal{C}(M, R)$, având $m(\widehat{BOC}) \leq 90°$, unde $\{O\} = AC \cap BD$. Demonstraţi că*

$$AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 \geq AC \cdot BD - 4R^2.$$

Când se realizează egalitatea?

Florin Stănescu, Găeşti

Soluţie. Notăm: $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = e$, $BD = f$, $m(\widehat{AB}) = 2x$, $m(\widehat{BC}) = 2y$, $m(\widehat{CD}) = 2z$, $m(\widehat{DA}) = 2t$. Cu teorema sinusurilor în triunghiurile ABC şi ACD, obţinem că $a = 2R\sin x$, $b = 2R\sin y$, $c = 2R\sin z$, $d = 2R\sin t$. Cum $ABCD$ este inscriptibil, $ef = ac + bd$ (teorema lui Ptolemeu) şi atunci inegalitatea de demonstrat devine

$$4R^2(\sin^2 x - \sin^2 y + \sin^2 z - \sin^2 t) \geq 4R^2(\sin x \sin z + \sin y \sin t - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{1 - \cos 2y}{2} + \frac{1 - \cos 2z}{2} - \frac{1 - \cos 2t}{2} \geq \frac{\cos(x - z) - \cos(x + z)}{2} +$$

$+\dfrac{\cos(y-t)-\cos(y+t)}{2}-1 \Leftrightarrow (\cos 2y+\cos 2t)-(cos2x+\cos 2z)\geq$
$\geq \cos(x-z)+\cos(y-t)-2 \Leftrightarrow 2\cos(y+t)\cos(y-t)-2\cos(x+z)\cos(x-z)\geq$
$\geq \cos(x-z)+\cos(y-t)-2 \Leftrightarrow \cos(y-t)[2\cos(y+t)-1]+\cos(x-z)\cdot$
$\cdot [2\cos(y+t)-1]\geq -2 \Leftrightarrow [2\cos(y+t)-1]\cdot 2\cos\dfrac{y-t+x-z}{2}\cos\dfrac{y-t-x+z}{2}\geq$
$\geq -2 \Leftrightarrow [2\cos(y+t)-1]\cdot\sin(t+z)\cdot\sin(y+z)\geq -1.$

(Pe parcurs am folosit faptul că $x+y+z+t=\pi$.) Observăm că $2\cos(y+t)-1=2\cos(\widehat{BOC})-1\in[-1,1]$, întrucât $\cos(\widehat{BOC})\in[0,1]$, apoi $\sin(t+z)=\sin B\in(0,1]$, $\sin(z+y)=\sin A\in(0,1]$, deci ultima inegalitate este adevărată.

Se realizează egalitatea când $\cos(\widehat{BOC})=0$, $\sin B=1$ şi $\sin A=1$, adică $\widehat{BOC}=90°$, $\widehat{B}=90°$, $\widehat{A}=90°$, prin urmare în cazul în care $ABCD$ este pătrat.

Clasa a XI-a

XI.116. *a) Fie $\alpha\in\mathbb{R}_+$ şi $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $det(\alpha I_2+A^2)=0$; demonstraţi că $\det A=\alpha$.*

b) Arătaţi că există $\alpha\in\mathbb{R}^*_-$ şi $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $det(\alpha I_2+A^2)=0$ şi $detA\neq\alpha$.

Dan Popescu, Suceava

Soluţie. a) Fie $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, iar $u=a+d=\operatorname{tr}A$, $v=ad-bc=\det A$. Cum $A^2=uA-vI_2$, atunci $\alpha I_2+A^2=uA+(\alpha-v)I_2=\begin{pmatrix}ua+(\alpha-v) & ub\\ uc & ud+(\alpha-v)\end{pmatrix}$, prin urmare $\det(\alpha I_2+A^2)=u^2v+ua(\alpha-v)+ud(\alpha-v)+(\alpha-v)^2+(\alpha-v)^2=u^2\alpha+(\alpha-v)^2$. Deoarece u^2, $\alpha, (\alpha-v)^2\in\mathbb{R}_+$, suma precedentă este nulă numai dacă $\alpha-v=0$, adică $\det A=\alpha$.

b) De exemplu, putem considera $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ şi $\alpha=-1$; atunci $\det(\alpha I_2+A^2)=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix}=0$, iar $\det A=2\neq\alpha$.

XI.117. *Dacă $a,b\in\mathbb{R}^*_+$, arătaţi că $ax\geq\ln(bx+1)$, $\forall x\in\left(-\dfrac{1}{b},\infty\right)$ dacă şi numai dacă $a=b$.*

Dumitru Săvulescu, Bucureşti

Soluţie. Dacă $a=b$, cu notaţia $y=ax\in(-1,\infty)$, ar trebui să dovedim că $y\geq\ln(y+1)$, fapt binecunoscut. Reciproc, fie $f:(-\dfrac{1}{b},\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax-\ln(bx+1)$. Cum $f(x)\geq 0=f(0)$, $\forall x\in\left(-\dfrac{1}{b},\infty\right)$, rezultă că $x=0$ este punct de minim local al lui f, prin urmare $f'(0)=0$. Dar $f'(x)=a-\dfrac{b}{bx+1}$, deci $f'(0)=a-b$ şi deducem că $a=b$.

XI.118. *Fie $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ numere reale pentru care limita $l=\lim\limits_{x\to\infty}(\alpha_1\{x\}+$*

$\alpha_2\left\{x+\dfrac{1}{2}\right\}+\alpha_3\left\{x+\dfrac{2}{3}\right\}+\alpha_4\{3x\})$ *este finită (unde* $\{\cdot\}$ *desemnează partea fracționară). Arătați că* $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+3\alpha_4=0$.

Marius Drăgan, București

Soluţie. Se știe că o funcție continuă și periodică ce are limita finită la $+\infty$ este constantă; în cazul nostru, deducem că $\alpha_1\{x\}+\alpha_2\left\{x+\dfrac{1}{3}\right\}+\alpha_3\left\{x+\dfrac{2}{3}\right\}+\alpha_4\{3x\}=c$, $\forall x\in\mathbb{R}$, unde c este o constantă. Dând lui x valorile $0, \dfrac{1}{3}$ și $\dfrac{2}{3}$, obținem că $\alpha_2+2\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_3=3c$, de unde $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=c$. Atunci $c(\{x\}+\left\{x+\dfrac{1}{3}\right\}+\left\{x+\dfrac{2}{3}\right\}-1)+\alpha_4\{3x\}=0$ și, folosind identitatea lui Hermite, rezultă că $(c+\alpha_4)\{3x\}=0$, adică $\alpha_4=-c$ și de aici concluzia problemei.

XI.119. *Se consideră șirul* $(u_n)_{n\geq 0}$ *definit prin* $u_0=1$, $u_1=2$, $u_{n+2}=1+\dfrac{1}{4}\operatorname{arctg}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, $n\in\mathbb{N}^*$. *Arătați că șirul este convergent și aflați-i limita.*

Moubinool Omarjee, Paris

Soluţie. Observăm că $u_n\in\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$, $\forall n\geq 2$. Fie $a=1+\dfrac{\pi}{16}=1+\dfrac{1}{4}\operatorname{arctg}1$; vom demonstra prin inducție că $|u_n-a|<\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$, $\forall n\geq 2$. Avem că $|u_2-a|=\dfrac{1}{4}|\operatorname{arctg}2-\operatorname{arctg}1|\leq\dfrac{1}{4}|2-1|<\left(\dfrac{3}{4}\right)^2$, $|u_3-a|=\dfrac{1}{4}|\operatorname{arctg}\dfrac{u_2}{2}-\operatorname{arctg}1|\leq\dfrac{1}{4}\left|\dfrac{u_2}{2}-1\right|=\dfrac{1}{32}|\operatorname{arctg}2-4|=\dfrac{1}{32}(4-\operatorname{arctg}2)<\dfrac{1}{32}\cdot 4\leq\left(\dfrac{3}{4}\right)^3$. Presupunând relația adevărată pentru $n-1$ și $n-2$, obținem $|u_n-a|=\dfrac{1}{4}\left|\operatorname{arctg}\dfrac{u_{n-1}}{u_{n-2}}-\operatorname{arctg}1\right|\leq\dfrac{1}{4}\left|\dfrac{u_{n-1}}{u_{n-2}}-1\right|<\dfrac{1}{4}|u_{n-1}-u_{n-2}|\leq\dfrac{1}{4}(|u_{n-1}-a|+|u_{n-2}-a|)<\dfrac{1}{4}\left[\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}+\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-2}\right]=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-2}\cdot\dfrac{7}{4}<\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$, ceea ce încheie justificarea inegalității anunțate. Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n=0$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a=1+\dfrac{\pi}{16}$.

XI.120. *Fie* $k,a,b\in(0,\infty)$, $a<b$ *și șirurile* $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ *definite prin* $x_1=a$, $y_1=b$, $x_{n+1}=\dfrac{k^2+kx_n+x_ny_n}{y_n}$, $y_{n+1}=\dfrac{k^2+ky_n+x_ny_n}{x_n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

a) Demonstrați că $x_n<\dfrac{k^2+2ka+ab}{b-a}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

b) Arătați că șirurile date au limite și determinați aceste limite.

Lucian Tuțescu și Mircea Tereujanu, Craiova

Soluţie. a) Avem că $x_{n+1}=\dfrac{(k+x_n)(k+y_n)}{y_n}-k$, $\Rightarrow\dfrac{1}{k+x_{n+1}}=\dfrac{y_n}{(k+x_n)(k+y_n)}$ și analog $\dfrac{1}{k+y_{n+1}}=\dfrac{x_n}{(k+x_n)(k+y_n)}$. Atunci $\dfrac{1}{k+x_{n+1}}-\dfrac{1}{k+y_{n+1}}=\dfrac{y_n-x_n}{(k+x_n)(k+y_n)}=\dfrac{1}{k+x_n}-\dfrac{1}{k+y_n}$, prin urmare șirul $a_n=\dfrac{1}{k+x_n}-\dfrac{1}{k+y_n}$ este constant. Cum

$a_1 = \dfrac{1}{k+a} - \dfrac{1}{k+b} = \dfrac{b-a}{(k+a)(k+b)}$, rezultă că $\dfrac{1}{k+x_n} = \dfrac{b-a}{(k+a)(k+b)} + \dfrac{1}{k+y_n} > \dfrac{b-a}{(k+a)(k+b)}$, întrucât $y_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Deducem că $x_n + k < \dfrac{(k+a)(k+b)}{b-a}$, de unde $x_n < \dfrac{k^2+2ka+ab}{b-a}$, c.c.t.d.

b) Deoarece $x_{n+1} - x_n = \dfrac{k^2+kx_n}{y_n} > 0$ şi $y_{n+1} - y_n = \dfrac{k^2+ky_n}{x_n} > 0$, şirurile din problemă sunt strict crescătoare, deci au limită: $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $l' = \lim y_n$, cu $l, l' > 0$. Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit: $x_n \in \left[a, \dfrac{k^2+2ka+ab}{b-a}\right)$, deci $l \in \mathbb{R}_+^*$. Dacă, prin absurd, $l' \in \mathbb{R}_+^*$, prin trecere la limită în relaţia $x_{n+1} = \dfrac{k^2+kx_n+x_ny_n}{y_n}$ rezultă că $l = \dfrac{k^2+kl+ll'}{l'}$, de unde $k^2+kl=0$; atunci $l=-k<0$, fals. Rămâne că $l' = +\infty$. Trecând acum la limită în relaţia $\dfrac{1}{k+x_n} = \dfrac{b-a}{(k+a)(k+b)} + \dfrac{1}{k+y_n}$, obţinem că $\dfrac{1}{k+l} = \dfrac{b-a}{(k+a)(k+b)}$, deci $l = \dfrac{k^2+2ka+ab}{b-a}$.

Clasa a XII-a

XII.116. *Determinaţi funcţia $f : \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_8$ cu proprietatea că*

$$f(3x) + f(5x) + f(7x) = 3x^2 + 5x + 6, \quad \forall x \in \mathbb{Z}_8.$$

Bogdan Chiriac, student, Iaşi

Soluţie. Înlocuim succesiv pe x cu $3x, 5x$ şi $7x$ în relaţia din enunţ; adunând cele trei egalităţi obţinute şi ţinând seama de ipoteză, obţinem că $3f(x)+2(3x^2+5x+6) = x^2+3x+2$. Prin înmulţire cu 3, rezultă că $f(x) = x^2+3x+2$, $\forall x \in \mathbb{Z}_8$.

XII.117. *Aflaţi $n \in \mathbb{N}$ pentru care există $\alpha \in \mathbb{R}_-^*$ astfel încât* $\displaystyle\int_{\alpha-1}^{\alpha} (2t^3+3)dt = n$.

Romeo Cernat, Iaşi

Soluţie. Avem că $\displaystyle\int_{\alpha-1}^{\alpha}(2t^3+3)dt = \left(\frac{t^4}{2}+3t\right)\Bigg|_{\alpha-1}^{\alpha} = 2\alpha^3 - 3\alpha^2 + 2\alpha + \frac{5}{2}$. Ecuaţia din enunţ se scrie sub forma $f(\alpha) = 0$, unde $f(\alpha) = 2\alpha^3 - 3\alpha^2 + 2\alpha + \left(\dfrac{5}{2} - n\right)$. Întrucât $f'(\alpha) = 6\alpha^2 - 6\alpha + 2 \neq 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, ecuaţia $f(\alpha) = 0$ are o unică soluţie reală, iar aceasta se află în intervalul $(-\infty, 0)$ dacă şi numai dacă $f(0) > 0$. Condiţia $f(0) = \dfrac{5}{2} - n > 0$ conduce la valorile căutate ale lui n, anume $n \in \{0, 1, 2\}$.

XII.118. *Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \ln\frac{a+1}{a}$, unde $a \in (0,1)$ este dat. Demonstraţi că există $x_0 \in (0,1)$ astfel încât $\dfrac{1}{x_0+1} < f(x_0) < \dfrac{1}{x_0}$.*

Bogdan Victor Grigoriu, Fălticeni

Soluţie. Cum $\int_0^1 \frac{1}{x+a}dx = \ln\frac{a+1}{a}$, funcţia f are proprietatea că $\int_0^1 \Big(f(x) - \frac{1}{x+a}\Big)dx = 0$. Fie $g(x) = f(x) - \frac{1}{x+a}$, $x \in [0,1]$ funcţie continuă, iar G o primitivă sa; atunci $G(1) = G(0)$ şi, cum G este derivabilă pe $[0,1]$, sunt îndeplinite condiţiile teoremei lui Rolle. Obţinem că există $x_0 \in (0,1)$ pentru care $G'(x_0) = 0$, adică $f(x_0) = \frac{1}{x_0+a}$. Deoarece $a \in (0,1)$, rezultă că $\frac{1}{x_0+1} < \frac{1}{x_0+a} < \frac{1}{x_0}$, de unde cerinţa problemei.

XII.119. *Demonstraţi că* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(n^2+1^2)(n^2+2^2)\cdot\ldots\cdot(n^2+n^2)}}{n^2} = \frac{2}{e^2}\cdot e^{\frac{\pi}{2}}$.

Adrian Corduneanu, Iaşi

Soluţie. Considerăm funcţia continuă, deci integrabilă, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x^2)$. Integrând prin părţi, obţinem că $I = \int_0^1 \ln(1+x^2)dx = x\ln(1+x^2)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx = \ln 2 - 2\left(1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx\right) = \ln 2 + \frac{\pi}{2} - 2$. Considerând şirul de diviziuni $\Delta_n = (x_0 = \frac{0}{n}, x_1 = \frac{1}{n}, \ldots, x_n = \frac{n}{n})$ cu şirul normelor tinzând la zero, observăm că $s_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k) = \frac{1}{n}\ln\left[\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right] = \ln\frac{\sqrt[n]{(n^2+1)(n^2+2^2)\cdot\ldots\cdot(n^2+n^2)}}{n^2}$ este un şir de sume Riemann a cărui limită este egală cu I. Astfel, limita şirului din enunţ este $e^I = \frac{2}{e^2}\cdot e^{\frac{\pi}{2}}$.

XII.120. *Fie* $f : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ *o funcţie continuă cu* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, *astfel încât oricare ar fi* $n \in \mathbb{N}^*$, *există un unic* $x_n \in \mathbb{R}_+^*$ *pentru care* $\int_0^{x_n} \frac{\ln(1+f(t))}{f(t)}dt = \int_0^n \frac{\sin f(t)}{f(t)}dt$. *Calculaţi* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}$.

Florin Stănescu, Găeşti

Soluţie. Considerăm şirul $a_n = \frac{1}{n}\int_0^n \frac{\sin f(t)}{f(t)}dt$, $n \in \mathbb{N}^*$. Folosind lema Stolz-Cesàro şi teorema de medie, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+1} \frac{\sin f(t)}{f(t)}dt = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin f(c_n)}{f(c_n)}$, cu $n < c_n < n+1$. Cum $c_n \to \infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Utilizând acum teorema lui Lagrange şi inegalitatea $\ln(1+t) \le t$, $\forall t \in [0,\infty)$, deducem că $\int_0^{x_n} \frac{\ln(1+f(t))}{f(t)}dt = F(x_n) - F(0) = x_n \cdot F'(y_n) = x_n \cdot \frac{\ln(1+f(y_n))}{f(y_n)} < x_n \cdot 1 = x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (unde $F(t)$ este o primitivă a funcţiei $\frac{\ln(1+f(t))}{f(t)}$. Astfel, $x_n > \int_0^{x_n} \frac{\ln(1+f(t))}{f(t)}dt = \int_0^n \frac{\sin f(t)}{f(t)}dt = n \cdot a_n \to \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, prin urmare

$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Întrucât $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, avem că $(1 + f(t))^{\frac{1}{f(t)}} > 2$ pentru $t > t_0$ convenabil ales, deci $\int_0^x \frac{\ln(1+f(t))}{f(t)} > \int_0^x \ln 2 \to \infty$ când $x \to \infty$. În calculul limitei $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\ln(1+f(t))}{f(t)} dt$ vom putea aplica regula lui l'Hospital (cazul $\frac{\infty}{\infty}$) şi obţinem că limita este egală cu $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+f(x))}{f(x)} = 1$.

În relaţia $\frac{1}{n}\int_0^n \frac{\sin f(t)}{f(t)} dt = \frac{x_n}{n} \cdot \frac{1}{x_n} \int_0^{x_n} \frac{\ln(1+f(t))}{f(t)} dt$ facem pe n să tindă la ∞ şi, conform celor de mai sus, rezultă că $1 = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}\right) \cdot 1$, aşadar $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = 1$.

Recreaţii ... matematice

(*continuare de la pag. 147*)

2. *Asteroizi cu nume de români* - toţi aceştia fac parte din centura principală de asteroizi situată între Marte şi Jupiter

- **2331 Parvulesco** (*Constantin Pârvulescu* (1890-1945) şi copii săi Carina şi Antares), cu diametrul estimat între 11 şi 24 km şi cu o rotaţie în jurul Soarelui la 3,78 ani;
- **4268 Grebenikov** (*Eugeniu Grebenicov*, n. 1932, Basarabia), cu diametrul 5-12 km şi o rotaţie în jurul Soarelui în 4,28 ani;
- **6429 Brâncuşi**, cu diametrul de 4-9 km şi o rotaţie în 3,16 ani;
- **9253 Oberth** (*Herman Iulius Oberth*, 1894-1989), cu diametrul până la 6 km;
- **9403 Sanduleak** (*Nicolae Sanduleak*, 1933-1990), cu diametrul până la 6 km, o rotaţie în 4 ani;
- **9493 Enescu**, cu diametrul până la 9 km;
- **9494 Donici** (*Nicolae Donici*, 1875-1957, membru fondator al UAI);
- **9495 Eminescu**, cu diametrul până la 6 km şi o rotaţie în 3,23 ani;
- **10 034 Birlan** (*Mirel Bîrlan*, n. 1963, Giurgiu);
- **12 498 Dragesco** (*Jean Dragesco*, n. 1920), cu diametrul de cel mult 10 km.

3. *Comete cu nume de români*

- **Cometa Daimaca 1943c** (*Victor Daimaca*, 1892-1969, Turnu Severin);
- **Cometa van Gent-Peltier-Daimaca 1943W1**.