XII.110. *Fie $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ polinoame neconstante, astfel încât P şi Q au aceleaşi rădăcini, iar $P-1$ şi $Q-1$ au şi ele aceleaşi rădăcini. Arătaţi că $P = Q$.*

Adrian Reisner, Paris

Soluţie. Fie $n = grP$, $m = grQ$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ rădăcinile lui P, de multiplicităţi $k_1, \ldots, k_p$, iar $\beta_1, \ldots, \beta_r$ rădăcinile lui $P-1$, de multiplicităţile $l_1, \ldots, l_r$. Notăm cu D şi Δ cei mai mari divizori comuni ai perechilor de polinoame (P, P'), respectiv $(P-1, P')$. Cum D şi Δ divid P şi $P-1$, iar $(P, P-1) = 1$, atunci $(D, \Delta) = 1$. Însă $D|P', \Delta|P'$, prin urmare $D \cdot \Delta|P'$, deci $gr(D \cdot \Delta) \leq n-1$. Pe de altă parte, $gr\, D = \sum\limits_{i=1}^{p}(k_i - 1) = n - p$, $gr\, \Delta = \sum\limits_{i=1}^{r}(l_i - 1) = n - r$, aşadar $2n - p - r \leq n - 1$, adică $p + r \geq n + 1$. Procedând asemănător în cazul lui Q, obţinem că $p + r \geq m + 1$.

Observăm că $P - Q = (P-1) - (Q-1)$ este un polinom care se anulează în $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_r$, iar aceste numere sunt distincte, întrucât $(P, P-1) = 1$. Rezultă că $P - Q$ are cel puţin $p + r$ rădăcini, cu $p + r \geq \max\{m, n\} + 1$. Însă $gr(P-Q) \leq \max\{m, n\}$, prin urmare $P - Q = 0$, deci $P = Q$.

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor propuse în nr. 1/2010

A. Nivel gimnazial

G156. *Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$, cu $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n} = 1$. Arătaţi că $\dfrac{1}{a_1^3 + a_2^2} + \dfrac{1}{a_2^3 + a_3^2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n^3 + a_1^2} < \dfrac{1}{2}$.*

Angela Ţigăeru, Suceava

Soluţie. Din datele problemei rezultă că $a_i \in (1, \infty)$, $\forall i = \overline{1, n}$, prin urmare $\dfrac{1}{a_1^3 + a_2^2} < \dfrac{1}{1 + a_2^2} \leq \dfrac{1}{2a_2}$. Procedând analog cu ceilalţi termeni şi sumând inegalităţile obţinute, rezultă cerinţa problemei.

G177. *Fie $k > 0$ şi $a, b, c \in [0, +\infty)$ astfel încât $a + b + c = 1$. Demonstraţi că $\dfrac{a}{a^2 + a + k} + \dfrac{b}{b^2 + b + k} + \dfrac{c}{c^2 + c + k} \leq \dfrac{9}{9k + 4}$.*

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie (**Gheorghe Iurea**). Sensul inegalităţii din enunţ, să o numim (I), depinde de parametrul $k > 0$; pentru $k = 0{,}01$, $a = 0{,}1$, $b = 0{,}2$, $c = 0{,}7$ inegalitatea este falsă. Cu notaţia $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + x + k}$, $x > 0$, şi având în vedere condiţia $a + b + c = 1$, (I) se scrie $f(a) + f(b) + f(c) \leq 3f\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)$ şi va fi adevărată pentru valorile lui k pentru care funcţia f este concavă (inegalitatea lui Jensen). Cum $f''(x) = \dfrac{2(x^3 - 3kx - k)}{(x^2 + x + k)^3}$, $x > 0$, problema revine la a găsi valorile lui k pentru care $g(x) = x^3 - 3kx - k \leq 0$, $x \in (0, 1)$. Ecuaţia de gradul trei $g(x) = 0$ are discriminantul

$\Delta = k^2\left(\dfrac{1}{4}-k\right)$ (a vedea, de exemplu, **Viorel Gh. Vodă** - *Miraculoasele ecuaţii*, 1987; pp. 39-43). Dacă $k=\dfrac{1}{4}$ (i.e. $\Delta = 0$), avem $g(x)=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2(x-1)$ şi rezultă că $f''(x)<0$, $x\in(0,1)$, adică f este concavă pe intervalul $(0,1)$; în acest caz, are loc (I). Dacă $k>\dfrac{1}{4}$ (i.e. $\Delta>0$), ecuaţia $g(x)=0$ are o singură rădăcină reală, care este pozitivă; mai mult, ea este >1, deoarece $g(1)=1-4k<0$ şi $g(+\infty)>0$. În acest caz, f va fi concavă şi are loc (I). Dacă $k<\dfrac{1}{4}$ (i.e. $\Delta<0$), ecuaţia $g(x)=0$ are trei rădăcini reale, dar numai una pozitivă, s-o numim x_1; $x_1\in(0,1)$, deoarece $g(0)=-k<0$ şi $g(1)=1-4k>0$. Cum $g\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{27}-2k$, deducem că: pentru $k<\dfrac{1}{54}$ avem $g\left(\dfrac{1}{3}\right)>0$ şi, deci, $x_1<\dfrac{1}{3}$; pentru $k>\dfrac{1}{54}$ avem $g\left(\dfrac{1}{3}\right)<0$ şi $x_1>\dfrac{1}{3}$. Ca urmare, dacă $k>\dfrac{1}{54}$ inegalitatea (I) are loc pe intervalul $(0,x_1)$, iar dacă $k<\dfrac{1}{54}$ are loc pe $(x_1,1)$ inegalitatea inversată.

G178. *Dacă $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, arătaţi că* $\dfrac{1-n}{n}\le\{nx\}-\{x\}<\dfrac{n-1}{n}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Cum inegalitatea se păstrează dacă înlocuim pe x cu $x+1$, este suficient să o demonstrăm pentru $x\in[0,1)$. În acest caz, există $k\in\{1,2,\dots,n\}$ pentru care $x\in\left[\dfrac{k-1}{n},\dfrac{k}{n}\right)$, deci $\{nx\}=nx-(k-1)$, iar $\{x\}=x$. Inegalitatea este echivalentă cu $\dfrac{nk-2n+1}{n(n-1)}\le x<\dfrac{nk-1}{n(n-1)}$, ceea ce este adevărat, întrucât $\left[\dfrac{k-1}{n},\dfrac{k}{n}\right)\subset\left[\dfrac{nk-2n+1}{n(n-1)},\dfrac{nk-1}{n(n-1)}\right)$. În partea stângă, egalitatea se realizează pentru $x\in\left\{p-\dfrac{1}{n}\,\middle|\,p\in\mathbb{Z}\right\}$.

G179. *Determinaţi numerele prime a,b,c,d şi numărul $p\in\mathbb{N}^*$, astfel încât* $a^{2^p}+b^{2^p}+c^{2^p}=d^{2^p}+3$.

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

Soluţie. Nu putem avea $d=2$ deoarece, în caz contrar, a,b şi c ar fi cel puţin egale cu d şi membrul stâng ar fi strict mai mare decât cel drept. Rezultă că d este un număr prim impar, deci suma din stânga va fi pară. Atunci un termen va fi sigur par (şi atunci va fi egal cu 2; să spunem că $a=2$), iar ceilalţi doi vor avea aceeaşi paritate.

Dacă b,c sunt pare, atunci $b=c=2$, iar ecuaţia devine $3\cdot2^{2^p}=d^{2^p}+3$. Deducem că d se divide cu 3 şi fiind, prim, obţinem că $d=3$, iar $2^{2^p}=3^{2^p-1}+1$. Această egalitate se realizează pentru $p=1$, iar dacă $p\ge2$, membrul drept este strict mai mare decât cel stâng.

Dacă b,c sunt impare, atunci b^{2^p},c^{2^p} şi d^{2^p} vor fi de forma M_4+1, prin urmare membrul stâng al egalităţii din enunţ va fi de forma M_4+3, iar cel drept se divide cu 4, contradicţie. Rămâne că singura soluţie este $(a,b,c,d,p)=(2,2,2,3,1)$.

G180. *Aflaţi restul împărţirii numărului* $S = 2010^{2009!} + 2009^{2008!} + \ldots + 2^{1!} + 1^{0!}$ *prin* 41.

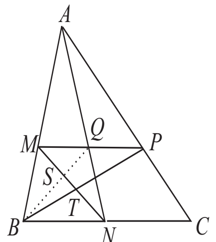
Răzvan Ceucă, elev, Iaşi

Soluţie. Dacă a este un număr care nu se divide cu 41 (care este prim), din mica teoremă a lui Fermat obţinem că $a^{40} \equiv 1(\bmod 41)$. Dacă $a \geq 6$, atunci $(a-1)!$ se divide cu 40, prin urmare $a^{(a-1)!} \equiv 1(\bmod 41)$ pentru orice $a \geq 6$ care nu se divide cu 41. Dacă b se divide cu 41, evident că $b^{(b-1)!} \equiv 0(\bmod 41)$. Atunci suma $A = 2010^{2009!} + 2009^{2008!} + \ldots + 6^{5!}$ este, modulo 41, congruentă cu $1 + 0 + (\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{40 \text{ de } 1} + 0) \cdot 48 + (\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{35 \text{ de } 1}) = 1956$, deci $A \equiv 29(\bmod 41)$. Rămâne să împărţim la 41 primii cinci termeni ai sumei, aflând fiecare rest. Avem că $1^{0!} \equiv 1(\bmod 41)$, $2^{1!} \equiv 2(\bmod 41)$, $3^{2!} \equiv 9(\bmod 41)$, $4^{3!} = 4096 \equiv 37(\bmod 41)$, iar $5^{4!} = 125^8 = (M_{41} + 2)^8 = M_{41} + 2^8 = M_{41} + 256 = M_{41} + 10$, deci $5^{41} \equiv 10(\bmod 41)$. În concluzie, $S \equiv 1 + 2 + 9 + 37 + 10 + 29 \equiv 6(\bmod 41)$.

G181. *Fie* $k \geq 1$ *un număr natural dat. Arătaţi că există o infinitate de numere naturale* n *astfel încât* n^k *divide* $n!$.

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Alegem $n = pq$, unde p şi q sunt numere prime distincte, mai mari decât k. Cum $pq > kp$ şi $pq > kq$, printre numerele $1, 2, \ldots, pq$ apar toate numerele $p, 2p, \ldots, kp$, $q, 2q, \ldots, kq$, iar acestea sunt distincte, deoarece $(p, q) = 1$. Rezultă că $(pq)!$ conţine factorul p de cel puţin k ori şi, de asemenea, conţine factorul q de cel puţin k ori, prin urmare $(pq)!$ se divide cu $(pq)^k$, ceea ce trebuia demonstrat.

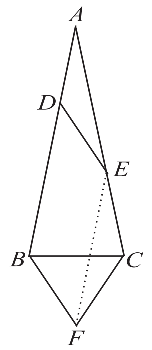


G182. *Se consideră triunghiul* ABC *şi punctele* $M \in [AB]$, $N \in [BC]$, $P \in [CA]$ *astfel încât* $MP \| BC$, *iar* $MN \| AC$. *Fie* $\{Q\} = AN \cap MP$ *şi* $\{T\} = BP \cap MN$. *Demonstraţi că* $\mathcal{A}_{AMN} = \mathcal{A}_{PTN} + \mathcal{A}_{QPC}$.

Andrei Răzvan Băleanu, elev, Motru

Soluţie (Gabriel Popa). Vom arăta, mai întâi, că $QT \| AB$. Într-adevăr, folosind asemănări evidente şi faptul că $CPMN$ este paralelogram, obţinem că $\dfrac{MQ}{QP} = \dfrac{BN}{NC} = \dfrac{BN}{MP} = \dfrac{BT}{TP}$ şi, conform reciprocei teoremei lui Thales, urmează că $QT \| MB$.

Din $AC \| MN$, rezultă că $\mathcal{A}_{AMN} = \mathcal{A}_{PMN} = \mathcal{A}_{PTN} + \mathcal{A}_{PTM}$. Cum $BC \| MP$, deducem că $\mathcal{A}_{QPC} = \mathcal{A}_{QPB}$. Rămâne să mai arătăm că $\mathcal{A}_{PTM} = \mathcal{A}_{QPB}$, ceea ce revine la $\mathcal{A}_{MQS} = \mathcal{A}_{BTS}$, unde $\{S\} = BQ \cap MT$. Însă $QT \| MB$, prin urmare $\mathcal{A}_{QBM} = \mathcal{A}_{TBM}$ şi, scăzând din ambii membri $\mathcal{A}_{SBM}$, obţinem ceea ce dorim.



G183. *Se consideră triunghiul isoscel* ABC, *cu* $AB = AC$ *şi* $m(\widehat{A}) < 30°$. *Ştiind că există* $D \in [AB]$ *şi* $E \in [AC]$ *astfel încât* $AD = DE = EC = BC$, *determinaţi măsura unghiului* $\widehat{A}$.

Vasile Chiriac, Bacău

Soluţie. Considerăm punctul F astfel încât $BDEF$ să fie paralelogram; atunci $BF = DE = AD = EC = BC$, iar $EF = BD = AB - AD = AC - EC = AE$. Din $AB \| EF$, obţinem că $\widehat{DAE} \equiv \widehat{CEF}$

(corespondente), prin urmare $\triangle ADE \equiv \triangle ECF$ (L.U.L.). Rezultă că $CE = CF$, deci $\triangle BCF$ este echilateral. Însă $m(\widehat{BFE}) = m(\widehat{BDE}) = 2m(\widehat{A})$, $m(\widehat{EFC}) = m(\widehat{A})$, aşadar $60° = m(\widehat{BFC}) = m(\widehat{BFE}) + m(\widehat{EFC}) = 3m(\widehat{A})$, de unde $m(\widehat{A}) = 20°$.

G184. *În planul xOy, considerăm punctele A_{ij} de coordonate (i,j), unde $i,j \in \{0,1,2,3,4\}$. Fie $\mathcal{P}$ mulţimea pătratelor care au toate vârfurile printre punctele A_{ij} considerate. Aflaţi lungimea minimă a unui drum care parcurge numai laturi ale pătratelor din $\mathcal{P}$ şi care uneşte punctele A_{00} şi A_{44}.*

Claudiu Ştefan Popa, Iaşi

Soluţie. Cum A_{11} şi A_{00} nu aparţin unei aceleiaşi laturi a unui pătrat din $\mathcal{P}$, un drum care pleacă din A_{00} trece fie prin A_{10}, fie prin A_{01}. Din acelaşi motiv, un drum care ajunge în A_{44} trece fie prin A_{43}, fie prin A_{34}. Drumul minim între A_{10} şi A_{43} este cel în linie dreaptă; el îndeplineşte cerinţele enunţului, întrucât $A_{10}A_{21}A_{13}A_{01}$, $A_{21}A_{32}A_{24}A_{13}$ şi $A_{32}A_{43}A_{34}A_{23}$ sunt pătrate din $\mathcal{P}$, iar $A_{10}A_{21}, A_{21}A_{32}$ şi $A_{32}A_{43}$ sunt laturi ale lor. Analog pentru drumul între A_{01} şi A_{34}. Drumul în linie dreaptă între A_{10} şi A_{34} sau cel între A_{01} şi A_{43} nu conţin doar laturi ale pătratelor din $\mathcal{P}$ şi sunt, oricum mai lungi decât celelalte, întrucât $2\sqrt{5} > 3\sqrt{2}$. Rezultă că există două trasee minimale, ambele de lungime $2 + 3\sqrt{2}$.

G185. *Arătaţi că există o colorare a planului cu n culori, unde $n \geq 2$ este un număr natural dat, astfel încât orice segment din plan să conţină puncte colorate cu fiecare dintre cele n culori.*

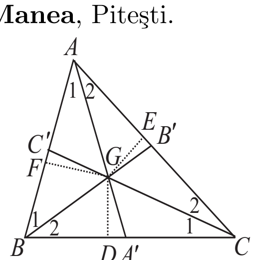
Paul Georgescu şi Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Considerăm $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ numere iraţionale, astfel încât raportul oricăror două dintre aceste numere să fie tot număr iraţional. Alegerea unor astfel de numere este posibilă, cunoscut fiind faptul că mulţimea numerelor iraţionale este nenumărabilă. Fixăm un punct în plan O şi colorăm toate cercurile de centru O şi rază qx_1, unde $q \in \mathbb{Q}^*$, cu prima culoare; apoi, toate cercurile de centru O şi rază qx_2, $q \in \mathbb{Q}^*$, cu a doua culoare ş.a.m.d., folosind astfel primele $n-1$ culori. Toate punctele planului rămase le colorăm cu a n-a culoare şi, în acest fel, obţinem o colorare cu proprietatea dorită. Într-adevăr, intervalul $[a,b]$ - unde $a = \min\{OP | P \in [AB]\}$, $b = \max\{OP | P \in [AB]\}$, $[AB]$ fiind un segment oarecare, dar fixat - conţine puncte de forma $q_i x_i$, $q_i \in \mathbb{Q}^*$, pentru fiecare $i = \overline{1, n-1}$, şi aceste puncte nu acoperă întregul interval, deci segmentul $[AB]$ va conţine puncte colorate cu fiecare dintre cele n culori.

B. Nivel liceal

Notă. Când numărul 2/2010 al revistei era sub tipar, am primit soluţii corecte ale problemelor **L171** şi **L174** din partea domnului **Cosmin Manea**, Piteşti.

L176. *Fie D, E, F proiecţiile centrului de greutate G al triunghiului ABC pe dreptele BC, CA, respectiv AB. Arătaţi că cevienele AD, BE şi CF sunt concurente dacă şi numai dacă triunghul este isoscel.*



Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Dacă $\triangle ABC$ este isoscel, se constată uşor că AD, BE şi CF sunt concurente. Reciproc, să presupunem că cele trei ceviene sunt concurente; atunci, conform teoremei lui Ceva, forma trigonometrică, are loc egalitatea $\cos A_1 \cdot \cos B_1 \cdot \cos C_1 = \cos A_2 \cdot \cos B_2 \cdot \cos C_2$ (notaţiile sunt cele din figură). Folosind teorema cosinusului şi teorema medianei în triunghiul $B'BC$ obţinem că

$$\cos B_2 = \frac{a^2 + m_b^2 - \frac{b^2}{4}}{2am_b} = \frac{1}{2am_a}\left(a^2 + \frac{2a^2+2c^2-b^2}{4} - \frac{b^2}{4}\right) = \frac{3a^2-b^2+c^2}{4am_a}.$$

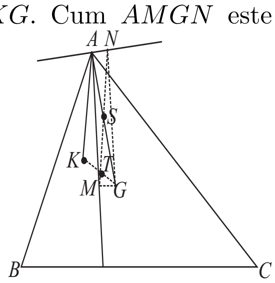
Scriind încă cinci relaţii analoage şi înlocuind în teorema lui Ceva, deducem că $(3a^2 - b^2+c^2)(3b^2-c^2+a^2)(3c^2-a^2+b^2) = (3a^2-c^2+b^2)(3b^2-a^2+c^2)(3c^2-b^2+a^2)$. După înmulţiri şi reduceri de termeni, rezultă că $a^2b^4 - a^4b^2 + b^2c^4 - b^4c^2 + c^2a^4 - c^4a^2 = 0$, adică $(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2) = 0$, de unde $a = b$ sau $b = c$ sau $c = a$, deci $\triangle ABC$ este isoscel.

În cazul în care $\triangle ABC$ ar fi obtuzunghic, poate apărea cazul în care una dintre proiecţiile lui G se află în afara triunghiului; se utlizează segmente orientate şi se procedează analog.

L177. *Considerăm triunghiul ABC, G centrul său de greutate, iar K punctul de intersecţie al simedianelor. Notăm cu M şi N proiecţiile lui G pe bisectoarea interioară şi pe cea exterioară ale unghiului $\widehat{A}$, iar P şi Q sunt proecţiile lui K pe bisectoarele interioară, respectiv exterioară, ale unghiului $\widehat{A}$. Demonstraţi că dreptele GK, MN şi PQ sunt concurente.*

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Fie $\{S\} = MN \cap AG$, iar $\{T\} = MN \cap KG$. Cum $AMGN$ este dreptunghi, rezultă că $\widehat{NMA} \equiv \widehat{MAG}$. Deoarece AG şi AK sunt izogonale, avem că $\widehat{MAG} \equiv \widehat{MAK}$. Deducem că $\widehat{NMA} \equiv \widehat{MAK}$, deci dreptele MN şi AK vor fi paralele. Punctul S fiind mijlocul lui AG, din reciproca teoremei liniei mijlocii urmează că T este mijlocul lui KG. Analog se demonstrează că PQ trece prin mijlocul lui KG şi astfel dreptele MN, PQ şi KG sunt concurente în T.



L178. *Fie $ABCD$ un romb de latură 1 şi punctele $A_1 \in (AB)$, $B_1 \in (BC), C_1 \in (CD)$, $D_1 \in (DA)$. Demonstraţi că $A_1B_1^2 + B_1C_1^2 + C_1D_1^2 + D_1A_1^2 \geq 2\sin^2 A$.*

Neculai Roman, Mirceşti, Iaşi

Soluţie. Fie $x = AA_1$, $y = BB_1$, $z = CC_1$ şi $t = DD_1$. Cu teorema cosinusului, obţinem că $E = A_1B_1^2 + B_1C_1^2 + C_1D_1^2 + D_1A_1^2 = [(1-x)^2 + y^2 + 2(1-x)y\cos A] + [(1-y)^2 + z^2 - 2(1-y)z\cos A] + [(1-z)^2 + t^2 + 2(1-z)t\cos A] + [(1-t)^2 + x^2 - 2(1-t)x\cos A] = 2(x^2+y^2+z^2+t^2) - 2(xy - yz + zt - tx)\cos A - 2(x+y+z+t) - 2(x-y+z-t)\cos A + 4$. Privind pe E ca trinom de gradul doi în x, minimul se atinge când $x = \dfrac{1 + \cos A + (y-t)\cos A}{2}$, deci când $2x - y\cos A + t\cos A = 1 + \cos A$. Privind pe E ca trinom de gradul doi în y, z, t, minimul se va atinge când $2y - x\cos A + z\cos A = 1 - \cos A$, $2z - t\cos A + y\cos A = 1 + \cos A$, respectiv $2t - z\cos A + x\cos A = 1 - \cos A$. Cele patru egalităţi se realizează simultan dacă şi numai dacă $x = z = \dfrac{1+\cos A}{2}$, $y = t = \dfrac{1-\cos A}{2}$ şi, în acest caz, $E_{\min} = 2\sin^2 A$, de unde cerinţa problemei.

L179. *Demonstraţi că în orice triunghi are loc inegalitatea*

$$\frac{2(9R^2-p^2)}{9Rr} \geq \frac{\cos^2 A}{\sin B \sin C} + \frac{\cos^2 B}{\sin C \sin A} + \frac{\cos^2 C}{\sin A \sin B} \geq 1.$$

I.V. Maftei şi Dorel Băiţan, Bucureşti

Soluţie. Pentru inegalitatea din stânga, avem că $\Sigma\frac{\cos^2 A}{\sin B \sin C} = \frac{\Sigma \sin A \cos^2 A}{\Pi \sin A} = \frac{\Sigma \sin A - \Sigma \sin^3 A}{\Pi \sin A} \leq \frac{\Sigma \sin A - \frac{1}{9}(\Sigma \sin A)^3}{\Pi \sin A} = \frac{4 \cdot \Pi \cos\frac{A}{2} - \frac{64}{9}\Pi \cos^3 \frac{A}{2}}{8\Pi \sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} = \frac{\frac{p}{R} - \frac{p^3}{9R^3}}{\frac{2pr}{4R^2}} = \frac{2(9R^2-p^2)}{9Rr}$. Să demonstrăm acum inegalitatea din dreapta:

$$\Sigma\frac{\cos^2 A}{\sin B \sin C} \geq \frac{(\Sigma \cos A)^2}{\Sigma \sin B \sin C} = \frac{(\frac{R+r}{R})^2}{\frac{1}{4R^2}\cdot \Sigma bc} = \frac{4(R+r)^2}{p^2+r^2+4Rr} \geq 1,$$

deoarece ultima inegalitate revine la $4R^2+4Rr+3r^2 \geq p^2$, adică la cunoscuta $8R^2 + 4r^2 \geq a^2+b^2+c^2$. (Am folosit pe parcurs faptul că $\Sigma bc = p^2+r^2+4Rr$.) Egalităţile se ating în cazul triunghiului echilateral.

L180. *Determinaţi numărul minim de factori din produsul* $P = \sin\frac{\pi}{4^n}\cdot\sin\frac{2\pi}{4^n}\cdot \sin\frac{3\pi}{4^n}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{(2^{2n-1}-1)\pi}{4^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, *astfel încât* $P < 10^{-9}$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Soluţie. Este cunoscută modalitatea de calcul a produsului $Q = \sin\frac{\pi}{m}\sin\frac{2\pi}{m}\cdot \sin\frac{3\pi}{m}\ldots\sin\frac{(m-1)\pi}{m}$: considerăm $x_k = \cos\frac{2k\pi}{2m} + i\sin\frac{2k\pi}{2m} = \cos\frac{k\pi}{m} + i\sin\frac{k\pi}{m}$, $k=\overline{1,m-1}$ şi $\overline{x_k} = \cos\frac{k\pi}{m} - i\sin\frac{k\pi}{m}$, $k = \overline{1,m-1}$, rădăcinile polinomului $X^{2m-2} + \ldots + X^2+1 = \frac{X^{2m}-1}{X^2-1}$, prin urmare $X^{2m-2}+\ldots+X^2+1 = \prod_{k=1}^{m-1}(X-x_k)(X-\overline{x_k}) = \prod_{k=1}^{m-1}(X^2-2X\cos\frac{k\pi}{m}+1)$. Dând lui X valoarea 1 şi efecutând calculele, obţinem că $\prod_{k=1}^{m-1}\sin\frac{k\pi}{2m} = \frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}$. Cum $\sin\frac{k\pi}{2m} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{k\pi}{2m}\right) = \cos\frac{(m-k)\pi}{2m}$, $k = \overline{1,m-1}$, deducem că $\prod_{k=1}^{m-1}\cos\frac{k\pi}{2m} = \frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}$. Atunci $Q = \prod_{k=1}^{m-1}\left(2\sin\frac{k\pi}{2m}\cdot\cos\frac{k\pi}{2m}\right) = 2^{m-1}\left(\frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}\right)^2 = \frac{m}{2^{m-1}}$, $m \geq 2$.

Observăm că $\sin\frac{(2^{2n-1}+k)\pi}{4^n} = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{4^n}\right) = \cos\frac{k\pi}{4^n} = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{k\pi}{4^n}\right) = \sin\frac{(2^{2n-1}-k)\pi}{4^n}$, $\forall k = \overline{0, 2^{2n-1}-1}$. Atunci, pentru $m = 4^n$, produsul Q poate fi scris sub forma

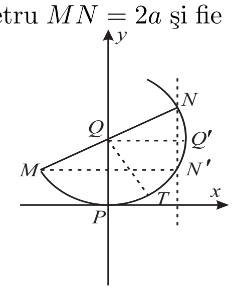
$$Q = \left(\prod_{k=1}^{2^{2n-1}-1} \sin \frac{k\pi}{4^n} \right) \cdot \left(\prod_{k=2^n}^{4^n-1} \sin \frac{k\pi}{4^n} \right) = \left(\prod_{k=1}^{2^{2n-1}-1} \sin \frac{k\pi}{4^n} \right)^2 = P^2,$$

prin urmare $P^2 = \dfrac{4^n}{2^{4^n-1}} = \dfrac{1}{2^{4^n-2n-1}}$. Dorim ca $P^2 < 10^{-18}$, deci se impune condiţia $2^{4^n-2n-1} > 10^{18}$. Obţinem că $4^n - 2n - 1 > \dfrac{18}{\lg 2}$, iar valoarea minimă a lui n pentru care are loc această inegalitate este $n = 4$. Rezultă că numărul minim căutat de factori din P este $2^7 - 1 = 127$.

L181. *Fie P un punct de pe frontiera circulară a unui semidisc, iar d tangenta în P la această frontieră. Notăm cu $\mathcal{C}$ corpul de rotaţie care se obţine prin rotirea semidiscului în jurul dreptei d. Studiaţi variaţia volumului lui $\mathcal{C}$, funcţie de poziţia punctului P.*

Paul Georgescu şi Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie (Gheorghe Iurea). Considerăm semidiscul de diametru $MN = 2a$ şi fie Q şi T mijloacele segmentului MN, respectiv arcului $\widehat{MN}$. Notăm cu $\mathcal{V}(P)$ volumul corpului obţinut prin rotirea semidiscului în jurul tangentei în P la el. Evident că, dacă $P \in \widehat{MT}$ iar P' este simetricul lui P faţă de QT, atunci $\mathcal{V}(P') = \mathcal{V}(P)$; vom calcula deci $\mathcal{V}(P)$ doar pentru $P \in \widehat{MT}$.



Raportăm spaţiul la un reper $Pxyz$ şi considerăm $Q(0, a, 0)$, unde $a > 0$ este raza discului din care face parte semidiscul. Considerăm semidiscul inclus în planul xPy şi fie $x_N = t \in [0, a]$.

Dacă $P = M$ (deci $t = 0$), ecuaţia arcului $\widehat{MT}$ este $y = a - \sqrt{a^2 - x^2}$, ecuaţia arcului $\widehat{TN}$ este $y = a + \sqrt{a^2 - x^2}$, deci $\mathcal{V}(P) = \pi \displaystyle\int_0^a [(a + \sqrt{a^2 - x^2})^2 - (a - \sqrt{a^2 - x^2})^2]dx = 4a\pi \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx = a^3\pi^2$.

Dacă $P \in \widehat{MT} \backslash \{M, T\}$ (deci $t \in (0, a)$), atunci, cu notaţiile din figura alăturată, $N(t, a + \sqrt{a^2 - t^2})$, $N'(t, a - \sqrt{a^2 - t^2})$, $M(-t, a - \sqrt{a^2 - t^2})$, ecuaţiile arcelor $\widehat{MQ'}$ şi $\widehat{Q'N}$ sunt $y = a - \sqrt{a^2 - x^2}$, respectiv $y = a + \sqrt{a^2 - x^2}$, iar ecuaţia dreptei MN este $y = a + \dfrac{\sqrt{a^2 - t^2}}{t} x$. Astfel, $\mathcal{V}(P) = \pi \int_{-t}^{t} \left[\left(a + x \dfrac{\sqrt{a^2 - t^2}}{t} \right)^2 - (a - \sqrt{a^2 - x^3})^2 \right] dx + \pi \displaystyle\int_t^a [(a + \sqrt{a^2 - x^3})^2 - (a - \sqrt{a^2 - x^2})^2]^{-t} dx = a^2\pi \left(a\pi - \frac{4t}{3} \right)$.

Dacă $P = T$ (deci $t = a$), atunci $\mathcal{V}(P) = \pi \int_{-a}^{a} [a^2 - (a - \sqrt{a^2 - x^2})^2]dx = a^3\pi \left(\pi - \dfrac{4}{3} \right)$. În concluzie, $\mathcal{V}(P) = a^2\pi \left(a\pi - \dfrac{4t}{3} \right)$, $\forall t \in [0, a]$, iar această funcţie (care este liniară în t, cu panta negativă) îşi atinge maximul în primul caz.

L182. *Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un şir de numere întregi cu proprietatea că $x_{n+2} - 5x_{n+1} + x_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că, dacă un termen al şirului se divide cu 22, atunci o infinitate* *de termeni au această proprietate.*

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Modulo 22, au loc egalităţile: $x_{n+2} \equiv 5x_{n+1} - x_n$, $x_{n+3} \equiv 2x_{n+1} - 5x_n$, $x_{n+4} \equiv 5x_{n+1} - 2x_n$, $x_{n+5} \equiv x_{n+1} - 5x_n$, $x_{n+6} \equiv -x_n$. Observăm astfel că, dacă x_{n_0} se divide cu 22, atunci se vor divide cu 22 toţi termenii şirului de forma x_{n_0+6k}, $k \in \mathbb{N}$, de unde decurge concluzia problemei.

Notă. Dl. **Titu Zvonaru** observă că are loc un rezultat ceva mai general decât cel din enunţul problemei, anume:

Fie $a \geq 1$ un număr natural, $b = a^3 - 3a$, iar $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere întregi definit prin $x_{n+2} - ax_{n+1} + x_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ şi $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$. Dacă un termen al şirului se divide cu b, o infinitate de termeni ai şirului au această proprietate.

Această generalizare a fost găsită şi de către dl. Marian Tetiva, care a trimis-o redacţiei odată cu problema L182; s-a preferat publicarea cazului particular.

L183. *Considerăm numerele $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi polinomul $p(X) = X^2 + aX + 1$. Arătaţi că există un polinom cu coeficienţi întregi q_n şi un număr întreg b_n, astfel încât $p(X)q_n(X) = X^{2n} + b_nX^n + 1$.*

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Demonstrăm prin inducţie că există $b_n \in \mathbb{Z}$ şi $q_n \in \mathbb{Z}[X]$, astfel încât $X^{2n} + 1 = (X^2 + aX + 1)q_n(X) - b_nX^n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Putem considera $b_1 = a$, $q_1(X) = 1$; $b_2 = 2 - a^2$, $q_2(X) = X^2 - aX + 1$. Presupunem afirmaţia adevărată pentru $k \leq n$ şi o demonstrăm pentru $k = n + 1$. Deoarece $X^{2n+2} + 1 = (X^2 + 1)(X^{2n} + 1) - X^2(X^{2n-2} + 1)$, rezultă că $X^{2n+2} + 1 = (X^2 + 1)((X^2 + aX + 1)q_n(X) - b_nX^n) - X^2((X^2 + aX + 1) \cdot q_{n-1}(X) - b_{n-1}X^{n-1}) = (X^2 + aX + 1)((X^2 + 1)q_n(X) - X^2q_{n-1}(X)) - b_nX^n(X^2 + 1) + b_{n-1}X^{n+1} = (X^2 + aX + 1)((X^2 + 1)q_n(X) - X^2q_{n-1}(X) - b_nX^n) + X^{n+1}(b_na + b_{n-1}) = (X^2 + aX + 1)q_{n+1}(X) - b_{n+1}X^{n+1}$, unde $b_{n+1} = -ab_n - b_{n-1}$, iar $q_{n+1}(X) = (X^2 + 1)q_n(X) - X^2q_{n-1}(X) - b_nX^n$ şi astfel demonstraţia este completă.

L184. *Arătaţi că funcţia $f : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2 + 2xy - x - 3y + 2}{2}$, este bijectivă.*

Silviu Boga, Iaşi

Soluţie. Avem că $f(x, y) = \dfrac{(x + y - 2)(x + y - 1) + 2x}{2} = [1 + 2 + \ldots + (x + y - 2)] + x \in \mathbb{N}^*$, $\forall (x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, deci f este bine definită. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există o unică pereche $(x_n, y_n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $f(x_n, y_n) = n$, anume $x_n = n - \binom{p}{2}$, $y_n = 1 - p - x_n$, unde $p = \left[\dfrac{1 + \sqrt{8n}}{2}\right]$. Rezultă astfel că f este bijectivă. De fapt, definirea lui f a fost inspirată de procedeul diagonal al lui Cantor; se observă că $f(1, 1) = 1$, $f(1, 2) = 2$, $f(2, 1) = 3$, $f(1, 3) = 4$, $f(2, 2) = 5$, $f(3, 1) = 6$, $f(1, 4) = 7$, $f(2, 3) = 8$ etc.

L185. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că $|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ dacă şi numai dacă $\lim\limits_{x\to 0} xf(x) = 0$.*

Adrian Zahariuc, student, Princeton

Soluţie. O implicaţie este evidentă, deci ne vom ocupa doar de cea de-a doua. Vom demonstra mai întâi că, dacă $\lim\limits_{x\to 0} xf(x) = 0$, atunci $\limsup\limits_{x\to 0} |f(x)| < +\infty$. Pentru aceasta, să presupunem prin absurd că există un şir $x_n \to 0$ astfel încât $f(x_n) \to \pm\infty$. Deducem că $x_n + \dfrac{1}{f(x_n)} \to 0$; conform inegalităţii din enunţ, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \left(f(x_n + \dfrac{1}{f(x_n)}\right) - f(x_n) - f\left(\dfrac{1}{f(x_n)}\right) = 0$, de unde

$$\lim_{n\to\infty} \left(x_n + \frac{1}{f(x_n)}\right)\left(f\left(x_n + \frac{1}{f(x_n)}\right) - f(x_n) - f\left(\frac{1}{f(x_n)}\right)\right) = 0.$$

Însă $\lim\limits_{n\to\infty} \left(x_n + \dfrac{1}{f(x_n)}\right) f\left(x_n + \dfrac{1}{f(x_n)}\right) = 0$ şi

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left(x_n + \frac{1}{f(x_n)}\right)\left(f(x_n) + f\left(\frac{1}{f(x_n)}\right)\right) &= \\ = 1 + \lim_{n\to\infty} x_n f(x_n) \cdot \frac{1}{f(x_n)} \cdot f\left(\frac{1}{f(x_n)}\right) &= 1\end{aligned}$$

şi astfel se ajunge la o contradicţie. Rămâne că $\limsup\limits_{x\to 0} |f(x_n)| < \infty$.

Se observă uşor că $f(2x) = 2f(x)$, deci

$$\limsup_{x\to 0} |f(x)| = \limsup_{x\to 0} |f(2x)| = 2\limsup_{x\to 0} |f(x)|.$$

Deducem că $\limsup\limits_{x\to 0} |f(x)| = 0$, deci $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, ceea ce trebuia demonstrat.

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor propuse în nr. 2/2010

A. Nivel gimnazial

G186. *Fie m, n, x, y numere naturale nenule astfel încât $m < n$, $\dfrac{m+n}{(m,n)}$ este număr par, iar $x^m = y^n$. Demonstraţi că $x - y$ nu este pătrat perfect.*

Geanina Hăvârneanu, Iaşi

Soluţie. Cum $x^m = y^n$, numerele x şi y au aceeaşi factori primi distincţi în descompunerile lor: $x = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_t^{\alpha_t}$, $y = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots p_t^{\beta_t}$, cu $m\alpha_i = n\beta_i$, $\forall i = \overline{1,t}$. Fie $(m,n) = d$ şi $m = dr$, $n = dq$, unde $(r,q) = 1$. Cum $m + n = 2dk$, $k \in \mathbb{N}^*$, atunci $r + q = 2k$; din $r\alpha_i = q\beta_i$, $\forall i = \overline{1,t}$ şi $(r,q) = 1$, deducem că $\alpha_i = q\gamma_i$, $\beta_i = r\gamma_i$, $\gamma_i \in \mathbb{N}^*$, deci $\alpha_i - \beta_i = \gamma_i(q-r) = \gamma_i(2k-r) - r) = 2\gamma_i(k-r)$, $\forall i = \overline{1,t}$, unde $k - r = \dfrac{1}{2}(q-r) \neq 0$. Atunci $x - y = p_1^{\alpha_1} \ldots p_t^{\alpha_t}(p_1^{\alpha_1-\beta_1} \cdot \ldots \cdot p_t^{\alpha_t-\beta_t} - 1) =$

$p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_t^{\alpha_t}[(p_1^{\gamma_1(k-r)} \cdot \ldots \cdot p_t^{\gamma_t(k-r)})^2 - 1]$. Paranteza nu poate fi pătrat perfect, fiind de forma $u^2 - 1$ şi deducem că nici $x - y$ nu poate fi pătrat perfect.

G187. *Considerăm numerele naturale a, b, c, d şi x, astfel încât ac, bd şi $ad + bc$ sunt divizibile cu x. Arătaţi că bc se divide cu x.*

Ciprian Baghiu, Iaşi

Soluţie. Fie $x = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_t^{\alpha_t}$ descompunerea în factori primi a numărului x; vom demonstra că $p_i^{\alpha_i} \,|\, bc, \forall i = \overline{1, t}$. Pentru $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$ oarecare, din $x|ac$ şi $x|bd$ rezultă că $p_i^{\alpha_i}|ac$ şi $p_i^{\alpha_i}|bd$, deci $p_i^{2\alpha_i}|abcd = (ad)(bc)$. Atunci $p_i^{\alpha_i}|bc$ sau $p_i^{\alpha_i}|ad$; în cel de-al doilea caz, cum $p_i^{\alpha_i}|ad + bc$, vom avea că $p_i^{\alpha_i}|bc$. În concluzie, $p_i^{\alpha_i}|bc$, $\forall i = \overline{1, t}$, prin urmare $x|bc$.

G188. *Determinaţi tripletele $(p, q, r) \in \mathbb{Z}^3$ pentru care*

$$[a^{pq} + b^{pq} + (a^p + b^p)^q]^r = r[a^{pqr} + b^{pqr} + (a^p + b^p)^{qr}], \ \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Luând $a = 1$ şi $b = 0$ obţinem $2^r = 2r$ şi, deci, $r = 1$ sau $r = 2$. În cazul $r = 1$, se constată direct că egalitatea din enunţ este adevărată $\forall a, b \in \mathbb{R}$ şi $\forall p, q \in \mathbb{Z}$. Ca urmare, $(p, q, 1)$, $p, q \in \mathbb{Z}$, sunt soluţii ale problemei. În cazul $r = 2$, luând $a = b = 1$ obţinem $(2 + 2^q)^2 = 2(2 + 2^{2q})$ sau, după reduceri, $2^{q+2} = 2^{2q}$, de unde $q = 2$. Se arată prin calcul direct că

$$[a^{2p} + b^{2p} + (a^p + b^p)^2]^2 = 2[a^{4p} + b^{4p} + (a^p + b^p)^4], \ \ \forall a, b \in \mathbb{R}$$

şi, ca urmare, tripletele $(p, 2, 2)$, $p \in \mathbb{Z}$ sunt soluţii ale problemei. Într-adevăr, ridicând la pătrat şi apoi grupând, avem:

$$\begin{aligned}
&a^{4p} + b^{4p} + (a^p + b^p)^4 + 2a^{2p}b^{2p} + 2a^{2p}(a^p + b^p)^2 + 2b^{2p}(a^2 + b^2)^2 = \\
&= 2a^{4p} + 2b^{4p} + 2(a^p + b^p)^4 \\
&\Leftrightarrow 2a^{2p}b^{2p} + 2a^{2p}(a^p + b^p)^2 + 2b^{2p}(a^p + b^p)^2 = a^{4p} + b^{4p} + (a^p + b^p)^4 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (a^p + b^p)^2[2a^{2p} + 2b^{2p} - (a^{2p} + 2a^pb^p + b^{2p})] = a^{4p} + b^{4p} - a^{2p}b^{2p} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (a^p + b^p)^2(a^{2p} + b^{2p} - 2a^pb^p) = (a^{2p} - b^{2p})^2, \ \text{adevărată}
\end{aligned}$$

Rezumând, relaţia din enunţ este adevărată pentru $(p, q, 1)$, $p, q \in \mathbb{Z}$, şi $(p, 2, 2)$, $p \in \mathbb{Z}$.

G189. *Se consideră trei sfere având volumele v_1, v_2, v_3, ariile s_1, s_2, s_3 şi lungimile cercurilor ecuatoriale l_1, l_2, l_3. Demonstraţi că*

$$\frac{v_1}{l_1 + l_2} + \frac{v_2}{l_2 + l_3} + \frac{v_3}{l_3 + l_1} \geq \frac{1}{12\pi}(s_1 + s_2 + s_3).$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

Soluţie. Cum $v_1 = \dfrac{4\pi r_1^3}{3}$, $s_1 = 4\pi r_1^2$, $l_1 = 2\pi r_1$ şi analoagele, inegalitatea de demonstrat devine

$$\frac{r_1^3}{r_1 + r_2} + \frac{r_2^3}{r_1 + r_3} + \frac{r_3^3}{r_3 + r_1} \geq \frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2).$$

Însă $\dfrac{x^3}{x+y} \geq \dfrac{5x^2-y^2}{8}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$: după calcule, această relaţie poate fi scrisă sub forma $(3x+y)(x-y)^2 \geq 0$, ceea ce este adevărat pentru $x, y \in (0, +\infty)$, cu egalitate când $x = y$. Astfel,

$$\sum \frac{r_1^3}{r_1+r_2} \geq \frac{1}{8}\sum(5r_1^2 - r_2^2) = \frac{1}{2}(r_1^2+r_2^2+r_3^2)$$

cu egalitate când cele trei sfere sunt congruente.

G190. *Dacă x şi y sunt numere iraţionale astfel încât x^2+y, y^2+x şi $x+y$ sunt raţionale, demonstraţi că $xy < \frac{1}{4}$.*

Neculai Moraru, Suceava şi Silviu Boga, Iaşi

Soluţie. Cu notaţiile $x^2+y = A \in \mathbb{Q}$, $y^2+x = B \in \mathbb{Q}$ şi $x+y = C \in \mathbb{Q}$, avem că $A - B = C(C-1) - 2y(C-1)$, unde $A-B$, $C(C-1)$ şi $2(C-1)$ sunt raţionale, iar y este itaţional. Rezultă că $2(C-1) = 0$, prin urmare $C = 1$. Pe de altă parte, $x^2 - x \geq -\dfrac{1}{4}$ şi $y^2 - y \geq -\dfrac{1}{4}$, deci $(x^2-y)+(y^2-x) \geq -\dfrac{1}{2}$, inegalitate echivalentă cu $(x+y)^2 - 2xy - (x+y) > -\dfrac{1}{2}$. Cum $x+y = 1$, se obţine că $xy < \dfrac{1}{4}$.

G191. *Fie $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, unde $n \in \mathbb{N}, n \geq 5$. Demonstraţi că A poate fi scrisă ca reuniunea a două mulţimi disjuncte B şi C, astfel încât produsul elementelor lui B să fie egal cu suma elementelor lui C.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Căutăm B de forma $B = \{1, a, b\}$, iar $C = A \backslash B$. Din $1 \cdot a \cdot b = (1+2+\ldots+n) - (1+a+b)$, obţinem că $(a+1)(b+1) = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Dacă n este par, putem considera $a = \dfrac{n}{2} - 1$, $b = n$ (pentru $n \geq 5$, numerele 1, n şi $\dfrac{n}{2} - 1$ sunt distincte), iar dacă n este impar, luăm $a = n-1$, $b = \dfrac{n-1}{2}$ (din nou, numerele 1, $n-1$ şi $\dfrac{n-1}{2}$ sunt distincte pentru $n \geq 5$).

G192. *Demonstraţi că în orice triunghi neisoscel ABC, există $M, N \in [BC]$, $P, Q \in [AB]$ şi $R, S \in [AC]$ astfel încât segmentele $[AU], [BT]$ şi $[CV]$ sunt laturi ale unui triunghi ascuţitunghic, oricare ar fi punctele $U \in [MN], V \in [PQ]$ şi $T \in [RS]$.*

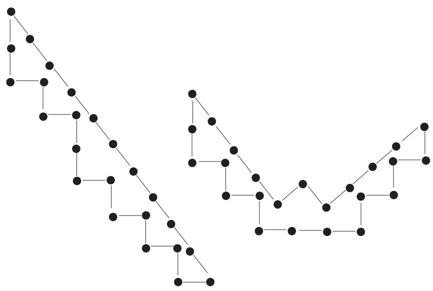
Marius Drăgan, Bucureşti

Soluţie. Dacă $u, v \in \mathbb{R}$ sunt astfel încât $0 < u < v < 2u$, atunci oricare numere $x < y < z$ din intervalul $[u, v]$ sunt laturi ale unui triunghi, întrucât $y \geq u > v - u \geq z - x$, deci $x + y > z$. Dacă, în plus, $v < u\sqrt{2}$, atunci numerele oarecare $x < y < z$ din $[u, v]$ pot forma chiar un triunghi ascuţiunghic, după cum se observă uşor.

Considerăm cazul în care laturile triunghiului ABC verifică $c < a < b$; atunci $h_b < h_a < h_c$. Dacă $D \in [BC]$, $E \in [AC]$, $F \in [AB]$ cu $AD = x$, $BE = y$, $CF = z$, avem că $h_a \leq x \leq b$, $h_b \leq y \leq a$, $h_c \leq z \leq b$. În plus, $h_c \leq a$ deoarece $\sin B \leq 1$, prin urmare $h_b < h_a < h_c \leq a < b$. Rezultă că există $M, N \in [BC]$, $P, Q \in [AB]$ şi $R, S \in [AC]$ astfel încât pentru orice $U \in [MN]$, $V \in [PQ]$ şi $T \in [RS]$, lungimile segmentelor AU, BV şi CT să aparţină intervalului $[h_c, a]$. Cum $a < \sqrt{2}h_c \left(90^\circ > B > 60^\circ > 45^\circ \Rightarrow \sin B > \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \dfrac{h_c}{a} > \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, din observaţia iniţială urmează concluzia problemei.

G193. *Folosind efectiv 24 beţe de chibrit, construiţi un poligon având aria de 7 unităţi, unde unitatea de arie este pătratul cu latura de un băţ de chibrit.* (*În legătură cu o problemă din "Amuzamente matematice" de Martin Gardner*)

Dumitru Mihalache, Bârlad

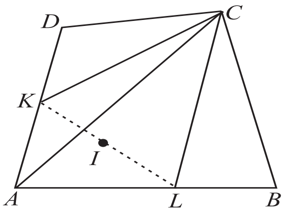


Soluţie. Prezentăm alăturat două posibile construcţii; lăsăm în seama cititorului justificarea faptului că ariile celor două poligoane sunt egale cu 7!

G194. *Fie $ABCD$ un patrulater convex, iar semidreptele $[CK$ şi $[CL$ sunt bisectoarele unghiurilor $\widehat{ACD}$, respectiv $\widehat{ACB}$ ($K \in AD, L \in AB$). Demonstraţi că dreapta LK trece prin centrul cercului înscris în triunghiul ABD dacă şi numai dacă patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil.*

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

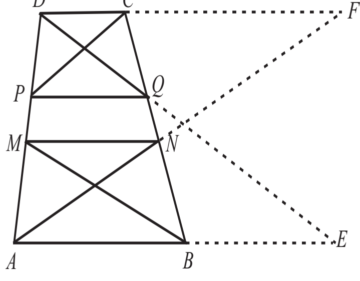
Soluţie. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABD. Folosind un rezultat demonstrat de N. Oprea în articolul *Ceviene de rang k*, în G.M. 8/1989, avem: $I \in KL \Leftrightarrow AB\dfrac{KD}{KA} + AD\dfrac{LB}{LA} = BD \Leftrightarrow AB\dfrac{CD}{CA} + AD\dfrac{BC}{AC} = BD \Leftrightarrow AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD \Leftrightarrow ABCD$ este inscriptibil.



G195. *Punctele M şi P aparţin laturii neparalele (AD) a trapezului $ABCD$, astfel încât $M \in [AP]$. Paralelele prin M şi P la baze intersectează BC în N, respectiv Q. Demonstraţi că trapezele $ABNM$ şi $PQCD$ au diagonalele respectiv paralele dacă şi numai dacă CD şi PQ sunt direct proporţionale cu MN şi AB (În legătură cu G105 din RecMat 1/2006.)*

Claudiu Ştefan Popa, Iaşi

Soluţie. Vom arăta mai întâi că $PC \| AN \Leftrightarrow DQ \| BM$. Din teorema paralelelor neechidistate deducem că $\dfrac{DP}{PM} = \dfrac{CQ}{QN}$ şi $\dfrac{PM}{AM} = \dfrac{QN}{BN}$, de unde, prin înmulţire membru cu membru, se obţine că $\dfrac{DP}{AM} = \dfrac{CQ}{BN}$. Acum, dacă $PC \| AN$, din asemănarea triunghiurilor CPD şi NAM rezultă $\dfrac{DP}{AM} = \dfrac{CD}{MN}$ şi atunci $\dfrac{CQ}{BN} = \dfrac{CD}{MN}$. Observând că $\widehat{DCQ} \equiv \widehat{MNB}$ (corespondente), rezultă că $\triangle DCQ \sim \triangle MNB$ şi cum $CD \| MN$ obţinem $DQ \| BM$. Reciproc, din $DQ \| BM$ se arată similar că $PC \| AN$.



Să arătăm, în continuare, că din $PC \| AN$ şi, deci, $DQ \| BM$, rezultă $\dfrac{CD}{MN} = \dfrac{PQ}{AB}$. Notăm

$\dfrac{DP}{AP} = \alpha$ şi $\dfrac{DM}{AM} = \beta$, de unde $\dfrac{DP}{AD} = \dfrac{\alpha}{\alpha+1}$ şi $\dfrac{AM}{AD} = \dfrac{1}{\beta+1}$. Cum $PQ \| AE$, avem $\triangle DPQ \sim \triangle DAE$, de unde $\dfrac{DP}{AD} = \dfrac{PQ}{AE}$ şi deci $\dfrac{PQ}{AE} = \dfrac{\alpha}{\alpha+1}$. Deoarece $BM \| DQ$, $\triangle ABM \sim \triangle AED$ şi atunci $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AM}{AD}$, deci $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{1}{\beta+1}$. Împărţind membru cu membru aceste egalităţi, obţinem $\dfrac{PQ}{AB} = \dfrac{\alpha(\beta+1)}{\alpha+1}$. Din asemănarea triunghiurilor AMN şi ADF deducem că $\dfrac{AM}{AD} = \dfrac{MN}{DF}$ şi ţinând cont de notaţiile făcute, rezultă $\dfrac{MN}{DF} = \dfrac{1}{\beta+1}$. Din asemănarea triunghiurilor DCP şi DFA obţinem $\dfrac{CD}{DF} = \dfrac{DP}{AD}$, deci $\dfrac{CD}{DF} = \dfrac{\alpha}{\alpha+1}$. Împărţind membru cu membru egalităţile găsite obţinem că $\dfrac{CD}{MN} = \dfrac{\alpha(\beta+1)}{\alpha+1}$. În concluzie, $\dfrac{CD}{MN} = \dfrac{PQ}{AB}$.

Reciproc, $\dfrac{CD}{MN} = \dfrac{PQ}{AB}$, să arătăm că $PC \| AN$. Presupunem, prin reducere la absurd că $PC \nparallel AN$. Fie $N' \in BC$, $N' \neq N$ astfel încât $AN' \| PC$ şi paralela prin N' la AB intersectează AD în M'. Conform celor deja demonstrate, rezultă că $\dfrac{CD}{M'N'} = \dfrac{PQ}{AB}$ şi împreună cu ipoteza asumată obţinem $MN = M'N' \Rightarrow MNN'M'$ paralelogram, de unde $MM' \| NN' \Leftrightarrow BC \| AD$, în contradicţie cu $ABCD$ trapez.

B. Nivel liceal

L186. *Determinaţi măsurile unghiurilor triunghiului ABC, ştiind că*

$$\operatorname{tg} A + 2\sqrt{tgB} + 3\sqrt[3]{\operatorname{tg} C} = 6\sqrt[6]{\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C}.$$

Cătălin Calistru, Iaşi

Soluţie. În orice triunghi ABC,

$$(*) \qquad \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C.$$

Pe de altă parte, este cunoscută inegalitatea mediilor ponderată

$$mx^{\frac{1}{m}} + ny^{\frac{1}{n}} + pz^{\frac{1}{p}} \geq (m+n+p)(xyz)^{\frac{1}{m+n+p}}, \forall m,n,p \in \mathbb{N}^*, \forall x,y,z \in \mathbb{R}_+^*$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $x^{\frac{1}{m}} = y^{\frac{1}{n}} = z^{\frac{1}{p}}$. Considerând $m=1$, $n=2$, $p=3$, $x = \operatorname{tg} A$, $y = \operatorname{tg} B$, $z = \operatorname{tg} C$, obţinem că $\operatorname{tg} A = \sqrt{\operatorname{tg} B} = \sqrt[3]{\operatorname{tg} C} = a$; înlocuind în (*), deducem că $a + a^2 + a^3 = a^6$, adică $a(a^2+1)(a^3-a-1) = 0$. Singura soluţie reală şi nenulă a acestei ecuaţii este $a_0 = \sqrt[3]{\dfrac{2}{27+3\sqrt{69}}} + \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{27+3\sqrt{69}}{2}}$ (se obţine, de exemplu, utilizând formulele lui Cardano). În concluzie, $A = \operatorname{arctg} a_0$, $B = \operatorname{arctg} a_0^2$ şi $C = \operatorname{arctg} a_0^3$.

L187. *Se consideră triunghiul ABC şi punctele $D, L \in (BC)$, $E, M \in (CA)$ şi $F, N \in (AB)$. Notăm $\{P\} = FE \cap AL$, $\{Q\} = DF \cap BM$, $\{S\} = ED \cap CN$.*

Demonstraţi că dacă două dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate, atunci este adevărată şi a treia:

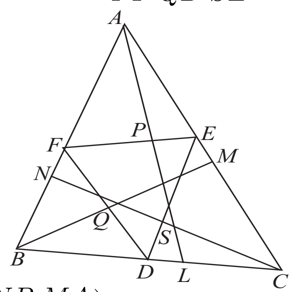
i) dreptele AD, BE şi CF sunt concurente;

ii) dreptele AL, BM şi CN sunt concurente;

iii) dreptele DP, EQ şi FS sunt concurente.

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Conform teoremei lui Ceva (directă şi reciprocă), condiţiile din enunţ sunt echivalente cu $\frac{DB}{DC}\frac{EC}{EA}\frac{FA}{FB}=1$, $\frac{LB}{LC}\frac{MC}{MA}\frac{NA}{NB}=1$, respectiv $\frac{PE}{PF}\frac{QF}{QD}\frac{SD}{SE}=1$.



Folosind (R_1) din T. Zvonaru, B. Ioniţă - *Rapoarte determinate de o ceviană şi o secantă într-un triunghi*, RecMat 1/2005, obţinem că $\frac{AF}{AB}\frac{LB}{LC}\frac{AC}{AE}\frac{PE}{PF}=1$, de unde $\frac{PE}{PF}=\frac{AB}{AF}\frac{LC}{LB}\frac{AE}{AC}$. Analog se deduc relaţiile $\frac{QF}{QD}=\frac{BC}{BD}\frac{MA}{MC}\frac{BF}{AB}$ şi $\frac{SD}{SE}=\frac{AC}{EC}\frac{NB}{NA}\frac{DC}{BC}$. Înmulţind membru cu membru aceste egalităţi, rezultă că

$$\left(\frac{PE}{PF}\frac{QF}{QD}\frac{SD}{SE}\right)=\left(\frac{FB}{FA}\frac{EA}{EC}\frac{DC}{DB}\right)\left(\frac{LC}{LB}\frac{NB}{NA}\frac{MA}{MC}\right).$$

Dacă două dintre paranteze sunt egale cu 1, atunci şi cea de-a treia este tot 1 şi de aici urmează concluzia problemei.

Nota autorului. În problema L86 din RecMat 2/2005, dreptele AD, BE şi CF sunt concurente în punctul lui Nagel. Dacă I_aL este bisectoarea unghiului BI_aC, cu teorema bisectoarei şi teorema sinusurilor, obţinem că

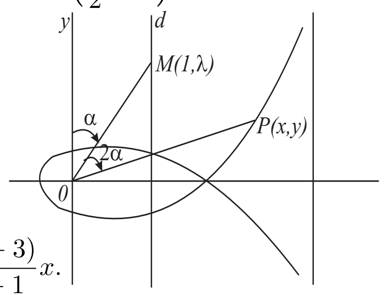
$$\frac{LB}{LC}=\frac{I_aB}{I_aC}=\frac{\sin BCI_a}{\sin CBI_a}=\frac{\sin(90^\circ-\frac{C}{2})}{\sin(90^\circ-\frac{B}{2})}=\frac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$$

şi, cu reciproca teoremei lui Ceva, rezultă că dreptele AL, BM şi CN sunt concurente.

L188. *Fie Oxy un reper cartezian, dreapta $d: x=1$ şi un punct $M\in d$. Punctul P se obţine din M printr-o rotaţie de centru O şi unghi 2α, unde α este unghiul orientat $\widehat{yOM}$. Scrieţi ecuaţia $y=f(x)$ a curbei descrise de P atunci când M parcurge dreapta d şi desenaţi graficul acestei curbe.*

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Observăm că panta dreptei OM este $\lambda=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha$, iar cea a dreptei OP este dată de $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+3\alpha\right)=-\operatorname{ctg}3\alpha=-\frac{\operatorname{ctg}^3\alpha-3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha-1}=\frac{\lambda(\lambda^2-3)}{3\lambda^2-1}$. Coordonatele punctului P, funcţie de λ, se află rezolvând sistemul format din ecuaţiile cercului $\mathcal{C}(O,OM)$ şi dreptei OP:



$$x^2+y^2=\lambda^2+1,\quad y=\frac{\lambda(\lambda^2-3)}{3\lambda^2-1}x. \tag{1}$$

Înlocuind în prima ecuaţie pe y cu expresia lui dată de a doua ecuaţie, vom obţine $x^2 = \dfrac{(3\lambda^2-1)^2}{(\lambda^2+1)^2}$. Această ecuaţie combinată cu a doua din (1) conduce la ecuaţiile parametrice ale curbei:

$$x = \frac{3\lambda^2-1}{\lambda^2+1},\ \ y = \frac{\lambda(\lambda-3)}{\lambda^2+1}. \tag{2}$$

Pentru a obţine ecuaţia explicită a curbei, din prima relaţie din (2) deducem $\lambda^2 = \dfrac{1+x}{3-x}$ şi, deci, $\lambda = \pm\sqrt{\dfrac{1+x}{3-x}}$. Înlocuind această expresie a lui λ în a doua ecuaţie din (2), obţinem ecuaţia curbei sub formă explicită:

$$y = \pm(x-2)\sqrt{\frac{1+x}{3-x}},\ x \in [-1,3). \tag{3}$$

Curba este simetrică în raport cu axa x-lor; vom studia numai variaţia ramurii cu "+". Dreapta $x = 3$ asimptotă verticală, iar punctul $x = 2, y = 0$ este un nod al curbei. Prin calcul găsim (pentru ramura "+"): $y' = -\sqrt{\dfrac{3-x}{1+x}}\dfrac{(x-2)^2-3}{(3-x)^2}$. Suntem conduşi la următorul tabel al variaţiei funcţiei:

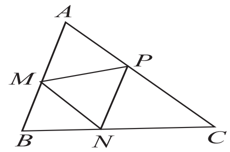
x	-1		$2-\sqrt{3}$		2		3
y'	|	-	0	+		+	|
y	0	$\searrow$	$-\sqrt{6\sqrt{3}-9}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Graficele ramurii studiate şi ale celei simetrice sunt indicate pe figură. Curba obţinută este de tip *strofoidă*.

L189. *Un sistem de $n \geq 3$ puncte coplanare $A_1, A_2, \ldots, A_n$, oricare trei necoliniare, se numeşte bun atunci când oricare ar fi $1 \leq i < j < k \leq n$ şi oricare ar fi punctele $M \in [A_iA_j]$, $N \in [A_jA_k]$ şi $P \in [A_kA_i]$, are loc inegalitatea $MN^2 + NP^2 + MP^2 \leq A_iA_j^2 + A_jA_k^2 + A_kA_i^2$. Determinaţi sistemele bune cu număr maxim de puncte.*

Vlad Emanuel, student, Bucureşti

Soluţie. Demonstrăm întâi că vârfurile oricărui triunghi ABC neobtuzunghic formează un sistem bun. Pentru aceasta, fie $\alpha = \dfrac{AM}{AB}$, $\beta = \dfrac{BN}{BC}$, $\gamma = \dfrac{CP}{CA}$, cu $\alpha, \beta, \gamma \in [0,1]$. Conform teoremei cosinusului, avem că $MN^2 + NP^2 + PM^2 = [\alpha^2 + (1-\alpha)^2]c^2 + [\beta^2 + (1-\beta)^2]a^2 + [\gamma^2 + (1-\gamma)^2]b^2 - 2(1-\alpha)\beta ac\cos B - 2(1-\beta)\gamma ab\cos C - 2(1-\gamma)\alpha bc\cos A$. Fixând β şi γ, observăm că $MN^2+NP^2+PM^2$ este funcţie de gradul II în α, având coeficientul dominant $2c^2 > 0$;



această funcţie îşi atinge maximul într-unul dintre capetele intervalului în care variază α, deci pentru $\alpha \in \{0,1\}$. Din considerente de simetrie, vom avea că $\beta, \gamma \in \{0,1\}$, aşadar suma $MN^2 + NP^2 + PM^2$ este maximă când $M \in \{A,B\}$, $N \in \{B,C\}$ şi $P \in \{A,C\}$. Analizând cazurile posibile, obţinem că $MN^2 + NP^2 + PM^2 \leq \max\{a^2+b^2+c^2, 2a^2, 2b^2, 2c^2\}$. Însă $a^2 \leq b^2 + c^2$, $b^2 \leq c^2 + a^2$ şi $c^2 \leq a^2 + b^2$, întrucât $\triangle ABC$ este neobtuzunghic şi atunci maximul de mai sus este $a^2 + b^2 + c^2$, ceea ce dovedeşte că A, B, C formează un sistem bun.

Să arătăm acum că, dacă A, B, C sunt vârfurile unui triunghi obtuzunghic, ele nu formează un sistem bun. Fie $\widehat{A}$ unghiul obtuz şi considerăm $M = B$, $N = C$, iar $P \in (AC)$, cu $PC = \alpha AC$; demonstrăm că există $\alpha \in (0,1)$ pentru care $MN^2 + BP^2 + PC^2 > AB^2 + AC^2 + AB^2$. Această inegalitate revine la $f(\alpha) = 2b^2\alpha^2 - 2ab\cos C\alpha + a^2 - b^2 - c^2 > 0$. Funcţia f este continuă şi $f(\alpha) = 0$, deci există $\alpha > 0$ suficient de mic pentru care $f(\alpha) = 0$.

În concluzie, sistemul $A_1, A_2, \ldots, A_n$ este bun dacă şi numai dacă oricare ar fi $1 \leq i < j < k \leq n$, triunghiul $A_iA_jA_k$ este ascuţitunghic sau dreptunghic. Cum dorim ca n să fie maxim, trebuie ca $n = 4$, iar $A_1A_2A_3A_4$ să fie dreptunghi; pentru demonstraţie, se poate consulta soluţia problemei M130 din Kvant (în traducerea românească a lui H. Banea, la pagina 171).

L190. *Demonstraţi că*

$$8\sqrt{15} \leq (\sqrt{x} + \sqrt{x+48})(\sqrt{16-x} + \sqrt{1-x}) \leq 36, \quad \forall x \in [0,1].$$

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţia 1 (a autorului)**.** Cum $\sqrt{16-x} + \sqrt{1-x} = \dfrac{15}{\sqrt{16-x} - \sqrt{1-x}}$, inegalitatea din stânga revine la $8(\sqrt{16-x} - \sqrt{1-x}) \leq (\sqrt{x} + \sqrt{x+48})\sqrt{15}$. Scriem această inegalitate sun forma $\sqrt{15(x+48)} + 8\sqrt{1-x} \geq 8\sqrt{16-x} - \sqrt{15x}$; prin ridicare la pătrat, după efectuarea calculelor, ajungem la $\sqrt{(1-x)(x+48)} + \sqrt{x(16-x)} \geq \sqrt{15}$. Primul radical este nenegativ, iar al doilea este cel puţin egal cu $\sqrt{15}$: $x(16-x) \geq 15 \Leftrightarrow (x-1)(x-115) \leq 0$, adevărat pentru $x \in [0,1]$. Egalitatea se atinge când $x = 1$.

Procedând analog, inegalitatea din dreapta revine la $4(\sqrt{16-x} + \sqrt{1-x}) \leq 3(\sqrt{x+48} - \sqrt{x})$, adică $4\sqrt{16-x} + 3\sqrt{x} \leq 3\sqrt{x+48} - 4\sqrt{1-x}$, ceea ce este echivalent cu $\sqrt{x(16-x)} + \sqrt{(x+48)(1-x)} \leq 8$. Însă, conform inegalităţii CBS, $[\sqrt{x(16-x)} + \sqrt{(1-x)(x+48)}]^2 \leq (x + 1 - x)(16 - x + x + 48) = 64$, cu egalitate când $\dfrac{x}{16-x} = \dfrac{1-x}{x+48}$, deci pentru $x = \dfrac{16}{65}$.

Soluţia 2 (Titu Zvonaru). Considerăm funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (\sqrt{x} + \sqrt{48+x})(\sqrt{16-x} + \sqrt{1-x})$. Avem că

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{48+x})(\sqrt{16-x} + \sqrt{1-x})}{\sqrt{x(48+x)(16-x)(1-x)}}(\sqrt{(16-x)(1-x)} - \sqrt{x(48+x)})$$

şi rezultă că $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{16}{65}$; pentru $x \in \left[0, \dfrac{16}{65}\right]$; $f'(x) > 0$, iar pentru $x \in \left(\dfrac{16}{65}, 1\right)$, avem că $f'(x) < 0$. Deducem că f admite un maxim pentru $x = \dfrac{16}{65}$, egal cu $f\left(\dfrac{16}{65}\right) = 36$, iar $f(x) \geq \min(f(0), f(1)) = \min(5\sqrt{48}, 8\sqrt{15}) = 8\sqrt{15}$, de unde concluzia.

L191. *Arătaţi că, pentru orice numere reale pozitive x, y, z, are loc inegalitatea*

$$(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{1}{(x+y)(x+z)}+\frac{1}{(x+y)(y+z)}+\frac{1}{(x+z)(y+z)}\right)\geq\frac{9}{4}\geq$$
$$\geq(xy+xz+yz)\left(\frac{1}{(x+y)(x+z)}+\frac{1}{(x+y)(y+z)}+\frac{1}{(x+z)(y+z)}\right).$$

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Vom folosi notaţiile $S=x+y+z$, $Q=xy+yz+zx$, $P=xyz$; se verifică uşor că $(x+y)(y+z)(z+x)=SQ-P$ şi atunci inegalitatea din dreapta este echivalentă cu $Q\dfrac{2S}{SQ-P}\leq\dfrac{9}{4}$, adică $9P\leq SQ$ şi aceasta din urmă se reduce la $\sum x(y-z)^2\geq 0$, deci este adevărată. Rămâne să justificăm inegalitatea din stângă. Cum $(a+b+c)^3\geq 27abc$ (inegalitatea mediilor), rezultă că $(a+b+c)^2\left(\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{ac}+\dfrac{1}{bc}\right)\geq 27$. Considerăm $a=x+y$, $b=x+z$, $c=y+z$ şi obţinem că

$$(\sum x)^2\sum\frac{1}{(x+y)(x+z)}\geq\frac{27}{4}\Rightarrow\sum x^2\sum\frac{1}{(x+y)(x+z)}\geq\frac{27}{4}-$$
$$-2\sum xy\sum\frac{1}{(x+y)(x+z)}\Rightarrow\sum x^2\sum\frac{1}{(x+y)(x+z)}\geq\frac{27}{4}-2\frac{9}{4}=\frac{9}{4},$$

pentru ultima implicaţie ţinând seama de inegalitatea din dreapta, deja demonstrată.

Notă. Soluţie corectă a dat dl. **Titu Zvonaru**, Comăneşti

L192. *Pe $\mathcal{P}$ mulţimea polinoamelor unitare având coeficienţii în intervalul* $[0,9]$. *Determinaţi supremumul modulelor rădăcinilor complexe ale polinoamelor din $\mathcal{P}$.*

Adrian Reisner, Paris

Soluţie. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$, notăm $r_n=\sup\{|z|; P(z)=0, P\in\mathcal{P}, \operatorname{gr}P=n\}$. Evident că $r_1=9$. Pentru $n\geq 2$, considerăm polinomul $Q=X^n-9X^{n-1}-9X^{n-3}-9X^{n-5}-\ldots$; cum $Q(9)<0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}Q(x)=\pm\infty$, rezultă că Q admite o cea mai mare rădăcină reală $\alpha_n\in(9,+\infty)$. Vom demonstra că $r_n=\alpha_n$; pentru aceasta, este destul să aratăm că, dacă $P=X^n-a_{n-1}X^{n-1}+\ldots+a_1X+a_0\in\mathcal{P}$ şi $z=re^{i\theta}$ este rădăcină a lui P, atunci $r\leq\alpha_n$. Putem presupune că $r>1$ şi că $\theta\in[0,\pi]$ (considerând eventual rădăcina $\overline{z}$ a lui $P\in\mathbb{R}[X]$).

Dacă $\theta\in\left[0,\dfrac{2\pi}{3}\right]$, din $P(z)=0$ şi ţinând seama că $r\in\mathbb{R}$, obţinem că

$$r^n=-a_{n-1}e^{-i\theta}r^{n-1}-\ldots-a_0e^{-in\theta}=-a_{n-1}r^{n-1}\cos\theta-\ldots-a_0\cos n\theta\leq$$
$$\leq\frac{a_{n-1}}{2}r^{n-1}+a_{n-2}r^{n-2}+\ldots a_0,$$

întrucât $\cos\theta\geq-\dfrac{1}{2}$, $\forall\theta\in\left[0,\dfrac{2\pi}{3}\right]$, deci $\cos k\theta\geq-1$, $\forall k\geq 2$. Cum $a_k<9$, deducem

$$r^n\leq\frac{9}{2}r^{n-1}+9(r^{n-2}+\ldots+1)=\frac{9}{2}r^{n-1}+9\frac{r^{n-1}-1}{r-1}\leq$$
$$\leq\frac{9}{2}r^{n-1}+9\frac{r^{n-1}}{r-1}\Rightarrow r\leq\frac{9}{2}+\frac{9}{r-1}.$$

Funcţia $f(x) = \frac{9}{2} - \frac{9}{x-1} - x$ are derivata negativă, deci este descrescătoare pe $(1, \infty)$. Cum $f(7) < 0$ şi $f(r) \geq 0$, rezultă că $r < 7 < \alpha_n$.

Dacă $\theta \in \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$, atunci $|a + be^{i\theta}| \leq \max\{a, b\}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}_+$, după cum rezultă imediat. Din $z^n + z^{n-2}(a_{n-1}z + a_{n-2}) + z^{n-4}(a_{n-3}z + a_{n-4}) + \ldots = 0$, ţinând seama de inegalitatea triunghiului, obţinem că

$$r^n \leq r^{n-2}\max\{a_{n-1}r, a_{n-2}\} + r^{n-4}\max\{a_{b-3}r, a_{n-4}\} + \ldots \leq 9r^{n-1} + 9r^{n-3} + \ldots,$$

prin urmare $Q(r_n) \leq 0$. Cum α_n este cea mai mare rădăcină reală a lui Q şi $\lim\limits_{x\to\infty} Q(x) = +\infty$, deducem că $r \leq \alpha_n$.

Rămâne să mai găsim $\sup\{\alpha_n | n \in \mathbb{N}^*\}$, unde α_n este cea mai mare soluţie reală a ecuaţiei $x^n = 9(x^{n-1} + x^{n-3} + \ldots)$. Dacă $n = 2p$, atunci $\alpha_{2p}^{2p} = 9\alpha_{2p}\frac{\alpha_{2p}^{2p} - 1}{\sigma_{2p}^{2p} - 1}$, de unde $\alpha_{2p}^{2p-1}(\alpha_{2p}^2 - 9\alpha_{2p} - 1) + 9 = 0$. Însă $\lim\limits_{p\to\infty} \alpha_{2p}^{2p-1} = +\infty$, prin urmare $\lim\limits_{p\to\infty}(\alpha_{2p}^2 - 9\alpha_{2p} - 1) = 0$. Pe intervalul $[9, +\infty)$, funcţia $h(x) = x^2 - 9x - 1$ este continuă şi strict crescătoare, deci este inversabilă, cu inversa continuă. Astfel, $\lim\limits_{p\to\infty} \alpha_{2p} = h^{-1}(0) = \frac{9 + \sqrt{85}}{2}$; mai mult, $h(\alpha_{2p}) < 0$ şi atunci $\alpha_{2p} < \alpha = \frac{9 + \sqrt{85}}{2}$. La fel se arată că $\lim\limits_{p\to\infty} \alpha_{2p+1} = \alpha$ şi $\alpha_{2p+1} < \alpha$. În concluzie, $\alpha = \frac{9 + \sqrt{85}}{2}$ este supremumul căutat.

L193. *Fie $A \in M_3(\mathbb{R})$ o matrice simetrică, având urma egală cu determinantul. Demonstraţi că $2 \cdot Tr(A^{n+2}) \geq Tr\, A \cdot (Tr(A^{n+1}) - Tr(A^{n-1}))$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.*

Paul Georgescu şi Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Fie a, b, c valorile proprii ale matricei A (soluţiile ecuaţiei $\det(xI_3 - A) = 0$). Matricea A fiind simetrică, vom avea că $a, b, c \in \mathbb{R}$. Într-adevăr, dacă x este un vector propriu nenul corespunzător valorii proprii a, atunci $Ax = ax$ şi, prin conjugare, rezultă că $A\overline{x} = \overline{ax}$, de unde, trecând la transpusă, $\overline{x}^t A^t = \overline{ax}^t$, deci $\overline{x}^t Ax = \overline{ax}^t x$ (am ţinut seama de faptul că $A = A^t$). Pe de altă parte, din $Ax = ax$, se obţine că $\overline{x}^t AX = a\overline{x}^t x$, prin urmare $(a - \overline{a})\overline{x}^t x = 0$. Întrucât x este nenul, deducem că anulează paranteza şi atunci a este real. Analog se procedează pentru b şi c.

Cum $\mathrm{Tr}A = \det A$, urmează că $a + b + c = abc$ (de exemplu, considerând matricea diagonală echivalentă cu A sau folosind relaţiile lui Viète pentru polinomul caracteristic al lui A). Mai observăm că matricea A^n are urma egală cu $a^n + b^n + c^n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ (folosind tot forma diagonală a lui A).

În acest fel, inegalitatea de demonstrat se scrie succesiv: $2(a^{n+2} + b^{n+2} + c^{n+2}) \geq abc(a^{n+1} + b^{n+1} + c^{n+1} - a^{n-1} - b^{n-1} - c^{n-1}) \Leftrightarrow a^{n+2} + b^{n+2} + c^{n+2} + a^n bc + b^n ac + c^n ab \geq a^{n+1}(abc - a) + b^{n+1}(abc - b) + c^{n+1}(abc - c) \Leftrightarrow a^{n+2} + b^{n+2} + c^{n+2} + a^n bc + b^n ac + c^n ab \geq a^{n+1}(b + c) + b^{n+1}(a + c) + c^{n+1}(a + b) \Leftrightarrow a^n(b - a)(c - a) + b^n(a - b)(c - b) + c^n(a - c)(b - c) \geq 0$, iar această ultimă inegalitate este cunoscută (*inegalitatea lui Schur*).

L194. *Fie $p \geq 2$ un număr natural şi ecuaţia $\frac{1}{\sqrt[p]{1+x}} + \frac{1}{\sqrt[p]{2+x}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[p]{n+x}} = \sqrt[p]{x^{p-1}}$. Demonstraţi că, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, ecuaţia are o unică soluţie pozitivă*

x_n, *arătaţi că şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este monoton şi calculaţi* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{x_n}$.

Gabriel Dospinescu, student, Paris

Soluţie. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, considerăm funcţia $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt[p]{k+x}} - \sqrt[p]{x^{p-1}}$. Evident, f_n este continuă şi $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) > 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, deci $Im f_n = (-\infty, A)$, cu $A > 0$. Cum f_n este şi strict descrescătoare, rezultă că se anulează exact o dată pe $(0, \infty)$. Observăm acum că

$$\sqrt[p]{x_{n+1}^{p-1}} - \sqrt[p]{x_n^{p-1}} = \frac{1}{\sqrt[p]{n+1+x_{n+1}}} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt[p]{k+x_{n+1}}} - \frac{1}{\sqrt[p]{k+x_n}} \right).$$

Dacă, prin absurd, ar exista n pentru care $x_{n+1} \leq x_n$, membrul stâng al identităţii precedente ar fi negativ sau nul, în timp ce membrul drept ar fi strict pozitiv, imposibil. În concluzie, şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

Folosind teorema lui Lagrange sau inegalitatea mediilor, obţinem că

$$\frac{p}{p-1}(\sqrt[p]{x^{p-1}} - \sqrt[p]{(x-1)^{p-1}}) > \frac{1}{\sqrt[p]{x}} > \frac{p}{p-1}(\sqrt[p]{(x+1)^{p-1}} - \sqrt[p]{x^{p-1}}),\ \forall x > 1,$$

de unde $\dfrac{p}{p-1}(\sqrt[p]{(x_n+n)^{p-1}}) - \sqrt[p]{x_n^{p-1}} > \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt[p]{x_n+k}} > \dfrac{p}{p-1}(\sqrt[p]{(x_n+n+1)^{p-1}} - \sqrt[p]{(x_n+1)^{p-1}})$. Deducem că $\dfrac{2p-1}{p-1}\sqrt[p]{x_n^{p-1}} < \dfrac{p}{p-1}\sqrt[p]{(x_{n+n})^{p-1}}$, adică

$$(*) \qquad \frac{n}{x_n} > \left(2 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}} - 1.$$

De asemenea, mai avem şi $\dfrac{p}{p-1}\sqrt[p]{(x_n+n+1)^{p-1}} < \dfrac{2p-1}{p-1}\sqrt[p]{(x_n+1)^{p-1}}$, de unde $\dfrac{n}{x_n} < \left(\left(2 - \dfrac{1}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}} - 1\right)\left(1 + \dfrac{1}{x_n}\right)$. Folosind criteriul cleştelui, cum $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (din (*)), rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{x_n} = \left(2 - \dfrac{1}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}} - 1$.

L195. *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *un şir de numere reale mai mari ca 1, astfel încât* $a_{n+1} \geq 2a_n - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. *Definim* $x_n = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_1a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_1a_2\ldots a_n}$, $\forall n \geq 1$.

a) *Demonsraţi că şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este convergent (notăm cu x limita sa).*

b) *Arătaţi că şirul* $(\alpha_n)_{n\geq 1}$, *unde* $x = x_n + \dfrac{\alpha_n}{a_1a_2\ldots a_n(a_{n+1}-1)}$, $\forall n \geq 1$, *este monoton, convergent şi determinaţi limita sa.*

Dumitru Mihalache şi Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Cum $a_{n+1} \geq 2a_n - 1 = a_n + a_n - 1 > a_n$, $\forall n \geq 1$, rezultă că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător şi se arată uşor că are limita $+\infty$.

a) Evident că $(x_n)_{n\geq 1}$ este un şir strict crescător şi

$$x_n < \frac{1}{a_1} + \left(\frac{1}{a_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{a_1}\right)^n = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1-(\frac{1}{a_1})^n}{1-\frac{1}{a_1}} < \frac{1}{a_1 - 1}, \ \forall n \geq 1,$$

prin urmare $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

b) Dacă $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $x - x_n = \lim\limits_{p\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{p} \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_{n+k}} = \lim\limits_{p\to\infty} \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n} \sum\limits_{k=1}^{p} \frac{1}{a_{n+1} \cdot \ldots \cdot a_{n+k}}$. Însă $\sum\limits_{k=1}^{p} \frac{1}{a_{n+1} \ldots a_{n+k}} < \sum\limits_{k=1}^{p} \left(\frac{1}{a_{n+1}}\right)^k < \frac{1}{a_{n+1}-1}$ şi rezultă că $x - x_n \leq \frac{1}{a_1 \ldots a_n (a_{n+1}-1)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$; altfel spus, $\alpha_n = a_1 \ldots a_n (a_{n+1}-1)(x - x_n) \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Demonstrăm acum că $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător; avem de arătat că

$$a_1 \ldots a_n (a_{n+1}-1)(x - x_n) < a_1 \ldots a_n a_{n+1} (a_{n+2}-1)(x - x_{n+1}),$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Cum $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{a_1 \ldots a_n a_{n+1}}$, după câteva calcule, ajungem la inegalitatea echivalentă $\frac{a_{n+2}-1}{a_{n+1}a_{n+2} - 2a_{n+1} + 1} < a_1 a_2 \ldots a_n (x - x_n)$, $\forall n \geq 1$. Deoarece $a_1 a_2 \ldots a_n (x - x_n) = \lim\limits_{p\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{p} \frac{1}{a_{n+1} \ldots a_{n+k}}$, pentru a demonstra această ultimă inegalitate ar fi suficient să arătăm că $\frac{a_{n+2}-1}{a_{n+1}a_{n+2} - 2a_{n+1} + 1} < \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}} + \frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}}$. Un calcul simplu aduce această inegalitate la forma $\frac{2a_{n+1} - 1 - a_{n+2}}{a_{n+1}a_{n+2} - 2a_{n+1} + 1} < \frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}}$, care este adevărată întrucât membrul stâng este nepozitiv, conform enunţului, iar cel drept este evident strict pozitiv.

Astfel, am arătat că $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ este un şir strict crescător şi, totodată, am obţinut încadrarea $\frac{(a_{n+1}-1)(a_{n+2}-1)}{a_{n+1}a_{n+2} - 2a_{n+1} + 1} < \alpha_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, din care va rezulta că $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 1$, dacă mai dovedim că limita fracţiei din stânga este 1. Pentru aceasta, observăm că $\frac{(a_{n+1}-1)(a_{n+2}-1)}{a_{n+1}a_{n+2} - 2a_{n+1} + 1} = 1 - \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1}a_{n+2} - 2a_{n+1} + 1}$, iar şirul cu termenul general $\frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1}a_{n+2} - 2a_{n+1} + 1} = \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}\right) \cdot \frac{1}{a_{n+1} - 2\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} + \frac{1}{a_{n+2}}}$, $n \in \mathbb{N}^*$, este produsul dintre un şir mărginit şi un şir cu limita zero. Cu aceasta, rezolvarea problemei este completă.