Soluţiile problemelor propuse în nr. 1/2010

Clasele primare

P.184. *Vreau să pun într-o cutie bile albe şi verzi, în total* 10*, astfel încât bile albe să fie cel mult* 6*. În câte moduri pot face acest lucru?*

(*Clasa I*) **Inst. Maria Racu, Iaşi**

Soluţie.

Bile albe	6	5	4	3	2	1
Bile verzi	4	5	6	7	8	9

P.185. *Ce literă urmează în înşiruirea logică VKUJT...?*

(*Clasa I*) **Andreea Amarandei, studentă, Iaşi**

Soluţie. În alfabetul limbii române U este în faţa lui V, iar T în faţa lui U. În scrierea $VKUJT$, literele V, U şi T sunt scrise în ordine invers alfabetică. Următoarea literă este I, deoarece şirul K, J, I trebuie să respecte regula şirului V, U, T.

P.186. *Completaţi dreptunghiurile de mai jos cu numere aşa încât suma numerelor scrise în oricare trei dreptunghiuri alăturate să fie aceeaşi. Ce observaţi?*

35		65				35

(*Clasa a II-a*) **Alexandru Chiriac, student, Iaşi**

Soluţie.

35	a	65	b	c	d	35

Scriind proprietăţile numerelor din casete, avem $35 + a + 65 = a + 65 + b = 65 + b + c = b + c + d = c + d + 35$, de unde deducem $b = 35, d = 65$ şi $a = c$. Observăm că în locul lui a putem să punem orice număr natural.

P.187. *Şoricelul Chiţ a primit un zar de la mătuşa Miţ. El a aruncat zarul de patru ori, obţinând în total* 21 *de puncte. Ştiind că la primele două aruncări a obţinut în total* 9 *puncte, aflaţi cât a obţinut la fiecare aruncare. (Găsiţi toate posibilităţile!)*

(*Clasa a II-a*) **Ioana Maria Popa, elevă, Iaşi**

Soluţie. La ultimele două aruncări a obţinut, în total, $21 - 9 = 12$ puncte, deci a dat de fiecare dată 6. La primele două aruncări a obţinut $(6, 3)$ sau $(5, 4)$ sau $(4, 5)$ sau $(3, 6)$.

P.188. *În exerciţiul $a + a : a = \ldots$, există o valoare a lui a pentru care putem să efectuăm operaţiile în ordinea scrisă, fără a modifica rezultatul corect?*

(*Clasa a III-a*) **Ionela Bărăgan, studentă, Iaşi**

Soluţie. Trebuie să-l aflăm pe a astfel încât $a + a : a = (a + a) : a$, ceea ce înseamnă că $a + 1 = 2$, de unde $a = 1$.

P.189. *Aflaţi numărul natural a ştiind că, dacă se împarte* 25 *la $8 - 3 \times a$, se obţine restul* 1.

(*Clasa a III-a*) **Mariana Nastasia, elevă, Iaşi**

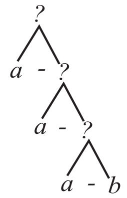
Soluţie. Avem că $25 = (8 - 3 \times a) \times c + 1$, adică $24 = (8 - 3 \times a) \times c$. Ţinând cont de condiţia restului, sunt posibile situaţiile: $8 - 3 \times a = 2$, $8 - 3 \times a = 3$, $8 - 3 \times a = 4$, $8 - 3 \times a = 6$ şi $8 - 3 \times a = 8$. Obţinem soluţiile $a = 0$ sau $a = 2$.

P.190. *În grădina casei mele sunt câţiva pomi. Dacă ar fi de patru ori mai mulţi decât sunt, atunci ar depăşi numărul* 20 *cu atât cât lipseşte, de fapt, pentru a fi* 20. *Câţi pomi sunt în grădină?*

(*Clasa a III-a*) **Inst. Dumitru Pârâială, Iaşi**

Soluţie. Dacă a este numărul pomilor, atunci $4a - 20 = 20 - a$. Deducem că $a = 8$.

P.191. *Compuneţi o problemă care să se rezolve după schema alăturată, cu numerele a şi b convenabil alese.*



(*Clasa a III-a*) **Amalia Cantemir, elevă, Iaşi**

Soluţie. ,,Trei copii aleg trei numere mai mici decât un număr iniţial, a. Primul copil alege numărul b, al doilea copil alege un număr egal cu diferenţa dintre numărul iniţial şi diferenţa dintre numărul iniţial şi numărul ales de primul copil, iar al treilea copil alege numărul egal cu diferenţa dintre numărul iniţial şi numărul ales de al doilea copil. Ce număr a ales al treilea copil?"

P.192. *Bunica are mere şi pere. Dacă mi-ar da un sfert din numărul merelor şi o optime din numărul perelor, aş avea* 35 *de fructe. Dacă mi-ar da o optime din numărul merelor şi o pătrime din numărul perelor, aş avea* 40 *fructe. Câte fructe are bunica?*

(*Clasa a IV-a*) **Mihaela Gâlcă, elevă, Iaşi**

Soluţie. Notăm cu $8a$ numărul merelor şi cu $8b$ numărul perelor bunicii. Prima dată, bunica dă $2a + b = 35$ fructe, iar a doua oară dă $a + 2b = 40$ fructe. Adunând cele două egalităţi, obţinem că $3a + 3b = 75$, deci $a + b = 25$. Atunci $a = 35 - 25 = 10$, iar $b = 40 - 25 = 15$. Bunica are $8 \cdot 10 = 80$ mere şi $8 \cdot 15 = 120$ pere, în total 200 fructe.

P.193. *Mai multe perechi, formate din câte o fată şi câte un băiat, culeg alune. În fiecare pereche, alunele culese de băiat sunt fie de patru ori mai multe, fie de patru ori mai puţine decât cele culese de fată. Numărul alunelor culese împreună de fete şi de băieţi poate fi* 2009*? Dar* 2010*?*

(*Clasa a IV-a*) **Mihaela Obreja şi Ioan Lungu, Vaslui**

Soluţie. Numărul de alune culese de fiecare pereche se împarte exact la 5, deci şi numărul total de alune trebuie să se împartă exact la 5. Elevii nu pot culege împreună 2009 alune. Ei pot culege însă împreună 2010 alune: dacă, de exemplu, avem 6 perechi, iar în fiecare pereche fata culegere 268 alune şi băiatul 67 alune (sau invers), obţinem o situaţie favorabilă.

P.194. *Arătaţi că există un singur şir format din zece numere naturale consecutive astfel încât suma a opt dintre numere să fie egală cu dublul sumei celorlaltor două.*

(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

Soluţie. Şirul de numere $0, 1, 2, \ldots, 9$ îndeplineşte condiţia, deoarece $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8 = 2(6 + 9)$. Fie şirul $a + 1$, $a + 2, \ldots, a + 10$, cu $a \geq 0$. Suma primelor 8 numere este $8a + 36$, iar dublul sumei ultimelor două este $4a + 38$. Dacă $a \neq 0$ atunci $8a + 36 > 4a + 38$, iar dacă înlocuim unul din ultimele două numere cu unul mai mic, suma celorlaltor 8 numere se măreşte. Pentru $a = 0$ avem şirul $1, 2, 3, \ldots, 10$ cu suma 55. În acest caz nu este posibilă partiţia cerută de problemă, deoarece 55 nu se îmaprte exact la 3.

P.195. *Trei fraţi, Ionuţ, Andrei şi Mihai, primesc lunar câte o aceeaşi sumă de bani de la bunicul lor. Pe ascuns, bunica le dă şi ea aceeaşi sumă. Odată, unul dintre cei trei a spart un geam. Bunicul, crezându-l vinovat pe Ionuţ, a împărţit banii cuveniţi lui celorlalţi doi. Bunica a procedat la fel, însă a crezut că cel vinovat este Mihai. Andrei, ştiind că el a spart geamul, a împărţit jumătate din suma sa celor doi fraţi şi a constatat că rămâne cu* 60 *de lei mai puţin decât Ionuţ şi Mihai la un loc. Ce sumă de bani primea fiecare nepot de la bunicul?*

(*Clasa a IV-a*) **Cosmin Şerbănescu, student, Iaşi**

Soluţie. Fie $4a$ suma pe care fiecare nepot o primea de la bunicul, în condiţii normale. Andrei primeşte $4a+20=6a$ lei de la bunicul şi încă $6a$ lei de la bunica, în total $12a$ lei, din care dă câte $3a$ lei celor doi fraţi, rămânând în final cu $6a$ lei. Ionuţ primeşte $4a+2a=6a$ lei de la bunica şi $3a$ lei de la Andrei, deci are în total $9a$ lei. Mihai primeşte $4a+2a=6a$ lei de la bunicul şi $3a$ lei de la Andrei, deci are în total $9a$ lei. Avem că $6a=9a+9a-60$, de unde $a=5$. În concluzie, fiecare nepot primeşte lunar de la bunicul câte 20 lei.

Clasa a V-a

V.116. *Se consideră numărul* $a=(2^n\cdot 5^{n+1}+4):36$, $n\in\mathbb{N}^*$. *Determinaţi valorile lui* n *pentru care* a *este număr natural, a cărui scriere în baza* 10 *are toate cifrele distincte.*

Andrei Nedelcu, Iaşi

Soluţie. Observăm că $a=5\underbrace{00\ldots00}_{n-1\text{ zerouri}}4:36$. Dacă $n=1$, atunci $a\notin\mathbb{N}$. Dacă $n=2$, atunci $a=504:36=14$, număr care are cifrele distincte. Dacă $n=3$, avem că $a=5004:36=139$, situaţie care din nou este convenabilă. Pentru $n\geq 4$, obţinem că $a=13\underbrace{8\ldots88}_{n-3\text{ de }8}9$, iar acest număr are cifrele distincte dacă şi numai dacă $n=4$.
În concluzie, valorile căutate ale lui n sunt $2,3$ şi 4.

V.117. *Arătaţi că* $A=6^{1001}$ *se poate scrie ca diferenţa a două pătrate perfecte.*

Damian Marinescu, Târgovişte

Soluţie. Avem: $A=6^{998}\cdot 6^3=6^{998}(225-9)=(6^{499}\cdot 15)^2-(6^{499}\cdot 3)^2$.

V.118. *Determinaţi numerele naturale* a *şi* n *pentru care* $a^{2n}-9=8(9+9^2+9^3+\ldots+9^{2009})$.

Gabriela Popa, Iaşi

Soluţie. Dacă $S=9+9^2+9^3+\ldots+9^{2009}$, atunci $9S=9^2+9^3+\ldots+9^{2009}+9^{2010}$, de unde $8S=9S-S=9^{2010}-9$. Rezultă că $a^{2n}-9=9^{2010}-9$, deci $a^{2n}=9^{2010}$, adică $a^n=3^{2010}$. Obţinem că $a=3^k$, $n=\frac{2010}{k}$, unde k este un divizor al lui 2010. Cum $2010=2\cdot 3\cdot 5\cdot 67$ are 16 divizori, problema are 16 soluţii.

V.119. *Fie* $n\in\mathbb{N}$ *un număr a cărui scriere în baza* 10 *este de forma* $\overline{\ldots 55}$.

a) Arătaţi că $(n-5)(n+5)$ *se divide cu* 1000.

b) Aflaţi ultimele trei cifre ale lui n^2.

Mihai Crăciun, Paşcani

Soluţie. a) Fie $n=100x+55$, cu $x\in\mathbb{N}$; atunci $(n-5)(n+5)=(100x+50)(100x+60)=50(2x+1)\cdot 20(5x+3)=1000(2x+1)(5x+3)$.

b) Folosind a), deducem că $n^2 - 25 = \overline{\ldots 000}$, prin urmare $n^2 = \overline{\ldots 025}$.

V.120. *Considerăm numărul natural* $a = \overline{12345\ldots 9899}$. *Aflaţi restul împărţirii lui* a *prin* 45.

Elena Iurea, Iaşi

Soluţie. Restul împărţirii lui a la 5 este 4, deci $a = 5k + 4$, $k \in \mathbb{N}^*$. Deoarece suma cifrelor lui a este $20(1 + 2 + \ldots + 9) = 900$, rezultă că a se divide cu 9, adică $a = 9n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Din $9n = 5k + 4$, deducem că $4(n - 1) = 5(k - n)$, prin urmare $n - 1 = 5t$, iar $k - n = 4t$, $t \in \mathbb{N}^*$. Astfel, $a = 45t + 9$, $t \in \mathbb{N}^*$, deci restul împărţirii lui a prin 45 este 9.

V.121. *Arătaţi că* $\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \dfrac{2}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots + \dfrac{2010}{2011\cdot 2012\cdot 2013} < \dfrac{1}{3}$.

Tinuţa Bejan, Iaşi

Soluţie. Dacă S este suma din membrul stâng al inegalităţii din enunţ, atunci

$$S < \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{2012\cdot 2013} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2012} - \frac{1}{2013}\right)$$
$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2013} < \frac{1}{3}.$$

V.122. *Câte fracţii ireductibile de forma* $\dfrac{\overline{20xy}}{\overline{2y}}$ *există?*

Diana Gregoretti, Galaţi

Soluţie. Dacă y este o cifră pară, fracţia se va simplifica prin 2. Dacă $y = 5$, fracţia se va simplifica prin 5. Dacă $y = 1$, fracţia $\dfrac{\overline{20x1}}{21}$ este reductibilă dacă se simplifică prin 3 (deci când $x \in \{0, 3, 6, 9\}$) sau prin 7 (adică pentru $x = 5$); în acest caz, rămân cinci valori ale lui x pentru care fracţia este ireductibilă. Dacă $y = 3$, fracţia $\dfrac{\overline{20x3}}{23}$ este reductibilă doar pentru $x = 9$, deci este ireductibilă pentru nouă valori ale lui x. Dacă $y = 7$, fracţia $\dfrac{\overline{20x7}}{27}$ este reductibilă dacă şi numai dacă se simplifică prin 3, deci când $x \in \{0, 3, 6, 9\}$; rămân şase valori ale lui x pentru care este ireductibilă. În sfârşit, dacă $y = 9$, cum 29 este prim, fracţia $\dfrac{\overline{20x9}}{29}$ este reductibilă doar când $29 \mid \overline{20x9}$, fapt care se petrece numai pentru $x = 5$; rămân nouă fracţii ireductibile în acest caz. În total, vom avea $5 + 9 + 6 + 9 = 29$ fracţii ireductibile ca în enunţ.

Clasa a VI-a

VI.116. *Se consideră unghiul* $\widehat{AOB}$ *cu măsura de* $126°$ *şi semidreptele* $(OM_1, (OM_2, \ldots, (OM_{n-1}$ *interioare lui, astfel încât interioarele unghiurilor* $\widehat{AOM_1}$, $\widehat{M_1OM_2}$, $\ldots$, $\widehat{M_{n-1}OB}$ *sunt disjuncte două câte două, iar* $m(\widehat{AOM_1}) = 2°$, $m(\widehat{M_1OM_2}) = (2^2)°$, $\ldots, m(\widehat{M_{n-1}OB}) = (2^n)°$. *Dacă* $(OM$ *este bisectoarea unghiului* $\widehat{AOM_4}$, *determinaţi măsura complementului lui* $\widehat{AOM}$.

Cătălina Drăgan, Galaţi

Soluţie. Cum $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{AOM_1}) + m(\widehat{M_1OM_2}) + \ldots + m(\widehat{M_{n-1}OB})$, rezultă că $126 = 2 + 2^2 + \ldots + 2^n$, deci $2^{n+1} - 2 = 126$, de unde $n = 6$. Deducem că $m(\widehat{AOM_4}) = 30°$, deci $m(\widehat{AOM}) = 15°$, iar complementul unghiului de $15°$ are măsura de $75°$.

VI.117. *Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC, iar $x = m(\widehat{BIC}) - m(\widehat{A})$, $y = m(\widehat{AIC}) - m(\widehat{B})$, $z = m(\widehat{AIB}) - m(\widehat{C})$. Arătaţi că numerele x, y şi z sunt măsurile unghiurilor unui triunghi ascuţitunghic.*

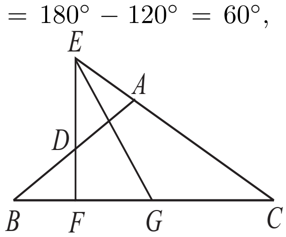
Constantin Apostol, Rm. Sărat

Soluţie. Observăm că $m(\widehat{BIC}) = 180° - \frac{1}{2}[m(\widehat{B}) + m(\widehat{C})] = 180° - \frac{1}{2}[180° - m(\widehat{A})] = 90° + \frac{1}{2} \cdot m(\widehat{A})$, prin urmare $x = 90° - \frac{1}{2} \cdot m(\widehat{A})$. Analog obţinem că $y = 90° - \frac{1}{2} \cdot m(\widehat{B})$, iar $z = 90° - \frac{1}{2} m(\widehat{C})$. Este evident atunci că x, y, z sunt măsuri ale unor unghiuri ascuţite şi, cum $x + y + z = 3 \cdot 90° - \frac{1}{2}[m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C})] = 180°$, concluzia se impune.

VI.118. *În triunghiul isoscel ABC, cu $m(\widehat{A}) = 120°$, se notează cu D mijlocul laturii $[AB]$. Perpendiculara din D pe BC intersectează dreptele AC şi BC în E, respectiv F. Bisectoarea unghiului $\widehat{DEA}$ taie BC în G. Arătaţi că $BC = 4 \cdot FG$.*

Cătălin Budeanu, Iaşi

Soluţie. Observăm că $m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = 30°$, $m(\widehat{EAD}) = 180° - 120° = 60°$, $m(\widehat{FEC}) = 180° - 90° - 30° = 60°$, $m(\widehat{EDA}) = 180° - m(\widehat{DEA}) - m(\widehat{EAD}) = 60°$, iar $m(\widehat{EDB}) = 180° - m(\widehat{EDA}) = 120°$. Atunci triunghiul ADE este echilateral; rezultă că $ED = DA = DB$, prin urmare $\triangle DEB$ este isoscel. Obţinem că $m(\widehat{DBE}) = m(\widehat{DEB}) = 30°$, de unde $m(\widehat{BEG}) = 30° + 30° = 60°$, iar $m(\widehat{EBC}) = 30° + 30° = 60°$.



Astfel, $\triangle BEG$ este echilateral, iar bisectoarea EF a unghiului $\widehat{BEG}$ va fi mediana laturii BG, deci $FG = \frac{1}{2} BG$. Cum $m(\widehat{GEC}) = m(\widehat{GCE}) = 30°$, triunghiul GEC este isoscel, cu $GE = GC$. Obţinem că $CG = EG = BG$, adică $BG = \frac{1}{2} BC$. În concluzie, $FG = \frac{1}{4} BC$.

VI.119. *Un număr natural N se termină în 0 şi are exact 323 de divizori. Aflaţi ultimele 16 cifre ale numărului N.*

Mirela Obreja, Vaslui

Soluţie. Descompunerea în factori primi a numărului 323 este $17 \cdot 19$; rezultă că $N = p^{322}$ sau $N = p^{16} \cdot q^{18}$, cu p, q prime. Cum N se termină în 0, atunci $2 | N$ şi $5 | N$, deci prima situaţie nu este posibilă. Rămâne că $N = 2^{16} \cdot 5^{18} = 25\underbrace{00\ldots00}_{16 \text{ zerouri}}$ sau $N = 2^{18} \cdot 5^{16} = 4\underbrace{00\ldots00}_{16 \text{ zerouri}}$. În ambele cazuri, ultimele 16 cifre ale lui N sunt zerouri.

VI.120. *Demonstraţi că numărul $A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 2010^2 - 2000$ se divide cu 3.*

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

Soluţia 1. Numerele divizibile cu 3, ridicate la pătrat, rămân divizibile cu 3, iar cele care nu sunt divizibile cu 3, prin ridicare la pătrat, vor fi de forma M_3+1. Cum $2000 = M_3+2$, avem că $A = (M_3+1)+(M_3+1)+M_3+\ldots+(M_3+1)+(M_3+1)+M_3-(M_3+2) = M_3+1340-2 = M_3+1338 = M_3$.

Soluţia 2. Se ştie că $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Rezultă că $A = \frac{2010\cdot 2011\cdot 4021}{6} - 2000 = 2\,708\,885\,385$, iar acest număr are suma cifrelor 54, deci este divizibil cu 3.

VI.121. *Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere naturale consecutive. Arătaţi că suma $S = a_1+a_2+\ldots+a_n$ se divide cu n dacă şi numai dacă n este număr impar.*

Andrei Paşa, elev, Iaşi

Soluţie. Dacă $n = 2k+1$ este impar, se arată că $S = n(a_1+k)$, număr care se divide cu n. Reciproc, dacă am presupune prin absurd că n ar fi par, $n = 2k$, am obţine că $S = k(2a_1+2k-1)$, unde paranteza este număr impar. Rezultă că S nu se divide cu $2k$, contradicţie.

VI.122. *Vom spune că un număr natural este anti-Goldbach dacă poate fi scris ca sumă de două numere compuse. Determinaţi toate numerele anti-Goldbach.*

Ionel Nechifor, Iaşi

Soluţie. Prin verificări directe, se observă că numerele $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9$ şi 11 nu pot fi scrise ca sumă de două numere compuse. Avem că $8 = 4+4$, $10 = 6+4$, $2k = 6+2(k-3)$, $\forall k \geq 6$ şi $2k+1 = 9+2(k-4)$, $\forall k \geq 6$, prin urmare toate numerele naturale, în afara celor enumerate iniţial, pot fi scrise ca sumă de două numere compuse.

Clasa a VII-a

VII.116. *Calculaţi suma* $S = \left|\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right| + \left|\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right| + \ldots + \left|\frac{2008}{2009}-\frac{2009}{2010}\right|$.

Daniela Munteanu, Iaşi

Soluţia 1. Se arată uşor că $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Atunci diferenţele din interiorul fiecărui modul sunt negative, prin urmare $S = \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{2009}{2010}-\frac{2008}{2009}\right) = \frac{2009}{2010}-\frac{1}{2} = \frac{502}{1005}$.

Soluţia 2. Observăm că $\left|\frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n+2}\right| = \left|\frac{-1}{(n+1)(n+2)}\right| = \frac{(n+2)-(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Dăm lui n valori de la 1 la 2008 şi, prin sumarea egalităţilor obţinute şi după reducerea termenilor, obţinem că $S = \frac{1}{2}-\frac{1}{2010} = \frac{502}{1005}$.

VII.117. *Fie x, y numere reale astfel încât $x > 2011$, iar $xy = x+y$. Arătaţi că partea fracţionară a lui y este mai mică decât $\frac{1}{2010}$.*

Claudiu Ştefan Popa, Iaşi

Soluţie. Din $xy-x-y+1 = 1$, deducem că $(x-1)(y-1) = 1$. Cum $x > 2011$, atunci $x-1 > 2010$. Produsul $(x-1)(y-1)$ fiind pozitiv şi factorul $x-1$ de asemenea, rezultă că $y-1>0$. Deducem că $0<y-1<\frac{1}{2010}$, de unde $1<y<1\frac{1}{2010}$, prin urmare $[y]=1$, iar $\{y\}<\frac{1}{2010}$.

VII.118. *Arătaţi că $x^{2010}+1\geq x^{1010}+x^{1000}, \forall x\in\mathbb{R}$. Când se atinge egalitatea?*

Cătălin Melinte, student, Iaşi

Soluţie. Inegalitatea din enunţ se scrie echivalent sub forma $(x^{1010}-1)(x^{1000}-1)\geq 0$. Dacă $-1<x<1$, ambele paranteze sunt negative, deci produsul este pozitiv. Dacă $x>1$ sau $x<-1$, ambele paranteze sunt pozitive, deci produsul este pozitiv. Dacă $x\in\{-1,1\}$, produsul este nul, prin urmare se atinge egalitatea în inegalitatea din enunţ.

VII.119. *Considerăm numărul natural $A=5^n+2\cdot 3^{n-1}+1$, $n\in\mathbb{N}^*$.*

a) *Demonstraţi că A se divide cu 8, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.*

b) *Determinaţi $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care A se divide cu 40.*

Ciprian Baghiu, Iaşi

Soluţie. a) Dacă $n=2p$, $p\in\mathbb{N}^*$, atunci $A=25^p+6\cdot 9^{p-1}+1=(M_8+1)+6(M_8+1)+1=M_8$. Dacă $n=2p+1$, $p\in\mathbb{N}$, atunci $A=5\cdot 25^p+2\cdot 9^p+1=5(M_8+1)+2(M_8+1)+1=M_8$.

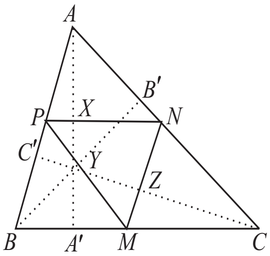
b) Cum $A\vdots 8$, rezultă că $A\vdots 40$ dacă şi numai dacă $A\vdots 5$. Însă $5^n\vdots 5$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ şi $2\cdot 3^{n-1}+1$ este număr impar; atunci $A\vdots 5 \Leftrightarrow U(2\cdot 3^{n-1}+1)=5 \Leftrightarrow U(3^{n-1})\in\{2,7\} \Leftrightarrow n=4p$, $n\in\mathbb{N}^*$.

VII.120. *Un poligon convex are 170 de diagonale. Măsurile unghiurilor sale se exprimă, în grade, prin numere naturale impare. Demonstraţi că poligonul are cel puţin două unghiuri congruente.*

Cătălin Budeanu, Iaşi

Soluţie. Un poligon convex cu n laturi are $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonale. Din $\frac{n(n-3)}{2}=170$, obţinem că $n=20$. Suma măsurilor unghiurilor poligonului va fi $180°(n-2)=3240°$. Fie x măsura, în grade, a celui mai mare dintre unghiuri. Dacă am presupune, prin absurd, că poligonul nu are unghiuri congruente, cele 19 unghiuri rămase ar avea măsurile cel mult egale cu $x-2, x-4, \ldots, x-38$. Suma lor ar fi cel mult $20x-2(1+2+\ldots+19)=20(x-19)\leq 20(179-19)=20\cdot 160=3200<3240$, contradicţie. Astfel, rămâne adevărat că poligonul are cel puţin două unghiuri congruente.

VII.121. *În triunghiul ascuţitunghic ABC, notăm cu X, Y şi Z mijloacele înălţimilor $[AA']$, $[BB']$, respectiv $[CC']$ şi cu M, N şi P mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, respectiv $[AB]$. Demonstraţi că dreptele XM, YN şi ZP sunt concurente.*



Doru Buzac, Iaşi

Soluţie. Cum linia mijlocie $[PN]$ conţine mijloacele tuturor cevienelor care pleacă din A, rezultă că $X\in[PN]$, iar PX şi XN sunt linii mijlocii în triunghiurile ABA', respectiv ACA'. Astfel, $\frac{PX}{XN}=\frac{BA'}{2}\cdot\frac{2}{A'C}=\frac{BA'}{A'C}$. Analog se arată că $Y\in[PM]$, $Z\in[MN]$, iar $\frac{MY}{YP}=\frac{CB'}{B'A}$

şi $\dfrac{NZ}{ZM} = \dfrac{AC'}{C'B}$. Atunci $\dfrac{PX}{XN} \cdot \dfrac{NZ}{ZM} \cdot \dfrac{MY}{YP} = \dfrac{BA'}{A'C} \cdot \dfrac{CB'}{B'A} \cdot \dfrac{AC'}{C'B} = 1$ (deoarece AA', BB', CC' sunt concurente). Aplicând reciproca teoremei lui Ceva, urmează concluzia problemei.

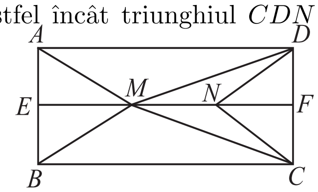
Notă (**Titu Zvonaru**). Proprietatea este cunoscută în cazul triunghiului oarecare; a se vedea, de exemplu, Gh. Mihalescu - *Geometria elementelor remarcabile*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1957, pg. 379. Punctul de concurenţă este punctul lui Lemoine. Mai mult, are loc proprietatea mai generală

În triunghiul ABC, în care A', B', C' sunt mijloacele laturilor BC, CA, AB, iar X, Y, Z mijloacele cevienelor concurente AA_1, BB_1, CC_1, dreptele $A'X, B'Y$, $C'Z$ sunt concurente (sursa citată, pg. 494).

VII.122. *Se consideră dreptunghiul $ABCD$, cu $AB = 1$ şi $AD = 1 + \sqrt{3}$, iar M este un punct interior dreptunghiului, astfel încât $m(\widehat{MDC}) = m(\widehat{MCD}) = 75^\circ$. Arătaţi că triunghiul MAB este echilateral.*

Dumitru Mihalache, Bârlad

Soluţie. Fie N un punct interior dreptunghiului astfel încât triunghiul CDN să fie echilateral, iar E şi F intersecţiile dreptei MN cu AB, respectiv CD. Punctele M şi N fiind egal depărtate de capetele segmentului $[CD]$, rezultă că MN este mediatoarea (comună) a segmentelor $[CD]$ şi $[AB]$, deci E şi F sunt mijloace pentru $[AB]$, respectiv $[CD]$. Apoi, cum $m(\widehat{NMD}) = m(\widehat{NDM}) = 15^\circ$, deducem că $\triangle NMD$ este isoscel, cu $NM = ND = 1$.



Însă $NF = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, prin urmare $EM = (1 + \sqrt{3}) - 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Cu teorema lui Pitagora, găsim că $AM = BM = 1$, deci $\triangle ABM$ este echilateral.

Clasa a VIII-a

VIII.116. *Raportăm planul la un reper cartezian xOy. Determinaţi mulţimea punctelor $M(x, y)$ din plan pentru care $2\sqrt{x^2 - y^2} = x + y$.*

Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă, Blaj

Soluţie. Prin ridicare la pătrat, relaţia din ipoteză conduce la $4(x^2 - y^2) = (x + y)^2$, adică $(x + y)(3x - 5y) = 0$, deci $y = -x$ sau $y = \dfrac{3x}{5}$. Pe de altă parte, pentru a asigura existenţa radicalului, se impune ca $|x| \geq |y|$. În cazul în care $y = -x$, această condiţie se verfică pentru orice $x \in \mathbb{R}$; dacă $y = \dfrac{3x}{5}$, condiţia se verfică numai dacă $x \geq 0$. În concluzie, mulţimea căutată este reuniunea dintre dreapta $y = -x$ şi semidreapta $y = \dfrac{3x}{5}$, $x \geq 0$.

VIII.117. *Numerele reale pozitive x, y, z sunt astfel încât $xy = z+1$ şi $\dfrac{x}{z+1} + y = 2$. Demonstraţi că $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} \geq 3$. Când se atinge egalitatea?*

Gheorghe Molea, Curtea de Argeş

Soluţie. Din prima relaţie, obţinem că $\dfrac{x}{z+1} = \dfrac{1}{y}$. Înlocuind în a doua, deducem că $\dfrac{1}{y} + y = 2$, adică $(y-1)^2 = 0$. Prin urmare, $y = 1$ şi $x = z + 1$, cu $z \in (0, \infty)$. Astfel, $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} = z + 1 + \dfrac{1}{z} \geq 2 + 1 = 3$, cu egalitate pentru $z = 1$, $x = 2$, $y = 1$.

VIII.118. *Fie x, y, z numere reale astfel încât $x^2 + 5yz \geq 6$, $y^2 + 5zx \geq 6$ şi $z^2 + 5xy \geq 6$. Aflaţi valoarea minimă a lui $|x + y + z|$.*

Dan Nedeianu, Drobeta-Tr. Severin

Soluţie. Adunând inegalităţile din ipoteză, obţinem că $(x+y+z)^2 + 3(xy+yz+zx) \geq 18$ şi, cum $3(xy+yz+zx) \leq (x+y+z)^2$, rezultă că $2(x+y+z)^2 \geq 18$, de unde $|x+y+z| \geq 3$. Deoarece $x = y = z = 1$ verifică ipotezele problemei şi, pentru aceste valori, $|x+y+z| = 3$, înseamnă că valoarea minimă a lui $|x+y+z|$ este 3.

VIII.119. *Determinaţi $x \in \left[0, \dfrac{5}{4}\right]$ şi $y \in \left[-\dfrac{5x}{2}, \dfrac{x}{2}\right]$ pentru care*

$$\sqrt{(7-2x)(5x+2y)} + \sqrt{(x-2y)(5-4x)} = 6.$$

Liviu Smarandache şi Lucian Tuţescu, Craiova

Soluţie. Intervalele în care se află numerele x şi y ne garantează că $7 - 2x$, $5x + 2y$, $x - 2y$ şi $5 - 4x$ sunt numere reale nenegative; fie atunci $a = \sqrt{7-2x}$, $b = \sqrt{5x+2y}$, $c = \sqrt{x-2y}$ şi $d = \sqrt{5-4x}$. Observăm că $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 7 - 2x + 5x + 2y + 2y + x - 2y + 5 - 4x = 12$. Pe de altă parte, din ipoteza problemei, $ab + cd = 6$, deci $2ab + 2cd = 12$. Deducem că $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab - 2cd = 0$, adică $(a-b)^2 + (c-d)^2 = 0$, de unde $a = b$ şi $c = d$. Rezolvând sistemul $7 - 2x = 5x + 2y$, $x - 2y = 5 - 4x$, găsim $x = 1$, $y = 0$.

VIII.120. *Rezolvaţi în numere naturale ecuaţia $x + 2y + 3z = 4xyz - 5$.*

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Avem că $z = \dfrac{x + 2y + 5}{4xy - 3}$. Nu putem avea simultan $x \geq 2$ şi $y \geq 2$ deoarece, în caz contrar, $(x-2)(y-2) \geq 0$, deci $xy \geq 2x + 2y - 4$ şi atunci $4xy - 3 \geq 8x + 8y - 16 - 3 = x + 2y + 7x + 6y - 19 \geq x + 2y + 14 + 12 - 19 > x + 2y + 5$, adică fracţia care-l dă pe z ar fi subunitară. Rezultă că $x \in \{1, 2\}$ sau $y \in \{1, 2\}$. Dacă $x = 1$, atunci $z = \dfrac{2y+6}{4y-3}$. Eventualele soluţii y trebuie să verifice condiţia $4y - 3 \leq 2y + 6$, deci $y \in \{1, 2, 3, 4\}$. Verificând fiecare situaţie, găsim soluţiile $(x, y, z) \in \{(1, 1, 8); (1, 2, 2)\}$. Tratând în aceeaşi manieră cazurile $x = 2$, $y = 1$ şi $y = 2$, nu obţinem noi soluţii.

VIII.121. *Demonstraţi că nu putem alege trei puncte necoliniare A, B, C, de aceeaşi parte a unui plan α, astfel încât dreptele AB, BC şi CA să formeze cu planul α unghiuri de aceeaşi măsură nenulă.*

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. Presupunem contrariul şi fie A, B, C necoliniare, astfel încât $(ABC) \nparallel \alpha$ şi $m(\widehat{AB, \alpha}) = m(\widehat{AC, \alpha}) = m(\widehat{BC, \alpha}) = \theta$. Considerăm că $d(A, \alpha) > d(B, \alpha) > d(C, \alpha)$. Ducând prin C planul β paralel cu α, rezultă că $m(\widehat{AB, \beta}) = m(\widehat{AC, \beta}) = m(\widehat{BC, \beta}) = \theta$. Fie $\{M\} = AB \cap \beta$ şi P, N proiecţiile punctelor A şi B pe β; atunci

$m(\widehat{ACP}) = m(\widehat{BCN}) = m(\widehat{AMP}) = \theta$ şi $N \in (PM)$. Din congruenţa triunghiurilor APC şi APM deducem $(PC) \equiv (PM)$, iar din congruenţa triunghiurilor BNC şi BNM rezultă că $(NC) \equiv (NM)$. Folosind triunghiurile isoscele PCM şi NCM, obţinem că $\widehat{NCM} \equiv \widehat{PCM}$, fals. Rămâne atunci adevărată concluzia problemei.

VIII.122. *În fiecare pătrăţel al unei table de şah este scris câte un număr natural. Fiecare număr n de pe tablă apare de câte n ori, iar pe primul rând al tablei apar, ordonat strict crescător, toate numerele folosite.*

a) *Arătaţi că, dintre cele opt numere de pe primul rând, cel mult şase sunt pare.*

b) *Determinaţi cel mai mare număr care poate apărea pe tablă.*

c) *Arătaţi că există o singură modalitate de alegere a numerelor care apar pe tablă, pentru care produsul numerelor de pe primul rând este impar.*

Silviu Boga, Iaşi

Soluţie. a) Suma numerelor de pe primul rând trebuie să fie 64. Numărul 0 nu poate apărea pe tablă. Dacă toate numerele de pe primul rând ar fi pare, suma lor ar fi cel puţin egală cu $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 = 72 > 64$, fals. Dacă un singur număr de pe primul rând ar fi par, suma de pe primul rând ar fi impară, contradicţie. Rămâne că pe primul rând sunt cel mult şase numere pare, situaţie posibilă; un exemplu ar fi $2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 13$.

b) Cele mai mici şapte numere naturale nenule au suma $1+2+\ldots+7 = 28$; rămân $64 - 28 = 36$ de pătrăţele, deci cel mai mare număr care poate fi ales este 36.

c) Dacă produsul numerelor utilizate este impar, toate numerele sunt impare. Cum $1+3+5+7+9+11+13+15 = 64$ şi orice altă alegere de numere impare distincte va avea suma mai mare, rezultă că singura posibilitate de alegere a unor numere impare pe tablă este $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15$.

Clasa a IX-a

IX.106. *Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor p şi q, unde*

$$p : (\exists a \in \mathbb{Z})(\exists n \in \mathbb{N}^*)(a^4 + 1 = 3^n); \quad q : (\exists a \in \mathbb{Z})(\exists n \in \mathbb{N})(a^4 - 1 = 3^n).$$

Dan Popescu, Suceava

Soluţie. Cum orice pătrat perfect este fie M_3, fie $M_3 + 1$, $a^4 + 1$ este fie $M_3 + 1$, fie $M_3 + 2$, deci nu poate fi putere a lui 3 cu exponent nenul. Rezultă că p este o propoziţie falsă.

Vom arăta că şi q este tot falsă. Pentru aceasta să presupunem, prin absurd, că există $a \in \mathbb{Z}$ şi $n \in \mathbb{N}$ pentru care $a^4 - 1 = (a - 1)(a + 1)(a^2 + 1) = 3^n$. Atunci $a - 1 = 3^\alpha$, $a + 1 = 3^\beta$ şi $a^2 + 1 = 3^\gamma$, unde $0 \le \alpha < \beta \le \gamma$ şi $\alpha + \beta + \gamma = n$. Rezultă că $2 = (a + 1) - (a - 1) = 3^\beta - 3^\alpha = 3^\alpha(3^{\beta-\alpha} - 1)$, deci $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Deducem că $a = 2$ şi, cum $2^2 + 1 = 3^\gamma$, ajungem la o contradicţie.

IX.107. *Dacă $a, b \in \mathbb{N}^*$, atunci* $\left|\dfrac{3a + 4b}{2a + 3b} - \sqrt{2}\right| < \dfrac{1}{4}\left|\dfrac{a + 2b}{a + b} - \sqrt{2}\right| < \dfrac{1}{16}\left|\dfrac{a}{b} - \sqrt{2}\right|$.

Mihail Bencze, Braşov

Soluţie. Considerăm funcţia $f : [1, \infty) \to [1, \infty)$, $f(x) = \dfrac{x + 2}{x + 1}$. Deoarece $|f(x) - f(y)| < \dfrac{1}{4}|x - y|$, $\forall x, y \in [0, \infty)$, $x \ne y$, $(f \circ f)(x) = \dfrac{3x + 4}{2x + 3}$ şi $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, rezultă că $|(f \circ f)(x) - (f \circ f)(y)| < \frac{1}{4}|f(x) - f(y)| < \frac{1}{16}|x - y|$, pentru orice $x, y \in [1, \infty)$, $x \neq y$. Considerând $x = \frac{a}{b}$, $a > b$ şi $y = \sqrt{2}$, obţinem inegalitatea cerută.

IX.108. *Dacă $a \in (0, 1)$, demonstraţi că $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{4}{(a+1)^2}\right) \geq \frac{4}{(a+1)^2}$, pentru orice $b \in (0, \infty)$.*

Ovidiu Pop, Satu Mare

Soluţie. Inegalitatea din enunţ este echivalentă cu $\frac{a}{b} + \frac{b(a-1)^2}{a(a+1)^2} \geq 2\frac{1-a}{1+a}$, care rezultă din inegalitatea mediilor $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, $\forall x, y \in (0, \infty)$.

IX.109. *Demonstraţi că $\operatorname{tg} x > 4 \sin x - 2$, oricare ar fi $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.*

Ionuţ Ivănescu, Craiova

Soluţie. Pentru $x = 0$, inegalitatea se verifică. Fie $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ şi triunghiul ABC cu $m(\widehat{A}) = 90°$, $m(\widehat{B}) = x$, iar $AD \perp BC$, $D \in BC$. Cu notaţiile uzuale, avem:

$2 + \operatorname{tg} x > 4 \sin x \Leftrightarrow 2 + \frac{b}{c} > 4 \cdot \frac{h_a}{c} \Leftrightarrow 2c + b > 4\frac{bc}{a} \Leftrightarrow a^2(2c + b)^2 > 16b^2c^2 \Leftrightarrow (b^2 + c^2)(2c + b)^2 > 2bc \cdot 8bc$.

Însă $b^2 + c^2 \geq 2bc$ (cu egalitate când $b = c$), iar $(2c + b)^2 \geq (2\sqrt{2cb})^2 = 8bc$ (cu egalitate când $b = 2c$). Rezultă astfel inegalitatea strictă din enunţ, întrucât nu putem avea simultan $b = c$ şi $b = 2c$.

IX.110. *În $\triangle ABC$, cu notaţiile uzuale, arătaţi că $OI \perp OI_a \Leftrightarrow m(\widehat{A}) = 60°$.*

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Utilizăm relaţiile lui Euler $OI^2 = R^2 - 2Rr$ şi $OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a$ şi faptul că $II_a = AI_a - AI = \frac{p}{\cos\frac{A}{2}} - \frac{p-a}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{a}{\cos\frac{A}{2}}$. Avem succesiv:

$OI \perp OI_a \Leftrightarrow OI^2 + OI_a^2 = II_a^2 \Leftrightarrow (R^2 - 2Rr) + (R^2 + 2Rr_a) = \frac{a^2}{\cos^2\frac{A}{2}} \Leftrightarrow R^2 - Rr + Rr_a = \frac{a^2}{1 + \cos A} \Leftrightarrow 1 + \frac{r_a - r}{R} = \frac{4\sin^2 A}{1 + \cos A} \Leftrightarrow 1 + \frac{r_a - r}{R} = 4(1 - \cos A)$.

Cum $\frac{r_a - r}{R} = \frac{1}{R}\left(\frac{S}{p-a} - \frac{S}{p}\right) = \frac{aS}{Rp(p-a)} = \frac{abcS}{Rbcp(p-a)} = \frac{4RS^2}{Rbcp(p-a)} = \frac{4(p-b)(p-c)}{bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{bc} = \frac{a^2 - b^2 - c^2 + 2bc}{bc} = -2\cos A + 2$, rezultă că $OI \perp OI_a \Leftrightarrow 1 - 2\cos A + 2 = 4(1 - \cos A) \Leftrightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m(\widehat{A}) = 60°$.

Clasa a X-a

X.106. *Cele $m \times n$ pătrăţele ale unui dreptunghi cu m linii şi n coloane se colorează cu p culori, unde $m < p < n$. Spunem că o colorare are o tăietură dacă, pe una dintre cele n coloane, toate cele m pătrăţele au aceeaşi culoare. Determinaţi numărul colorărilor care au k tăieturi, unde $0 \leq k \leq n$. (În legătură cu problema 2, OJM 2006.)*

Cecilia Deaconescu, Piteşti

Soluţie. O coloană care este tăietură poate fi colorată în p moduri, iar o coloană care nu este tăietură poate fi colorată în $p^m - p$ moduri. Cum cele k tăieturi pot fi alese în C_n^k moduri, rezultă că numărul colorărilor cu k tăieturi este $C_n^k \cdot p^k \cdot (p^m - p)^{n-k}$, $\forall 0 \le k \le n$.

X.107. *Se consideră variabila aleatoare* $X : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix}$, *unde* $p, q \in (0,1)$, $p \neq q$. *Arătaţi că variabilele aleatoare* $|X - M(X)|$ *şi* $(X - M(X))^2$ *sunt dependente.*

Laurenţiu Modan, Bucureşti

Soluţie. Cum $M(X) = p$, atunci $X - M(X) : \begin{pmatrix} q & -p \\ p & q \end{pmatrix}$. Rezultă că $|X - M(X)| : \begin{pmatrix} q & p \\ p & q \end{pmatrix}$, $(X - M(X))^2 : \begin{pmatrix} q^2 & p^2 \\ p & q \end{pmatrix}$, iar $|X - M(X)|^3 : \begin{pmatrix} q^3 & p^3 \\ p & q \end{pmatrix}$. Deducem că $M(|X - M(X)|) = 2pq$, $M((X - M(X))^2) = pq(p+q) = pq$ şi $M(|X - M(X)|^3) = pq(p^2 + q^2)$. Dacă, prin absurd, variabilele $|X - M(X)|$ şi $(X - M(X))^2$ ar fi independente, atunci $M(|X - M(X)|^3) = M(|X - M(X)|)M((X - M(X))^2)$, adică $pq(p^2 + q^2) = 2p^2q^2$. Cum $p \neq 0$ şi $q \neq 0$, ar rezulta că $p^2 + q^2 = 2pq$, deci $p = q$, contradicţie. Rămâne că cele două varibile aleatoare sunt dependente.

X.108. *Dacă* $a, b, c \in (1, \infty)$, *demonstraţi că are loc inegalitatea*

$$(\log_b a + \log_c a) \cdot (\log_a b + \log_c b)(\log_a c + \log_b c) \ge 8 \log_{\frac{b+c}{2}} a \cdot \log_{\frac{c+a}{2}} b \cdot \log_{\frac{a+b}{2}} c.$$

Lucian Tuţescu, Craiova

Soluţie. Vom arăta că $\log_b a + \log_c a \ge 2 \log_{\frac{b+c}{2}} a$; scriind celelalte două inegalităţi similare şi înmulţindu-le, vom obţine inegalitatea dorită. Cum $\dfrac{b+c}{2} \ge \sqrt{bc} > 1$, rezultă că $\log_{\frac{b+c}{2}} a \le \log_{\sqrt{bc}} a = 2 \log_{bc} a$. Notând $x = \log_a b$, $y = \log_a c$, ar fi suficient să demonstrăm că $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \ge \dfrac{4}{x+y}$, fapt care rezultă din inegalitatea mediilor $MH \le MA$.

X.109. *Se consideră mulţimile nedisjuncte* A *şi* B *şi funcţiile* $f : A \to (0, \infty)$, $g : B \to (0,1)$. *Determinaţi numărul* $a \in (0,1) \cup (1, \infty)$ *pentru care* $a^{f(x) \cdot g(x)} + \log_a g(x) \ge a^{f(x)}$, $\forall x \in A \cap B$.

Mihai Haivas, Iaşi

Soluţie. Considerăm funcţia $p : A \cap B \to (0, \infty)$, $p(x) = f(x) \cdot g(x)$. Adunând în ambii membri ai inegalităţii din enunţ termenul $\log_a f(x)$, obţinem că $a^{p(x)} + \log_a p(x) \ge a^{f(x)} + \log_a f(x)$, $\forall x \in A \cap B$. Funcţia $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $h(x) = a^t + \log_a t$ este strict descrescătoare dacă $a \in (0,1)$ şi strict crescătoare dacă $a \in (1, \infty)$. Cum $f(x)(g(x) - 1) \le 0$, $\forall x \in A \cap B$, rezultă că $p(x) \le f(x)$, $\forall x \in A \cap B$. Avem şi că $h(p(x)) \ge h(f(x))$, prin urmare valorile căutate ale lui a sunt elementele intervalului $(0,1)$.

X.110. *Fie* $D = \{z = x + iy | y > 0\}$ *mulţimea numerelor complexe din semiplanul superior, iar* $D' = \{z = x + iy | x^2 + y^2 < 1\}$ *discul unitate (fără frontieră). Dacă* $z_0 \in D$ *este fixat, arătaţi că funcţia* $f : D \to D'$, $f(z) = \dfrac{z - z_0}{z - \overline{z}_0}$ *este bijectivă.*

Adrian Corduneanu, Iaşi

Soluţie. Demonstrăm mai întâi că f este bine definită. Pentru aceasta, observăm că $f(z) \in D' \Leftrightarrow |f(z)| < 1 \Leftrightarrow |z - z_0| < |z - \overline{z}_0| \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < (x - x_0)^2 + (y + y_0)^2 \Leftrightarrow yy_0 > 0$, fapt adevărat când $z, z_0 \in D$. Dacă presupunem că $f(z_1) = f(z_2)$ obţinem, după calcule, că $(z_1 - z_2)(z_0 - \overline{z}_0) = 0$; cum $z_0 \neq \overline{z}_0$, întrucât $y_0 > 0$, rezultă că $z_1 = z_2$, deci f este funcţie injectivă. Să demonstrăm şi că f este surjectivă; fie $w \in D'$, adică $|w| < 1$. Din egalitatea $f(z) = w$ găsim că $z = \dfrac{\overline{z}_0 \cdot w - z_0}{w - 1} = \dfrac{(\overline{z}_0 \cdot w - z_0)(\overline{w} - 1)}{|w-1|^2} = \dfrac{\overline{z}_0|w|^2 - (z_0\overline{w} + \overline{z}_0 w) + z_0}{|w-1|^2}$, unde $\operatorname{Im} z = \dfrac{y_0(1 - |w|^2)}{|w-1|^2} > 0$, prin urmare $z \in D$. Cu aceasta, soluţia problemei este completă.

Clasa a XI-a

XI.106. *Dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, arătaţi că $det(A^2 + A + I_2) + det(A^2 - A + I_2) \geq \dfrac{3}{2}$.*

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

Soluţia 1. Fie $a = \operatorname{tr} A$, $b = \det A$, iar $f(X) = \det(A - XI_2) = X^2 - aX + b$ polinomul caracteristic al matricei A. Atunci $\det(A^2 + A + I_2) = \det(A - \varepsilon I_2)(A - \varepsilon^2 I_2) = f(\varepsilon) \cdot f(\varepsilon^2) = (\varepsilon^2 - a\varepsilon + b)(\varepsilon - a\varepsilon^2 + b) = a^2 + b^2 + ab + a - b + 1$, unde ε este rădăcina primitivă de ordin trei a unităţii. Analog, $\det(A^2 - A + I_2) = a^2 + b^2 - ab - a - b + 1$, prin urmare $\det(A^2 + A + I_2) + \det(A^2 - A + I_2) = 2a^2 + 2b^2 - 2b + 2 = 2a^2 + 2 + 2(b^2 - b) \geq 0 + 2 + 2\left(-\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{3}{2}$. Egalitatea se atinge când $\operatorname{tr} A = 0$ şi $\det A = \dfrac{1}{2}$.

Soluţia 2. Cu notaţiile anterioare, $f(A^2 + I_2) = f(A + iI_2) \cdot f(A - iI_2) = f(i) \cdot f(-i) = (i^2 - ai + b)(i^2 + ai + b) = (b-1)^2 + a^2$. Se ştie că $\det(X+Y) + \det(X - Y) = 2\det X + 2\det Y$, $\forall X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Pentru $X = A^2 + I_2$, $Y = A$, obţinem că $\det(A^2 + A + I_2) + \det(A^2 - A + I_2) = 2\det(A^2 + I_2) + 2\det A = 2(b-1)^2 + 2a^2 + 2b = 2(b^2 - b + 1) + 2a^2 \geq 2 \cdot \dfrac{3}{4} + 0 = \dfrac{3}{2}$, cu egalitate când $a = 0$, $b = \dfrac{1}{2}$.

XI.107. *Se dă parabola $y = ax^2 (a > 0)$. În fiecare punct $P(x, y)$ al parabolei, se consideră vectorul tangent $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{i} + 2ax\overrightarrow{j}$ şi vectorul normal $\overrightarrow{PQ'}$, orientat spre exterior, astfel încât $|\overrightarrow{PQ'}| = |\overrightarrow{PP'}|$. Apoi, se consideră vectorul $\overrightarrow{PQ} = \alpha(x) \cdot \overrightarrow{PQ'}$, unde $\alpha(x)$ este o funcţie dată. Determinaţi locul geometric al punctului Q, atunci când P descrie parabola, în fiecare din cazurile:*

a) $\alpha(x) = a, \forall x \in \mathbb{R}$; b) $\alpha(x) = -\dfrac{1}{a}, \forall x \in \mathbb{R}$; c) $\alpha(x) = \dfrac{1}{2ax}, \forall x \in \mathbb{R}^*$.

Adrian Corduneanu, Iaşi

Soluţie. Întrucât $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{i} + ax^2\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{i} + 2ax\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{PQ'} = 2ax\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{PQ} = \alpha(x)(2ax\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j})$, rezultă că $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = (x + 2ax \cdot \alpha(x))\overrightarrow{i} + (ax^2 - \alpha(x))\overrightarrow{j}$, prin urmare $x_Q = x + 2ax \cdot \alpha(x)$, iar $y_Q = ax^2 - \alpha(x)$.

a), b) Dacă $\alpha(x) = c$, $c \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2a}\right\}$, atunci $x_Q = (1 + 2ac)x$, cu $1 + 2ac \neq 0$, deci $x = \dfrac{x_Q}{1 + 2ac}$, iar $y_Q = \dfrac{a}{(1 + 2ac)^2} x_Q^2 - c$. În cazul în care $c = a$, locul geometric al lui Q este parabola $y = \dfrac{a}{(1+2a^2)^2}x^2 - a$, iar când $c = -\dfrac{1}{a}$, locul lui Q este parabola $y = ax^2 - \dfrac{1}{a}$.

c) Dacă $\alpha(x) = \dfrac{1}{2ax}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, atunci $x_Q = x + 2ax \cdot \dfrac{1}{2ax} = x+1$, deci $x = x_Q - 1$, iar $y_Q = ax^2 - \dfrac{1}{2ax} = a(x_Q-1)^2 - \dfrac{1}{2a(x_Q-1)}$. Ecuaţia locului geometric, în acest caz, este $y = a(x-1)^2 - \dfrac{1}{2a(x-1)}$, $x \neq 1$; invităm cititorul să traseze efectiv această curbă.

XI.108. *Calculaţi* $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^{1+\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\ldots+\frac{1}{\ln n}}$.

Cezar Lupu, student, Bucureşti

Soluţie. Fie $x_n = 1 + \dfrac{1}{\ln 2} + \dfrac{1}{\ln 3} + \ldots + \dfrac{1}{\ln n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; atunci $(\sqrt[n]{n})^{x_n} = e^{\frac{\ln n}{n}x_n}$. Pentru a calcula limita şirului de la exponent, folosim lema Stolz-Cesaro:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\frac{n}{\ln n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{\frac{n+1}{\ln(n+1)}-\frac{n}{\ln n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{(n+1)\ln n - n\ln(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln n - \ln(1+\frac{1}{n})^n} = 1.$$

Prin urmare, limita cerută este egală cu e.

XI.109. *Determinaţi* $a, b, c \in (0,\infty)$ *pentru care limita* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a}{\sqrt[n]{b}+c}\right)^n$ *există şi este finită.*

Constantin Chirilă, Iaşi

Soluţie. Dacă $a < c+1$, atunci există $\varepsilon > 0$ pentru care $a < c + 1 - \varepsilon$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b} = 1$, pentru acest ε, există $n_0(\varepsilon)$ astfel încât $\sqrt[n]{b} > 1 - \varepsilon$, $\forall n \geq n_0(\varepsilon)$. Când $n \geq n_0(\varepsilon)$, avem că $\dfrac{a}{\sqrt[n]{b}+c} < \dfrac{a}{c+1-\varepsilon} < 1$ şi atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a}{\sqrt[n]{b}+c}\right)^n = 0$. Cu un raţionament analog, obţinem că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a}{\sqrt[n]{b}+c}\right)^n = +\infty$, dacă $a > c+1$. Vom arăta că, pentru $a = c+1$, limita din enunţ este $b^{-\frac{1}{a}}$. Fie $y_n = \dfrac{\sqrt[n]{b}+c}{a} = \dfrac{\sqrt[n]{b}+a-1}{a} = 1 + \dfrac{n(\sqrt[n]{b}-1)}{na} = 1 + \dfrac{x_n}{n}$, unde $x_n = \dfrac{n(\sqrt[n]{b}-1)}{a}$ este un şir cu limita $\dfrac{\ln b}{a}$. Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a}{\sqrt[n]{b}+c}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(1+\frac{x_n}{n})^n} = \dfrac{1}{e^{\frac{\ln b}{a}}} = b^{-\frac{1}{a}}$. În concluzie, limita există şi este finită dacă şi numai dacă $a \leq c+1$.

XI.110. *Date funcţiile continue* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *sunt echivalente afirmaţiile:*

i) $f = g$;

ii) *dacă* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *este continuă, ecuaţia* $f(x) = h(x)$ *are soluţii reale atunci şi numai atunci când ecuaţia* $g(x) = h(x)$ *are soluţii reale.*

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Implicaţia i)⇒ii) este evidentă. Pentru a demonstra reciproca, este suficient să arătăm că: dacă f, g sunt funcţii continue distincte, există h continuă astfel încât una dintre ecuaţiile $f(x) = h(x)$ şi $g(x) = h(x)$ are soluţii reale, iar cealaltă nu. Să justificăm această afirmaţie.

În ipoteza că $f \neq g$, putem presupune că $f(p) > g(p)$, pentru un număr real p; fie $[a, b]$ un interval care conţine p în interior, iar $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \begin{cases} \max\{f(x), g(x)\} + 1, & x < a \\ \max\{f(x), g(x)\} + \dfrac{p-x}{p-a}, & a \leq x < p \\ \max\{f(x), g(x)\} + \dfrac{x-p}{b-p}, & p \leq x < b \\ \max\{f(x), g(x)\} + 1, & b \leq x \end{cases}.$$

Se verifică faptul că h este continuă. Cum $h(x) > \max\{f(x), g(x)\}$, $\forall x \neq p$, înseamnă că niciuna dintre ecuaţiile $f(x) = h(x)$ şi $g(x) = h(x)$ nu poate avea soluţii diferite de p. Pe de altă parte, $h(p) = f(p) > g(p)$, deci prima ecuaţie are soluţia p, iar cea de-a doua nu are soluţii, ceea ce trebuia demonstrat.

Nota autorului. Afirmaţia problemei rămâne adevărată pentru funcţii polinomiale pe porţiuni.

Clasa a XII-a

XII.106. *Pentru $a > 0$ dat, calculaţi* $\displaystyle\int \frac{ax+2}{x(a + x^2 e^{ax})} dx$*, unde* $x \in (0, +\infty)$

I.V. Maftei, Bucureşti şi Mihai Haivas, Iaşi

Soluţie. Dacă $\varphi(x) = x^2 e^{ax}$, atunci $\varphi'(x) = xe^{ax}(ax + 2)$, deci

$$\int f(x)dx = \int \frac{\varphi'(x)}{x^2 e^{ax}(a + \varphi(x))} dx = \int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)(a + \varphi(x))} dx =$$
$$= \frac{1}{a}\left(\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx - \int \frac{\varphi'(x)}{a + \varphi(x)} dx\right) = \frac{1}{a} \ln \frac{\varphi(x)}{a + \varphi(x)} + \mathcal{C} =$$
$$= \frac{1}{a} \ln \frac{x^2 e^{ax}}{a + x^2 e^{ax}} + \mathcal{C}.$$

XII.107. *Fie* $U_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx$ *şi* $V_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} dx$*, unde* $n \in \mathbb{N}^*$*. Arătaţi că* $U_n = (-1)^n V_n = \dfrac{\pi}{2}$*,* $\forall n \in \mathbb{N}^*$*.*

Gheorghe Costovici, Iaşi

Soluţie. Demonstrăm prin inducţie matematică faptul că $U_n = \dfrac{\pi}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Pentru $n = 1$, avem:

$$U_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 - 4\sin^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos 2x) dx = \frac{\pi}{2}.$$

Apoi, presupunem că $U_n = \dfrac{\pi}{2}$ şi demonstrăm că $U_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x+2x)}{\sin x} dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x\cdot(1-2\sin^2 x)+\cos(2n+1)x\cdot 2\sin x\cos x}{\sin x} dx = \\ &= U_n + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2n+1)x\cdot\cos x - \sin(2n+1)x\sin x)dx = \\ &= U_n + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2n+2)x dx = U_n = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Dacă în U_n facem schimbarea de variabilă $x = \dfrac{\pi}{2} - t$, obţinem că $U_n = (-1)^n V_n$ şi astfel soluţia problemei este completă.

XII.108. *Demonstraţi că şirul* $(a_n)_{n\geq 1}$ *definit prin* $a_n = \displaystyle\int_1^n \frac{\ln x}{x^p+1}dx$, $\forall n \geq 1$, *unde* $p \in (1,\infty)$ *este fixat, este convergent.*

Rodica Luca Tudorache, Iaşi

Soluţie. Deoarece $a_{n+1} - a_n = \int_n^{n+1} \dfrac{\ln x}{x^p+1}dx > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că şirul este monoton crescător. Considerând funcţia $g : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \ln x - x^{\frac{p-1}{2}}$ şi studiindu-i variaţia, observăm că există $x_0 \geq 1$ astfel încât $g(x) \leq 0$, $\forall x \in [x_0,+\infty)$ (unde $x_0 = 1$ când $p \geq 1 + \dfrac{2}{e}$ şi $x_0 > 1$ dacă $p \in (1, 1+\dfrac{2}{e})$). Atunci:

$$\begin{aligned} a_n &= \int_1^{x_0} \frac{\ln x}{x^p+1}dx + \int_{x_0}^n \frac{\ln x}{x^p+1}dx \leq A + \int_{x_0}^n \frac{x^{\frac{p-1}{2}}}{x^p+1}dx < \\ &< A + \int_{x_0}^n \frac{x^{\frac{p-1}{2}}}{x^p}dx = A + \frac{2}{1-p}x^{\frac{1-p}{2}}\Big|_{x_0}^n < A + \frac{2}{p-1}x_0^{\frac{1-p}{2}} = B, \end{aligned}$$

unde $A = \displaystyle\int_1^{x_0} \frac{\ln x}{x^p+1}dx$, pentru $n \geq [x_0]+1$. Rezultă astfel că şirul dat este mărginit superior, iar concluzia urmează din teorema lui Weierstrass.

Notă (**Gheorghe Costovici**). Se arată, cu metode ce depăşesc puţin nivelul matematicii de liceu, că dacă $c > 0$, $p > 1$, atunci există $\displaystyle\lim_{y\to\infty}\int_1^y \frac{\ln x}{x^p+c} \in [0,+\infty)$. De aici, problema rezultă ca un caz particular.

XII.109. *Fie* $(G,\cdot)$ *un grup comutativ, cu proprietatea că există* $n \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât din* $x^n = y^n$, $x, y \in G$, *rezultă că* $x = y$. *Dacă* f, g *sunt endomorfisme ale lui* G, *arătaţi că ecuaţia* $f(x) = g(x^{-1})$ *are soluţie unică în* G, *dacă şi numai dacă funcţia* $h : G \to G$, $h(x) = f(x^n)\cdot g(x^n)$ *este injectivă.*

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

Notă. Problema a fost publicată, cu numărul XII.74, în RecMat 2/2006, iar soluţia sa poate fi găsită în RecMat 2/2007, pg. 136. De această situaţie este vinovată redacţia, care îşi cere scuze.

XII.110. *Fie $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ polinoame neconstante, astfel încât P şi Q au aceleaşi rădăcini, iar $P-1$ şi $Q-1$ au şi ele aceleaşi rădăcini. Arătaţi că $P=Q$.*

Adrian Reisner, Paris

Soluţie. Fie $n = grP$, $m = grQ$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ rădăcinile lui P, de multiplicităţi $k_1, \ldots, k_p$, iar $\beta_1, \ldots, \beta_r$ rădăcinile lui $P-1$, de multiplicităţile $l_1, \ldots, l_r$. Notăm cu D şi Δ cei mai mari divizori comuni ai perechilor de polinoame (P, P'), respectiv $(P-1, P')$. Cum D şi Δ divid P şi $P-1$, iar $(P, P-1) = 1$, atunci $(D, \Delta) = 1$. Însă $D|P', \Delta|P'$, prin urmare $D \cdot \Delta|P'$, deci $gr(D \cdot \Delta) \leq n-1$. Pe de altă parte, $gr\, D = \sum\limits_{i=1}^{p}(k_i - 1) = n - p$, $gr\, \Delta = \sum\limits_{i=1}^{r}(l_i - 1) = n - r$, aşadar $2n - p - r \leq n - 1$, adică $p + r \geq n + 1$. Procedând asemănător în cazul lui Q, obţinem că $p + r \geq m + 1$.

Observăm că $P - Q = (P-1) - (Q-1)$ este un polinom care se anulează în $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_r$, iar aceste numere sunt distincte, întrucât $(P, P-1) = 1$. Rezultă că $P - Q$ are cel puţin $p + r$ rădăcini, cu $p + r \geq \max\{m, n\} + 1$. Însă $gr(P - Q) \leq \max\{m, n\}$, prin urmare $P - Q = 0$, deci $P = Q$.

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor propuse în nr. 1/2010

A. Nivel gimnazial

G156. *Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$, cu $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n} = 1$. Arătaţi că $\dfrac{1}{a_1^3 + a_2^2} + \dfrac{1}{a_2^3 + a_3^2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n^3 + a_1^2} < \dfrac{1}{2}$.*

Angela Ţigăeru, Suceava

Soluţie. Din datele problemei rezultă că $a_i \in (1, \infty)$, $\forall i = \overline{1, n}$, prin urmare $\dfrac{1}{a_1^3 + a_2^2} < \dfrac{1}{1 + a_2^2} \leq \dfrac{1}{2a_2}$. Procedând analog cu ceilalţi termeni şi sumând inegalităţile obţinute, rezultă cerinţa problemei.

G177. *Fie $k > 0$ şi $a, b, c \in [0, +\infty)$ astfel încât $a + b + c = 1$. Demonstraţi că $\dfrac{a}{a^2 + a + k} + \dfrac{b}{b^2 + b + k} + \dfrac{c}{c^2 + c + k} \leq \dfrac{9}{9k + 4}$.*

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie (Gheorghe Iurea). Sensul inegalităţii din enunţ, să o numim (I), depinde de parametrul $k > 0$; pentru $k = 0,01$, $a = 0,1$, $b = 0,2$, $c = 0,7$ inegalitatea este falsă. Cu notaţia $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + x + k}$, $x > 0$, şi având în vedere condiţia $a + b + c = 1$, (I) se scrie $f(a) + f(b) + f(c) \leq 3f\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)$ şi va fi adevărată pentru valorile lui k pentru care funcţia f este concavă (inegalitatea lui Jensen). Cum $f''(x) = \dfrac{2(x^3 - 3kx - k)}{(x^2 + x + k)^3}$, $x > 0$, problema revine la a găsi valorile lui k pentru care $g(x) = x^3 - 3kx - k \leq 0$, $x \in (0, 1)$. Ecuaţia de gradul trei $g(x) = 0$ are discriminantul