PROBLEME ŞI SOLUŢII

Soluţiile problemelor propuse în nr. 1 / 2006

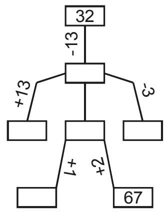
Clasele primare

P.104. *Suma dintre predecesorul unui număr şi succesorul numărului următor lui este* 29. *Care este acest număr?*

(*Clasa I*) **Irina Luca, elevă, Iaşi**

Soluţie. Suma dintre numărul căutat şi succesorul lui este $29 = 14 + (14 + 1)$. Deducem că numărul căutat este 14.

P.105. *Alăturat se află roboţelul "MATE".*



a) Completaţi casetele goale;

b) Aflaţi suma numerelor pe care le ţine în mâini;

c) Aflaţi diferenţa numerelor scrise în tălpile picioarelor.

(*Clasa I*) **Andrei Stativă, elev, Iaşi**

Soluţie. *a*) Pe umeri se află numărul a astfel încât $a - 13 = 32$, de unde $a = 32 + 13 = 45$.

b) În mâna stângă are $45 - 3 = 42$, iar în dreapta are numărul cu 13 mai mic decât 45, adică 32. Suma numerelor pe care le ţine în mâini este $42 + 32 = 74$.

c) La baza bustului are numărul $67 + 2 = 69$, iar pe talpa dreaptă ţine numărul $69 + 1 = 70$. Diferenţa este $70 - 67 = 3$.

P.106. *Pentru desemnarea campioanei, echipele de hochei pe gheaţă A şi B dispută un număr de partide până ce una dintre ele câştigă de* 4 *ori. Care este numărul maxim de partide care se pot juca, ştiind că nu au fost rezultate de egalitate?*

(*Clasa a II-a*) **Înv. Constanţa Cristea şi Inst. Iulian Cristea, Iaşi**

Soluţie. Numărul maxim de partide care se pot juca este 7. Într-adevăr, este posibil să se realizeze scorul $4 - 3$.

P107. *Un grup de turişti a consumat* 17 *prăjituri şi* 31 *îngheţate. Ştiind că* 7 *turişti au consumat câte o îngheţată şi câte o prăjitură,* 5 *turişti au consumat numai câte două îngheţate, iar* 4 *turişti nu au consumat nimic, iar restul câte un singur produs (îngheţată sau prăjitură), să se afle câţi turişti sunt în grup.*

(*Clasa a II-a*) **Aliona Loghin, elevă, Iaşi**

Soluţie. Numărul turiştilor care au consumat câte o prăjitură este $17 - 7 = 10$. Numărul turiştilor care au consumat câte o îngheţată este $31 - 7 - 5 - 5 = 14$. În cofetărie au intrat $7 + 10 + 5 + 14 + 4 = 40$ turişti.

P108. *Prin împărţirea a două numere naturale rezultă câtul* 3 *şi restul* 6. *Ştiind că împărţitorul este un număr mai mic decât* 10, *aflaţi cele două numere.*

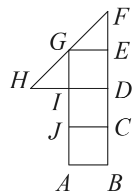
(*Clasa a III-a*) **Înv. Rica Bucătariu, Iaşi**

Soluţie. Punând condiţia $r < î$, putem avea: $7 \times 3 + 6 = 27$, $8 \times 3 + 6 = 30$; $9 \times 3 + 6 = 33$.

P.109. *Figura alăturată este formată din beţişoare.*

a) Îndepărtează un singur beţişor pentru a obţine tot atâtea triunghiuri ca şi pătrate;

b) Mută două beţişoare pentru a obţine de două ori mai multe dreptunghiuri decât pătrate.

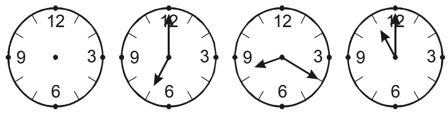


(*Clasa a III-a*) **Adina Voinescu, elevă, Iaşi**

Soluţie. *a*) Îndepărtând unul din beţişoarele DE sau EG sau GI obţinem două triunghiuri şi două pătrate.

b) Mutăm beţişoarele ID şi JC astfel încât să formăm un dreptunghi de lăţime AB şi lungime BF. În acest caz vom avea un pătrat şi două dreptunghiuri.

P.110. *Ce oră indică primul ceas, ştiind că acesta respectă regula indicată de celelalte trei?*



(*Clasa a III-a*) **Veronica Corbu, elevă, Iaşi**

Soluţie. De la al doilea ceas la al treilea ceas avem o creştere de $1h\ 20'$, iar de la al treilea ceas la al patrulea ceas avem o creştere de $2h\ 40'$. Regula constă în dublarea creşterii. Cum $1h\ 20'$ este dublul lui $40'$, primul ceas arată $6h\ 20'$.

P.111. *Fie numărul* $N = \overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba}$.

a) *Care este cea mai mică şi cea mai mare valoare a lui* N*?*

b) *Câte valori diferite poate avea numărul* N*?*

(*Clasa a IV-a*) **Oxana Pascal, elevă, Iaşi**

Soluţie. Avem $N = 222 \cdot (a + b + c)$.

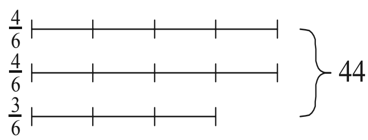
a) Cea mai mică valoare a ui N este $222 \cdot 3 = 666$.

Cea mai mare valoare a lui N este $222 \cdot 27 = 5994$.

b) Valorile sumei $a+b+c$ sunt de la 3 la 27. Numărul N poate lua $27-3+1 = 25$ valori diferite.

P.112. *În urma desfăşurării unui joc didactic matematic, învăţătorul a oferit ca recompensă* 44 *baloane. Câte* 4 *baloane au primit un număr de participanţi ce reprezintă a şasea parte din totalul lor, câte două au primit a treia parte, iar restul participanţilor au primit câte un balon. Aflaţi numărul participanţilor la joc (soluţie aritmetică!).*

(*Clasa a IV-a*) **Alexandra Nistor, elevă, Iaşi**



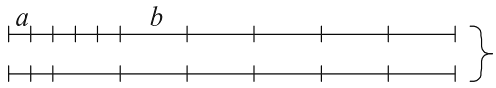
Soluţie. Presupunem că mai adăugăm nişte elevi, în mod convenabil, astfel încât fiecare elev să primească câte un singur balon din cele 44. Astfel, $\frac{1}{6}$ se transformă în $\frac{4}{6}$, $\frac{1}{3}$ se transformă în $\frac{4}{6}$, iar restul $\frac{1}{2}$ se transformă în $\frac{3}{6}$ Să figurăm noua situaţie.

O şesime din numărul elevilor participanţi la concurs primeşte $44 : 11 = 4$ baloane. Numărul elevilor participanţi la concurs este $4 \times 6 = 24$.

P.113. *Dan şi-a pus timbrele în clasor, câte* 10 *pe unele pagini, câte* 30 *pe alte pagini şi au rămas de* 4 *ori mai multe pagini goale decât folosite. Dacă ar pune câte* 5 *timbre pe fiecare pagină, toate paginile ar fi folosite. Câte pagini poate avea*

clasorul, ştiind că nu depăşeşte 60 *(soluţie aritmetică!)?*
(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

Soluţie. Notăm cu a numărul de pagini cu câte 10 timbre şi cu b numărul de pagini cu câte 30 timbre. Din prima informaţie deducem că numărul paginilor clasorului este $5\,(a+b)$. Din a doua informaţie rezultā că numărul paginilor clasorului este $2a+6b$. Să figurăm această situaţie.



Constatăm că $b = 3a$.

Distingem cazurile:
$a=1 \Rightarrow b=3 \Rightarrow 5\,(1+3)=5\cdot 4=20$ (pagini);
$a=2 \Rightarrow b=3\cdot 2 \Rightarrow b=6 \Rightarrow 5\,(2+6)=5\cdot 8=40$ (pagini);
$a=3 \Rightarrow b=3\cdot 3 \Rightarrow b=9 \Rightarrow 5\,(3+9)=60$ (pagini).

Clasa a V-a

V.66. *Să se arate că, oricare ar fi cifra nenulă a, numărul* $x = 21^{\overline{31a}} + 32^{\overline{a13}} + 43^{\overline{a31}}$ *se divide cu* 10.

Otilia Nemeş, Ocna Mureş (Alba)

Soluţie. Deoarece $\overline{a13} = M4+1$, iar $\overline{a31} = M4+3$, atunci $U(21^{\overline{31a}}) = 1$, $U(32^{\overline{a13}}) = 2$, iar $U(43^{\overline{a31}}) = 7$. Deducem că $U\,(x) = 0$, deci $x \,\vdots\, 10$.

V.67. *a) Să se arate că, scăzând din suma a* 2006 *numere pare consecutive suma numerelor situate între acestea, nu se poate obţine rezultatul* 2006^2.

b) Să se afle 2006 *numere pare consecutive astfel încât, scăzând din suma lor suma numerelor situate între ele, să se obţină* 2005^2.

Marian Panţiruc, Iaşi

Soluţie. *a*) Între 2006 numere pare consecutive se află 2005 numere impare, cu suma număr impar; deducem că şi diferenţa este tot impară.

b) Fie a numărul cel mai mic; atunci

$$[a+(a+2)+\cdots+(a+4010)] - [(a+1)+(a+3)+\cdots+(a+4009)] = 2005^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a+2005 = 2005^2 \Leftrightarrow a = 2004\cdot 2005.$$

V.68. *Arătaţi că nu există* $n \in \mathbb{N}$ *pentru care* $A_n = 5^n + 89$ *să fie pătrat perfect.*

Iulia Pleşca, elevă, Iaşi

Soluţie. Avem că $A_0 = 90$, $A_1 = 94$ nu sunt pătrate perfecte. Pentru $n \geq 2$, ultimele două cifre ale lui 5^n sunt 25, deci A_n se termină în 14. Deducem că $A_n \,\vdots\, 2$, dar $A_n \not\vdots\, 4$, prin urmare A_n nu poate fi pătrat perfect.

V.69. *Să se rezolve în* $\mathbb{N}^2$ *ecuaţia* $8^n + 15^m = 6 + 6^2 + \cdots + 6^{2006}$.

Alexandru Gabriel Tudorache, elev, Iaşi

Soluţie (Cezara Maria Enea, elevă, Iaşi**).** Din 15^m - număr impar şi $6 + 6^2 + \cdots + 6^{2006}$ - număr par, rezultă că 8^n este număr impar, deci $n = 0$. Atunci $1 + 15^n \neq M3$, iar $6+6^2+\cdots+6^{2006} = M3$, contradicţie, deci ecuaţia nu are soluţii.

V.70. *Determinaţi* $a \in \mathbb{N}$ *pentru care numerele* a, $a+2$, $a+6$, $a+12$, $a+18$, $a+20$, $a+26$, $a+30$, $a+32$, $a+36$, $a+60$ *sunt simultan prime.*

Lucian Tuţescu, Craiova

Soluţie. Cum numerele 0, 2, 6, 12, 18, 20, 26, 30, 32, 36, 60 generează toate resturile posibile la împărţirea prin 11, acelaşi lucru se întâmplă şi pentru cele 11 numere date. Deducem că cel puţin unul din ele se divide cu 11 şi, cum numerele sunt prime, măcar unul este egal cu 11. Avem de studiat trei cazuri:

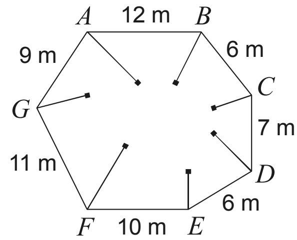
i) Dacă $a = 11$, numere sunt 11, 13, 17, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 71, toate prime.

ii) Dacă $a + 2 = 11$, atunci $a = 9$ nu este prim.

iii) Dacă $a + 6 = 11$, atunci $a = 5$, însă $a + 20 = 25$ nu este prim.

Valoarea căutată a lui a este 11.

Clasa a VI-a



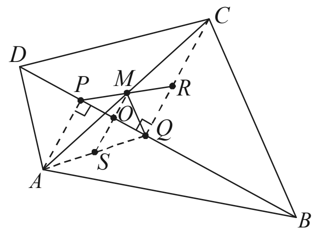
VI.66. *Alăturat este desenată o grădină având forma unui poligon cu 7 laturi. În fiecare vârf se află câte o poartă mobilă astfel încât, în oricare două vârfuri vecine, porţile să închidă perfect latura pe care acestea o determină. Să se afle lungimile porţilor.*

Roxana Căpăţână, elevă, Iaşi

Soluţie. Fie x lungimea porţii din A. Atunci porţile din B, C, D, E, F, G au respectiv lungimele:$12-x$; $6-(12-x) = x-6$; $7-(x-6) = 13-x$; $6-(13-x) = x-7$, $10-(x-7) = 17-x$; $11-(17-x) = x-6$. Punem condiţia de închidere a porţilor pe latura $[AG] : x+(x-6) = 9 \Leftrightarrow x = 7,5$. Lungimile celor 7 porţi vor fi $7,5$m; $4,5$m; $1,5$m; $5,5$m; $0,5$m; $9,5$m, respectiv $1,5$m.

VI.67. *În patrulaterul $ABCD$ construim $AP \perp BD$, $CQ \perp BD$, $P, Q \in BD$ şi fie M mijlocullui (AC). Dacă punctele M, P, Q sunt distincte două câte două, demonstraţi că $\triangle MPQ$ este isoscel.*

Marius Farcaş, Iaşi



Soluţia 1 (a autorului). Fie $\{R\} = PM \cap CQ$. Avem că $\widehat{PAM} \equiv \widehat{RCM}$ (alterne interne), $\widehat{AMP} \equiv \widehat{CMR}$ (opuse la vârf) şi $AM = MC$, prin urmare $\triangle AMP \equiv \triangle CMR$ (U.L.U). Deducem că $PM = MR$ şi atunci QM este mediană în $\triangle PQR$ dreptunghic în Q, de unde rezultă că $QM = \dfrac{1}{2}PR = PM$, adică $\triangle MPQ$ este isoscel.

Soluţia 2 (Gabriel Popa). Fie S mijlocul lui $[AQ]$, iar $\{O\} = MS \cap BD$. Atunci MS este linie mijlocie în $\triangle ACQ$, prin urmare $MS \parallel CQ$. Rezultă că $OS \parallel AP$ şi, cum S este mijlocul lui $[AQ]$, avem că OS este linie mijlocie în $\triangle OAP$. Astfel, O este mijlocul lui $[PQ]$ şi $MO \perp PQ$, deci $\triangle MPQ$ este isoscel.

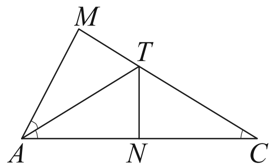
Soluţia 3 (Alexandra Cadar, elevă, Iaşi**).** Aplicăm teorema medianei şi teorema lui Pitagora:

$$PM^2 = \frac{2\left(PA^2 + PC^2\right) - AC^2}{4} = \frac{2\left(PA^2 + PQ^2 + QC^2\right) - AC^2}{4} =$$
$$= \frac{2\left(AQ^2 + QC^2\right) - AC^2}{4} = MQ^2.$$

VI.68. *Fie punctele A, C, M cu $m(\widehat{AMC}) \neq 90°$ şi $AC = 2\,AM$. Să se arate* *că M este mijlocul lui $[AC]$ dacă şi numai dacă $2m(\widehat{ACM}) = m(\widehat{MAC})$.*

Ioan Săcăleanu, Hârlău

Soluţie. Dacă M este mijlocul lui $[AC]$, atunci $m(\widehat{ACM}) = m(\widehat{MAC}) = 0°$, de unde $2m(\widehat{ACM}) = m(\widehat{MAC})$. Reciproc, să presupunem că $2m(\widehat{ACM}) = m(\widehat{MAC})$. Dacă A, M, C nu ar fi coliniare, fie N mijlocul lui $[AC]$ şi $[AT$ bisectoarea lui $\widehat{MAC}$, $T \in MC$. Atunci $\triangle TAC$ este isoscel şi TN este mediană, prin urmare $TN \perp AC$. Pe de altă parte, $\triangle MAT \equiv \triangle NAT$ (L.U.L.), deci $m(\widehat{AMC}) = m(\widehat{ANT}) = 90°$, ceea ce contravine ipotezei. Rămâne că punctele A, M, C sunt coliniare. În plus, nu putem avea punctul M pe prelungirile segmentului $[AC]$, altfel $m(\widehat{MAC}) = 180° \neq 0° = 2m(\widehat{ACM})$. Deducem că M este mijlocul lui $[AC]$, ceea ce încheie rezolvarea.



VI.69. *Să se arate că pentru orice alegere a semnelor în expresia $\pm 1^2 \pm 2^2 \pm \cdots \pm 2006^2$, rezultatul nu se divide cu 2006.*

Mihail Bencze, Braşov

Soluţie. Dacă ar exista o alegere a semnelor pentru care rezultatul să se dividă cu 2006, în mod necesar ar trebui ca $\pm 1 \pm 2 \pm \cdots \pm 2006$ şi 2006 să aibă aceeaşi paritate (o putere are aceeaşi paritate cu baza sa). Cum suma şi diferenţa au aceeaşi paritate, ar rezulta că $1 + 2 + \cdots + 2006$ este număr par, deci $1003 \cdot 2007$ este par, absurd. Astfel, rămâne adevărată concluzia.

VI.70. *Determinaţi $m, n \in \mathbb{Z}$ pentru care $a = \dfrac{3m+1}{2m+1} + \dfrac{n+2}{3n+5} \in \mathbb{Z}$.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Cele două fracţii din expresia lui a sunt ireductibile. Într-adevăr:

$$d \mid 3m+1,\ d \mid 2m+1 \Rightarrow d \mid 3\,(2m+1) - 2\,(3m+1) \Rightarrow d \mid 1$$

şi analog pentru a doua. Cum $(3m+1, 2m+1) = 1$, $(3n+5, n+2) = 1$, obţinem:

$$(3n+5)\,a = (3n+5)\,\frac{3m+1}{2m+1} + n + 2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2m+1 \mid 3n+5;$$

$$(2m+1)\,a = 3m+1 + (2m+1)\,\frac{n+2}{3n+5} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3n+5 \mid 2m+1,$$

prin urmare $|3n+5| = |2m+1|$.

i) Dacă $3n+5 = 2m+1$, atunci $3n = 2\,(m-2)$, deci $m - 2 = 3k$, $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, iar $a = \dfrac{11k+9}{6k+5} \in \mathbb{Z}$. Obţinem că $6k+5 \mid 11k+9$, de unde $6k+5 \mid 6\,(11k+9) - 11\,(6k+5)$, adică $6k+5 \mid -1$. Deducem că $6k+5 \in \{-1, 1\}$, deci $k = -1$ şi astfel $(m, n) = (-1, -2)$.

ii) Dacă $3n+5 = -2m-1$, atunci $3n = -2\,(m+3)$, de unde $m+3 = 3k$, $n = -2k$, $k \in \mathbb{Z}$, iar $a = \dfrac{11k-10}{6k-5} \in \mathbb{Z}$. Ca mai sus, găsim soluţiile $(m, n) \in \{(-3, 0)\,; (0, -2)\}$.

Clasa a VII-a

VII.66. *Să se rezolve în $\mathbb{R}^4$ ecuaţia*

$$30\sqrt{x-y+901} + 25\sqrt{y-z+626} + 20\sqrt{z-x+401} + 9\sqrt{t-x+78} = 2006.$$

Ioana Olan, elevă, Iaşi

Soluţia 1. În condiţiile de existenţă a radicalilor, folosind inegalitatea mediilor, avem:

$$30\sqrt{x-y+901}+25\sqrt{y-z+626}+20\sqrt{z-t+401}+9\sqrt{t-x+78}=$$
$$=\sqrt{900\,(x-y+901)}+\sqrt{625\,(y-z+626)}+\sqrt{400\,(z-t+401)}+\sqrt{81\,(t-x+78)}\leq$$
$$\leq\frac{900+x-y+901}{2}+\frac{625+y-z+626}{2}+\frac{400+z-t+401}{2}+\frac{81+t-x+78}{2}=2006.$$

Cum se atinge egalitatea, în mod necesar vom avea că $x-y+901$, $y-z+626=625$, $z-t+401=400$ şi $t-x+78=81$. Sistemul obţinut este nedeterminat, cu soluţiile $\{(\alpha,\alpha+1,\alpha+2,\alpha+3)\mid\alpha\in\mathbb{R}\}$.

Soluţia 2. Egalitatea din ipoteză se poate scrie sub forma

$$\left(30-\sqrt{x-y+901}\right)^2+\left(25-\sqrt{y-z+626}\right)^2+$$
$$+\left(20-\sqrt{z-t+401}\right)^2+\left(9-\sqrt{t-x+78}\right)^2=0.$$

Fiecare termen al sumei trebuie să se anuleze etc.

VII.67. *Aflaţi $a,b\in\mathbb{N}$ dacă $a+b=18$ şi $10^{a+1}-9b+71\,\vdots\,81$.*

Andrei-Sorin Cozma, elev, Iaşi

Soluţie. Avem:

$$10^{a+1}-9b+71=\left(10^{a+1}-1\right)-9\,(b+1)+81=\underbrace{\overline{99\ldots9}}_{a+1\text{ cifre}}-9\,(b+1)+81=$$
$$=9\Big(\underbrace{\overline{11\ldots1}}_{a+1\text{ cifre}}-b-1\Big)+81=9\Big(\underbrace{\overline{11\ldots10}}_{a\text{ de }1}-b\Big)+81,$$

deci $10^{a+1}-9b+71\,\vdots\,81\Leftrightarrow\underbrace{\overline{11\ldots10}}_{a\text{ de }1}-b\,\vdots\,9$. Restul împărţirii lui $\underbrace{\overline{11\ldots10}}_{a\text{ de }1}$ prin 9 este acelaşi cu restul împărţirii lui $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{a\text{ de }1}+0$ prin 9, deci $\underbrace{\overline{11\ldots10}}_{a\text{ de }1}-b\,\vdots\,9\Leftrightarrow a-b\,\vdots\,9$. Cum $a+b=18$, obţinem soluţiile $(a,b)\in\{(0,18);(9,9);(18,0)\}$.

VII.68. *Fie $\triangle ABC$ dreptunghic, cu ipotenuza de lungime a, catetele b şi c, iar aria S. Dacă $x,y\in(0,\infty)$, să se arate că $\dfrac{a^2}{S}=\dfrac{2\left(x^2+y^2\right)}{xy}$ dacă şi numai dacă b şi c sunt direct sau invers proporţionale cu x şi y.*

Veronica Plăeşu şi Dan Plăeşu, Iaşi

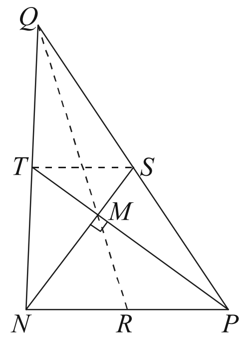
Soluţie. Avem succesiv:

$$\frac{a^2}{S}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)}{xy}\Leftrightarrow\frac{2\left(b^2+c^2\right)}{bc}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)}{xy}\Leftrightarrow xy\left(b^2+c^2\right)=bc\left(x^2+y^2\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow bx\,(by-cx)-cy\,(by-cx)=0\Leftrightarrow(by-cx)\,(bx-cy)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow by-cx=0\text{ sau }bx-cy=0\Leftrightarrow\frac{b}{x}=\frac{c}{y}\text{ sau }\frac{b}{\frac{1}{x}}=\frac{c}{\frac{1}{y}}.$$

VII.69. *Fie* $\triangle MNP$ *cu* $m(\widehat{NMP}) = 90°$*; se consideră punctele* $S, T, M \in (NS)$*,* $M \in (PT)$*, astfel încât* $NS = 3\,MS$*,* $PT = 3\,MT$*. Dacă* $\{Q\} = PS \cap NT$*, atunci:*

a) $QM = NP$*;* *b)* $QN^2 + QP^2 = 5\,NP^2$*.*

Dorel Luchian, Iaşi



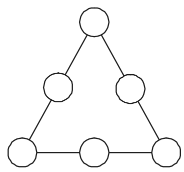
Soluţie. *a)* Fie $\{R\} = QM \cap NP$. Cum $\dfrac{MS}{MN} = \dfrac{MT}{MP} = \dfrac{1}{2}$, din reciproca teoremei lui Thales rezultă că $TS \parallel NP$. Atunci $\triangle MTS \sim \triangle MPN$, de unde $\dfrac{TS}{NP} = \dfrac{1}{2}$, iar $\triangle QTS \sim \triangle QNP$, prin urmare $\dfrac{QS}{QP} = \dfrac{QT}{QN} = \dfrac{TS}{NP} = \dfrac{1}{2}$. Astfel, NS şi PT sunt mediane în $\triangle QNP$, deci M va fi centrul de greutate al $\triangle QNP$. Rezultă că R este mijlocul lui $[NP]$, iar $QM = 2MR$. Pe de altă parte, MR este mediană în $\triangle MNP$ dreptunghic, deci $NP = 2MR$. Deducem că $QM = NP$.

b) Aplicăm în mod repetat teorema lui Pitagora:

$$QN^2 + QP^2 = (2TN)^2 + (2SP)^2 = 4\left(MT^2 + MN^2\right) + 4\left(MS^2 + MP^2\right) =$$
$$= 4\left(MN^2 + MP^2\right) + 4\left(MT^2 + MS^2\right) = 4NP^2 + 4TS^2 = 5NP^2.$$

VII.70. *Triunghiul alăturat este considerat fix. În câte moduri putem aşeza numerele* 1, 2, 3, 4, 5, 6 *în cerculeţe, astfel încât suma numerelor de pe fiecare latură a triunghiului să fie aceeaşi?*

Petru Asaftei, Iaşi



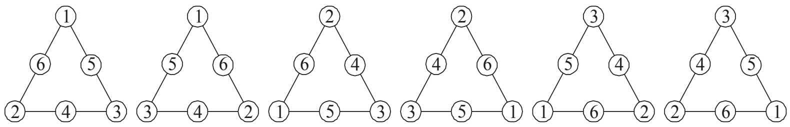
Soluţie. Fie i, j, k cele trei numere din vârfuri; cum fiecare vârf aparţine la câte două laturi, suma numerelor de pe fiecare latură va fi:

$$S = \frac{1}{3}\left[(1 + 2 + \cdots + 6) + (i + j + k)\right] = 7 + \frac{i + j + k}{3}.$$

Acest număr trebuie să fie natural, deci $i + j + k \,\vdots\, 3$. Valoarea minimă pentru $i + j + k$ este $1 + 2 + 3 = 6$, iar cea maximă este $4 + 5 + 6 = 15$, prin urmare $i + j + k \in \{6, 9, 12, 15\}$. Deducem că

$$\{i, j, k\} \in \{\{1,2,3\}; \{1,2,6\}; \{1,3,5\}; \{2,3,4\}; \{1,5,6\}; \{2,4,6\}; \{3,4,5\}; \{4,5,6\}\}.$$

Odată fixată mulţimea $\{i, j, k\}$, cele trei numere pot fi permutate pe cele trei cerculeţe din vârfuri în 6 moduri, iar apoi numerele din mijloacele laturilor, dacă există, sunt bine determinate. Spre exemplu, dacă $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, avem că $S = 9$ şi obţinem completările:



Se constată uşor că nu avem posibilitatea completării triunghiului dacă $\{i, j, k\} \in \{\{1,2,6\}; \{2,3,4\}; \{1,5,6\}, \{3,4,5\}\}$. Obţinem astfel că numărul de completări posibile este $4 \cdot 6 = 24$.

Clasa a VIII-a

VIII.66. *Să se demonstreze că*

$$\frac{1}{2^4+2^2+1}+\frac{1}{3^4+3^2+1}+\cdots+\frac{1}{n^4+n^2+1}<\frac{n-1}{3n}.$$

Carmen Daniela Tamaş, Bârlad

Soluţie. Are loc inegalitatea $\frac{1}{k^4+k^2+1}\leq\frac{1}{3k^2}$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$, deoarece aceasta revine la $\left(k^2-1\right)^2\geq 0$. Egalitatea se atinge numai pentru $k=1$. Atunci

$$\frac{1}{2^4+2^2+1}+\frac{1}{3^4+3^2+1}+\cdots+\frac{1}{n^4+n^2+1}<$$
$$<\frac{1}{3\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 3^2}+\cdots+\frac{1}{3\cdot n^2}<\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\,n}\right)=$$
$$=\frac{1}{3}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{n-1}{3n}.$$

Notă. Elevul **Florian Păliţă**, Petroşani, demonstrează inegalitatea prin inducţie matematică.

VIII.67. *Fie $0<a<b<c<d<e$ şi propoziţiile:*

$$p_1:\ b=\frac{2ac}{a+c};\quad p_2:\ c=\frac{b+d}{2};\quad p_3:\ c=\sqrt{ae};\quad p_4:\ d=\frac{2ce}{c+e}.$$

Să se arate că dacă oricare trei dintre propoziţii sunt adevărate, atunci este adevărată şi cea de-a patra.

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

Soluţie. Considerăm întâi că p_1, p_4 sunt adevărate şi să arătăm că $p_2\Leftrightarrow p_3$. Avem:

$$c=\frac{b+d}{2}\Leftrightarrow 2c=\frac{2ac}{a+c}+\frac{2ce}{c+e}\Leftrightarrow 1=\frac{a}{a+c}+\frac{e}{c+e}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a\,(c+e)+e\,(a+c)=(a+c)\,(c+e)\Leftrightarrow c^2=ae\Leftrightarrow c=\sqrt{ae}.$$

Demonstrăm acum că $p_1\wedge p_2\wedge p_3\Rightarrow p_4$. Din p_3 obţinem că $\frac{a}{c}=\frac{c}{e}$, deci $\frac{a}{a+c}=\frac{c}{c+e}$. Atunci, folosind p_2 şi apoi p_1, avem:

$$d=2c-b=2c-\frac{2ac}{a+c}=2c\Big(1-\frac{a}{a+c}\Big)=\frac{2c^2}{a+c}=\frac{2ae}{a+c}=\frac{2ce}{c+e},$$

deci p_4 este adevărată. La fel se arată că $p_2\wedge p_3\wedge p_4\Rightarrow p_1$.

VIII.68. *Fie $A_n=2006^n+2005^n-1992^n-1991^n$, $n\in\mathbb{N}$. Să se determine n pentru care $A_n\,\vdots\,28$.*

Ionel Nechifor, Iaşi

Soluţie. Folosind faptul că $a^n-b^n\,\vdots\,a-b$, $\forall n\in\mathbb{N}$, deducem că $2006^n-1992^n\,\vdots\,7$, $2005^n-1991^n\,\vdots\,7$, deci $A_n\,\vdots\,7$. Să vedem când $A_n\,\vdots\,4$. Avem că $A_0=0\,\vdots\,4$, $A_1=28\,\vdots\,4$. Dacă $n\geq 2$, atunci $2006^n=(M4+2)^n=M4+2^n\,\vdots\,4$ şi este evident că $1992^n=(M4)^n\,\vdots\,4$. Astfel, $A_n\,\vdots\,4\Leftrightarrow 2005^n-1991^n\,\vdots\,4\Leftrightarrow(M4+1)^n-(M4-1)^n\,\vdots\,4\Leftrightarrow M4+1-(-1)^n\,\vdots\,1-(-1)^n=0\Leftrightarrow n$ par. În concluzie, $A_n\,\vdots\,28$ pentru $n\in\{1\}\cup\{2k\mid k\in\mathbb{N}\}$.

VIII.69. *Fie $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$ astfel încât $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$. Determinaţi cea mai mică şi cea mai mare valoare a expresiei*

$$E\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1.$$

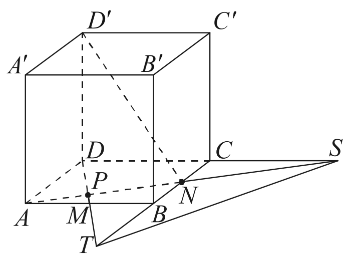
Ion Vişan şi Lucian Tuţescu, Craiova

Soluţie. Expresia se scrie sub forma $E = \dfrac{(x_1+x_2+x_3+1)^2-2}{2}$. Atunci $E_{\min} = -1$, iar această valoare se atinge, de exemplu, pentru $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = -1$. Din inegalitatea $MA \leq MP$, avem că $\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3} \leq \sqrt{\dfrac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, cu egalitate când $x_1 = x_2 = x_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Astfel, $E_{\max} = \dfrac{\left(3\cdot 1/\sqrt{3}+1\right)^2-2}{2} = 1+\sqrt{3}$, iar această valoare se atinge pentru $x_1 = x_2 = x_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

VIII.70. *Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ şi fie M, N mijloacele muchiilor $[AB]$, respectiv $[BC]$, iar $\{S\} = AN \cap CD$, $\{T\} = DM \cap BC$. Să se afle măsura unghiului format de $D'N$ şi ST.*

Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Fie $\{P\} = AN \cap DM$. Din $\triangle AMD \equiv \triangle BNA$ (C.C) rezultă că $\widehat{ADP} \equiv \widehat{PAM}$. Însă $m(\widehat{PAM}) + m(\widehat{DAP}) = 90°$,deci $m(\widehat{ADP}) + m(\widehat{DAP}) = 90°$ şi atunci $m(\widehat{APD}) = 90°$, adică $AN \perp DM$. Deducem că SP şi TC sunt înălţimi în $\triangle DST$, prin urmare N va fi ortocentrul acestui triunghi, iar DN este tot înălţime: $DN \perp TS$. Din $DD' \perp (ABC)$ urmează că $DD' \perp TS$, deci $TS \perp (DD'N)$, de unde $D'N \perp ST$.



Clasa a IX-a

IX.66. *Pentru $x, y \in \mathbb{R}$, fie $a = y + xy - x$, $b = x^2 + x - xy$.*

a) Dacă $a, b \in (-\infty, 0)$, să se compare numerele x şi y.

b) Arătaţi că există o infinitate de numere raţionale x, y pentru care $a, b \in (-\infty, 0)$.

Ionuţ Onofrei, elev, Hârlău

Soluţie. *a*) Din $a + b < 0$, obţinem că $x^2 + y < 0$, deci $y < -x^2 < 0$. Să presupunem prin absurd că $x \geq 0$; din $b = x(x+1-y) < 0$ rezultă că $x+1-y < 0$, deci $x < -1+y$. Dar $-1+y < 0$ şi am ajuns la o contradicţie. Cum $x, y < 0$, deducem că $xy > 0$, prin urmare $y - x = a - xy < 0$. În concluzie, $y < x$.

b) De exemplu, putem considera $x = -\dfrac{1}{n}$, $y = -\dfrac{n+1}{n}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$; atunci $a = \dfrac{-n^2+n+1}{n^2}$ şi $b = -\dfrac{2}{n}$ sunt ambele negative.

IX.67. *Fie $n \geq 2$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ astfel încât*

$$\left(a_2a_3\cdots a_n\right)^2 + \left(a_1a_3a_4\cdots a_n\right)^2 + \cdots + \left(a_1a_2\cdots a_{n-1}\right)^2 = 1.$$

Să se arate că $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_2a_3\cdots a_n + a_1a_3\cdots a_n + \cdots + a_1a_2\cdots a_{n-1} \geq n.$

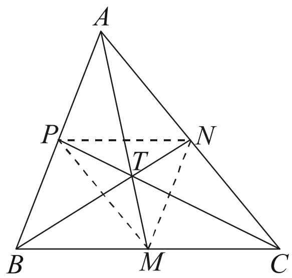
Adrian Zahariuc, elev, Bacău

Soluţie. În dezvoltarea produsului $\prod\limits_{i=1}^{n}\Big(a_i + \prod\limits_{j\neq i} a_j\Big)$ apar toţi termenii de tipul

$\left(\prod\limits_{j\neq i} a_j\right)^2$, $i=\overline{1,n}$, deci $\prod\limits_{i=1}^{n}\left(a_i+\prod\limits_{j\neq i} a_j\right)\geq\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\prod\limits_{j\neq i} a_j\right)^2=1$. Din inegalitatea mediilor avem că $n\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}\left(a_i+\prod\limits_{j\neq i} a_j\right)}\leq\sum\limits_{i=1}^{n}\left(a_i+\prod\limits_{j\neq i} a_j\right)$, de unde concluzia problemei. Egalitatea se atinge când $n-1$ numere sunt egale cu 1, iar cel rămas este 0.

IX.68. *În $\triangle ABC$ se consideră cevienele $[AM]$, $[BN]$, $[CP]$ concurente în T. Să se arate că $\dfrac{TA}{TM}=\dfrac{TB}{TN}=\dfrac{TC}{TP}$ dacă şi numai dacă T este centrul de greutate al $\triangle ABC$.*

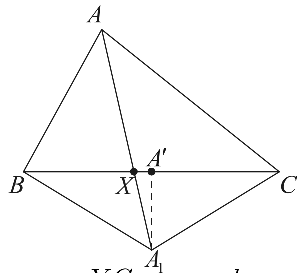
Ovidiu Pop, Satu Mare



Soluţie. Cum $\dfrac{TB}{TN}=\dfrac{TC}{TP}$ şi $\widehat{BTC}\equiv\widehat{NTP}$ (opuse la vârf), rezultă că $\triangle BTC\sim\triangle NTP$, de unde $\widehat{TBC}\equiv\widehat{TNP}$, prin urmare $PN\parallel BC$. Analog se arată că $MN\parallel AB$, $PM\parallel AC$. Fie $k=\dfrac{AP}{AB}$; atunci $\dfrac{PB}{AB}=1-k$, $\dfrac{AN}{AC}=\dfrac{AP}{AB}=k$, $\dfrac{BM}{BC}=\dfrac{AN}{AC}=k$, $\dfrac{BM}{BC}=\dfrac{BP}{AB}=1-k$. Din ultimele două relaţii obţinem $k=\dfrac{1}{2}$, deci P este mijlocul lui $[AB]$, apoi M, N sunt mijloace pentru $[BC]$, respectiv $[AC]$. În concluzie, T este centrul de greutate al $\triangle ABC$. Reciproca este imediată.

IX.69. *Fie $\triangle ABC$ nedreptunghic. Paralela prin B la AC şi simetrica dreptei AC în raport cu BC se intersectează în A_1; analog se obţin punctele B_1 şi C_1. Dacă AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente, să se arate că $\triangle ABC$ este echilateral.*

Temistocle Bîrsan, Iaşi



Soluţie. Pentru început, fie $\triangle ABC$ ascuţitunghic. Se vede uşor că $\triangle BCA_1$ este isoscel, deci A_1 se află pe mediatoarea lui $[BC]$. Fie $\{X\}=AA_1\cap BC$; evident că $X\in(BC)$. Din $\triangle BXA_1\sim\triangle CXA$ obţinem

$$\frac{XB}{XC}=\frac{BA_1}{CA}\Rightarrow\frac{XB}{XC}=\frac{a}{2b\cos C}$$

(căci în $\triangle A'BA_1$ dreptunghic avem $\cos C=\dfrac{BA'}{BA_1}=\dfrac{a}{2BA_1}$). Analog caracterizăm $Y\in(CA)$ şi $Z\in(AB)$ prin $\dfrac{YC}{YA}=\dfrac{b}{2c\cos A}$, $\dfrac{ZA}{ZB}=\dfrac{c}{2a\cos B}$. Concurenţa dreptelor AA_1, BB_1, CC_1 conduce la

$$\frac{a}{2b\cos C}\cdot\frac{b}{2c\cos A}\cdot\frac{c}{2a\cos B}=1\Leftrightarrow\cos A\cos B\cos C=\frac{1}{8}.$$

În binecunoscuta inegalitate $\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C\leq\dfrac{1}{8}$, egalitatea se atinge pentru $A=B=C$, deci $\triangle ABC$ este echilateral.

Dacă $\triangle ABC$ ar fi obtuzunghic, două dintre punctele X, Y, Z sunt situate pe laturi, iar al treilea pe prelungirea laturii corespunzătoare. În acest caz, dreptele AA_1, BB_1, CC_1 nu vor putea fi concurente.

IX.70. *Să se arate că* $\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{tg} 25^\circ + \operatorname{tg} 35^\circ + \operatorname{tg} 85^\circ > 4$.

D. M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

Notă. Cu ajutorul unui tabel care dă valorile tangentei, se constată că $\operatorname{tg} 85^\circ \simeq 11,43$, valoare deja mai mare decât 4.

Clasa a X-a

X.66. *Notăm cu* $\mathcal{D}$ *mulţimea punctelor* $P(x, y)$ *din planul* xOy *situate în interiorul sau pe laturile* $\triangle ABC$*. Fie* $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$*; definim funcţia* $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $f(P) = ax + by + c$*. Să se arate că pentru orice* $P \in \mathcal{D}$*, avem*

$$\min\{f(A), f(B), f(C)\} \leq f(P) \leq \max\{f(A), f(B), f(C)\}.$$

Adrian Corduneanu, Iaşi

Soluţie. Fie $M(\alpha_1, \beta_1)$, $N(\alpha_1, \beta_1)$; arătăm că valorile minimă şi maximă ale lui $f(P)$, când P parcurge $[MN]$, se ating în capetele segmentului. Dacă $P \in [MN]$, există $t \in [0, 1]$ astfel încât $x_P = \alpha_1 + t(\alpha_2 - \alpha_1)$, $y_P = \beta_1 + t(\beta_2 - \beta_1)$. Atunci

$$f(P) = (a\alpha_1 + b\beta_1 + c) + t[a(\alpha_2 - \alpha_1) + b(\beta_2 - \beta_1)] = f(M) + t[f(N) - f(M)].$$

Dacă $f(N) - f(M) > 0$, atunci $f(M) \leq f(P) \leq f(N)$, $\forall P \in [MN]$. Dacă $f(N) - f(M) < 0$, atunci $f(N) \leq f(P) \leq f(M)$, $\forall P \in [MN]$. În sfârşit, dacă $f(N) - f(M) = 0$, atunci $f(P) = f(M)$, $\forall P \in [MN]$.

Revenim la problema iniţială. Fără a micşora generalitatea, presupunem că $f(A) \leq f(B) \leq f(C)$. Fie $P \in \mathcal{D}$ oarecare, iar $\{Q\} = AP \cap BC$. Deoarece $f(B) \leq f(Q) \leq f(C)$, avem $f(A) \leq f(P) \leq f(C)$ şi demonstraţia este încheiată.

X.67. *Fie* $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\}$*. Să se determine funcţiile crescătoare* $f : \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] \to (0, \infty)$ *pentru care* $f(x + y) = f(x) f(y)$, $\forall x, y \in Q\left[\sqrt{2}\right]$.

Dan-Ştefan Marinescu şi Viorel Cornea, Hunedoara

Soluţie. Fie $g : \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \lg f(x)$; atunci $g(x + y) = g(x) + g(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$. Fie $k = g(1)$; cu metoda obişnuită de rezolvare a ecuaţiilor funcţionale de tip Cauchy, se arată că $g(x) = kx$, $\forall x \in \mathbb{Q}$ şi $g\left(x\sqrt{2}\right) = g\left(\sqrt{2}\right) \cdot x$, $\forall x \in \mathbb{Q}$. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ arbitrar, avem:

$$\left[n\sqrt{2}\right] \leq n\sqrt{2} < \left[n\sqrt{2}\right] + 1 \Rightarrow g\left(\left[n\sqrt{2}\right]\right) \leq n\, g\left(\sqrt{2}\right) \leq g\left(\left[n\sqrt{2}\right] + 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k\left[n\sqrt{2}\right] \leq n\, g\left(\sqrt{2}\right) \leq \left(\left[n\sqrt{2}\right] + 1\right) k \Rightarrow \frac{k}{n}\left[n\sqrt{2}\right] \leq g\left(\sqrt{2}\right) \leq \frac{\left[n\sqrt{2}\right] + 1}{n}\, k,$$

deci $\left|g\left(\sqrt{2}\right) - k\sqrt{2}\right| \leq \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$. Astfel, rezultă că $g\left(\sqrt{2}\right) = k \cdot \sqrt{2}$, de unde

$$g\left(m + n\sqrt{2}\right) = g(m) + g\left(n\sqrt{2}\right) = km + kn\sqrt{2} = k\left(m + n\sqrt{2}\right),$$

adică $g(x) = kx$, $\forall x \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$, unde $k \in (0, +\infty)$. Notând $a = 10^k \geq 1$, obţinem că $f(x) = 10^{g(x)} = \left(10^k\right)^x = a^x$, cu $a \geq 1$. Pentru orice $a \in [1, +\infty)$, funcţia $f(x) = a^x$ verifică ipoteza problemei, deci funcţiile căutate sunt cele exponenţiale cu baza ≥ 1.

X.68. *Pe cercul trigonometric se consideră punctele* A, B, C *de afixe* 1, ε, ε^2, *unde* $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i \sin\dfrac{2\pi}{3}$*. Fie* $M(z)$ *un punct al cercului situat pe arcul* $\overset{\frown}{BC}$ *ce nu conţine* A*. Să se arate că* $\left|z^2 + z + 1\right| = -\dfrac{z^2 + z + 1}{z}$.

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Fie $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$, cu $\alpha \in [2\pi/3, 4\pi/3]$. Avem:

$$\left|z^2+z+1\right|^2 = (\cos 2\alpha + \cos\alpha + 1)^2 + (\sin 2\alpha + \sin\alpha)^2 =$$
$$= \left(\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha\right) + \left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) + 1 +$$
$$+2\left(\cos 2\alpha\cos\alpha + \sin 2\alpha \sin\alpha\right) + 2\cos 2\alpha + 2\cos\alpha =$$
$$= 3 + 2\cos\alpha + 2\left(2\cos^2\alpha - 1\right) + 2\cos\alpha = 4\cos^2\alpha + 4\cos\alpha + 1 = (2\cos\alpha + 1)^2.$$

Cum $\alpha \in [2\pi/3, 4\pi/3]$, atunci $2\cos\alpha + 1 \le 0$, deci $\left|z^2+z+1\right| = |2\cos\alpha + 1| = -2\cos\alpha - 1$. Evident că $\dfrac{z^2+z+1}{z} = 2\cos\alpha + 1$, de unde concluzia.

X.69. *Dacă $a, b, c > 1$, să se demonstreze inegalitatea*

$$a^{\sqrt[3]{\log_a b} + \sqrt[3]{\log_a c}} + b^{\sqrt[3]{\log_b a} + \sqrt[3]{\log_b c}} + c^{\sqrt[3]{\log_c a} + \sqrt[3]{\log_c b}} \le \frac{(a+b+c)^2}{3}.$$

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Deoarece $a, b, c > 1$, atunci $\log_a b > 0$, $\log_a c > 0$ etc. Folosind inegalitatea mediilor, obţinem:

$$\sqrt[3]{\log_a b} + \sqrt[3]{\log_a c} = \sqrt[3]{1\cdot 1\cdot \log_a b} + \sqrt[3]{1\cdot 1\cdot\log_a c} \le$$
$$\le \frac{1}{3}(1+1+\log_a b) + \frac{1}{3}(1+1+\log_a c) = \frac{1}{3}\left(\log_a a^2 b + \log_a a^2 c\right) = \log_a a\sqrt[3]{abc}.$$

Cum $a > 1$, $b > 1$, $c > 1$, avem:

$$a^{\sqrt[3]{\log_a b} + \sqrt[3]{\log_a c}} + b^{\sqrt[3]{\log_b a} + \sqrt[3]{\log_b c}} + c^{\sqrt[3]{\log_c a} + \sqrt[3]{\log_c b}} \le$$
$$\le a^{\log_a a\sqrt[3]{abc}} + b^{\log_b b\sqrt[3]{abc}} + c^{\log_c c\sqrt[3]{abc}} =$$
$$= a\sqrt[3]{abc} + b\sqrt[3]{abc} + c\sqrt[3]{abc} = (a+b+c)\cdot\sqrt[3]{abc} \le \frac{(a+b+c)^2}{3}.$$

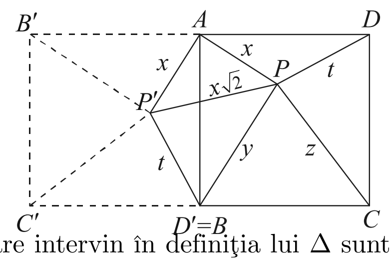
Egalitatea se obţine pentru $a = b = c$.

X.70. *Fie pătratul $ABCD$. Să se determine mulţimea*

$$\Delta = \left\{P \in \operatorname{Int} ABCD \mid PA^2, 2PB\cdot PD, PC^2 \text{ sunt laturile unui triunghi}\right\}.$$

Cătălin Calistru, Iaşi

Soluţie. Notăm $PA = x$, $PB = y$, $PC = z$, $PD = t$; atunci



$$\triangle = \left\{P \in \operatorname{Int} ABCD \mid x^2 + 2yt > z^2,\right.$$
$$\left. x^2 + z^2 > 2yt,\ z^2 + 2yt > x^2\right\}.$$

Aplicând teorema medianei în $\triangle PAC$ şi $\triangle PBD$, cum $AC = BD$, obţinem că $x^2+z^2 = y^2+t^2$. Astfel, $x^2+z^2 > 2yt \Leftrightarrow y^2 + t^2 > 2yt \Leftrightarrow (y-t)^2 > 0 \Leftrightarrow y \ne t \Leftrightarrow P \notin AC$. Celelalte două inegalităţi care intervin în definiţia lui Δ sunt satisfăcute de către orice punct $P \in \operatorname{Int} ABCD$, prin urmare $\Delta = \operatorname{Int} ABCD \setminus [AC]$.

Să demonstrăm că $x^2 + 2yt > x^2$, $\forall P \in \operatorname{Int} ABCD$, pentru prima inegalitate procedându-se analog. Aplicăm pătratului o rotaţie de unghi $\dfrac{\pi}{2}$ în jurul lui A; se conservă astfel lungimile segmentelor x, y, z, t,deci $\triangle APP'$ este dreptunghic isoscel cu $PP' = x\sqrt{2}$. Din $\triangle PP'B$, obţinem:

$$y + t > x\sqrt{2} \Rightarrow y^2 + t^2 + 2yt > 2x^2 \Rightarrow x^2 + z^2 + 2yt > 2x^2 \Rightarrow z^2 + 2yt > x^2.$$

Clasa a XI-a

XI.66. *Fie x_n, $n \in \mathbb{N}^*$, cel mai mic număr natural cu proprietatea că există $M = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}_{(10)}$ cu toate cifrele nenule, astfel încât $M = (n+1)\sqrt[n+1]{a_n a_{n-1} \cdots a_0} + 9x_n$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{10^n}$.*

Valeriu Braşoveanu, Bârlad

Soluţie. $x_n = \dfrac{1}{9}\left[M - (n+1)\sqrt[n+1]{a_n a_{n-i} \cdots a_0}\right] \geq \dfrac{1}{9}[M - (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_0)]$, cu egalitate pentru $a_n = a_{n-1} = a_{n-1} = \cdots = a_0 = k$. Condiţia de minimalitate impusă lui x_n conduce la

$$x_n = \frac{1}{9}\Bigg[\underbrace{\overline{kk\dots k}}_{n+1 \text{ cifre}} - \underbrace{k + k + \cdots + k}_{n+1 \text{ termeni}}\Bigg] = \frac{k}{9}\left[\overline{11\dots 1} - (n+1)\right].$$

Din aceeaşi condiţie de minimalitate deducem $k = 1$, deci $x_n = \dfrac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{10^n} = \dfrac{10}{81}$.

XI.67. *Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 \in \left(-\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$, $x_{n+1} = 2x_n - \operatorname{tg} x_n$, $\forall n \geq 1$. Să se studieze existenţa limitelor $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{-x_n}$.*

Dan Popescu, Suceava

Soluţie. Dacă presupunem că $x_n \in \left(-\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$, atunci $x_{n+1} = f(x_n)$, unde $f : \left[-\dfrac{\pi}{4}, 0\right] \to \mathbb{R}$, $f(t) = 2t - \operatorname{tg} t$ este funcţie strict crescătoare. Obţinem că $f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\pi}{2} + 1 < x_{n+1} = f(x_n) < f(0) = 0$ şi deoarece $\left(-\dfrac{\pi}{2} + 1, 0\right) \subset \left(-\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$, rezultă că şirul $(x_n)_{n>1}$ este corect definit, strict crescător şi mărginit. Pentru $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, avem că $\operatorname{tg} x = x \Leftrightarrow x = 0$; folosind acest fapt, prin trecere la limită în relaţia de recurenţă rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Apoi, $(-x_n)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln(-x_n)}{n}}$, $\forall n \geq 1$, iar $\ln(-x_{n+1}) - \ln(-x_n) = \ln \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \ln \dfrac{2\operatorname{tg} x_n - x_n}{x_n}$, $\forall n \geq 1$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\operatorname{tg} x_n - x_n}{x_n} = 1$, cu criteriul lui Stolz-Cesàro se deduce că $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{-x_n} = e^0 = 1$.

XI.68. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ interval, o funcţie de două ori derivabilă cu $f''(x) \geq f'(x)$, $\forall x \in I$. Să se arate că $f(x) - f(a) \geq (e^{x-a} - 1) f'(a)$, $\forall x, a \in I$. Pentru $f(x) = e^{\alpha x}$, $\alpha \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$, să se deducă inegalitatea lui Bernoulli.*

Dumitru Mihalache, Bârlad

Soluţie. Considerăm funcţia $g : I \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - f(a) - (e^{x-a} - 1) \cdot f'(a)$. Avem că $g(a) = 0$, iar $g'(x) = e^x \left(\dfrac{f'(x)}{e^x} - \dfrac{f'(a)}{e^a}\right)$. Funcţia $h : I \to \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{f'(x)}{e^x}$ are derivata pozitivă pe I: $h'(x) = \dfrac{f''(x) \cdot e^x - f'(x) \cdot e^x}{e^{2x}} = \dfrac{f'' x - f'(x)}{e^x} \geq 0$,

$\forall x \in I$, deci h este monoton crescătoare. Deducem că $g'(x) \geq 0$ pentru $x > a$ şi $g'(x) \leq 0$ pentru $x < a$, adică a este punct de minim pentru g. Cum $g(a) = 0$, obţinem că $g(x) \geq 0$, $\forall x \in I$, de unde inegalitatea dorită.

Pentru $f(x) = e^{\alpha x}$, condiţia $f''(x) \geq f'(x)$ revine la $\alpha^2 \geq \alpha$, deci este satisfăcută pentru $\alpha \in (\infty, 0] \cup [1, \infty)$. Deci are loc concluzia problemei, ce se mai scrie sub forma

$$e^x \left(e^{(\alpha-1)x} - \alpha e^{(\alpha-1)a}\right) \geq (1-\alpha) e^{\alpha a}.$$

Trecem $x \to \ln x$, $a \to \ln a$ şi obţinem

$$x\left(x^{\alpha-1} - \alpha a^{\alpha-1}\right) \geq (1-\alpha) a^{\alpha} \Leftrightarrow x^{\alpha} > (1-\alpha) a^{\alpha} + \alpha x a^{\alpha-1},$$

pentru orice $x, a > 0$ şi orice $\alpha \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$. Pentru $a = 1$, rezultă că $x^{\alpha} \geq 1 + \alpha(x-1)$, $\forall \alpha \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$, ceea ce constituie o uşoară îmbunătăţire a inegalităţii lui Bernoulli.

XI.69. *Fie* $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *astfel încât* $\det(AX + B) \geq 0$, $\forall X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. *Să se arate că există* $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *pentru care* $A = BC$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Pentru $X = O_3$, obţinem că $\det B \geq 0$. Dacă $\det B \neq 0$, atunci există B^{-1}; fie $D = B^{-1}A$. Avem că $\det B(DX + I_3) \geq 0$, $\forall X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ şi cum $\det B > 0$, deducem că $\det(DX + I_3) \geq 0$, $\forall X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Dacă $D = \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ u & v & w \end{pmatrix}$, pentru $X = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ obţinem că $DX + I_3 = \begin{pmatrix} ax+1 & 0 & 0 \\ \alpha x & 1 & 0 \\ ux & 0 & 1 \end{pmatrix}$, cu $x \in \mathbb{R}$ oarecare. Atunci $\det(DX + I_3) = ax + 1 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, de unde $a = 0$. Considerând acum $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$, găsim că $bx + 1 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci $b = 0$ etc. Rezultă că $D = O_3$, adică $B^{-1}A = O_3$, de unde $A = O_3$. Luand $C = O_3$, are loc concluzia.

Dacă $\det B = 0$, să presupunem prin absurd că există X_0 cu $\det(AX_0 + B) > 0$. Cum $\det(AX + (AX_0 + B)) = \det(A(X + X_0) + B) \geq 0$, $\forall X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, folosind cele demonstrate anterior rezultă că $A = O_3$ şi atunci $\det B > 0$, fals. Rămâne că $\det(AX + B) = 0$, $\forall X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Pe de altă parte, din $\det B = 0$ rezultă P, Q inversabile astfel încât $B = PSQ$, unde S este una dintre matricele $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sau $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Obţinem

$$\det(AX + PSQ) = 0, \forall X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \det P\left(P^{-1}AX + S\right)Q = 0, \forall X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \det(A_1 X + S) = 0, \forall X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \text{ unde } A_1 = P^{-1}A.$$

În cazul în care $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, luând $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, apoi $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

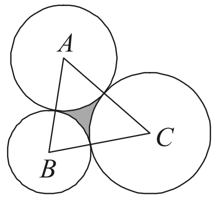
găsim că $A_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = SM$, unde $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Atunci $A = PA_1 = PSM = PSQQ^{-1}M = BC$, cu $C = Q^{-1}M$. La fel se procedează când $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sau $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

XI.70. *Fie a, b, c laturile unui triunghi ale cărui unghiuri au măsurile în radiani A, B, C şi care are raza cercului înscris r. Să se arate că distanţa de la punctul $M(A, B, C)$ la planul $\mathcal{P} : ax + by + cz + r = 0$ este mai mare decât $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{3}$.*

Sorin Puşpană, Craiova

Soluţie. Să arătăm întâi că în $\triangle ABC$ are loc inegalitatea

$$S > \frac{A}{2}(p-a)^2 + \frac{B}{2}(p-b)^2 + \frac{C}{2}. \qquad (*)$$



Pentru demonstraţie, observăm că există trei cercuri tangente două câte două, cu centrele în vârfurile triunghiului; razele lor sunt $p-a$, $p-b$, respectiv $p-c$. Evaluând aria zonei haşurate, obţinem imediat $(*)$.

Cum $A + B + C = \pi$ şi $S = rp$, relaţia $(*)$ se scrie echivalent

$$\pi p^2 - 2(aA + bB + cC + r)p + \left(a^2A + b^2B + c^2C\right) < 0.$$

Dacă $\Delta \leq 0$, expresia de gradul II în p din stânga păstrează semn constant, iar acesta este $+$. Rezultă că $\Delta > 0$, deci

$$aA + bB + cC + r > \sqrt{\pi\left(a^2A + b^2B + c^2C\right)} \Leftrightarrow$$

$$\left|\frac{aA + bB + cC + r}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right| > \sqrt{\pi \cdot \frac{a^2A + b^2B + c^2C}{a^2 + b^2 + c^2}} \geq \frac{\pi\sqrt{3}}{3},$$

la ultima inegalitate folosind inegalitatea lui Cebîşev.

Clasa a XII-a

XII.66. *Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $0 \leq a < b$ şi fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă pe $[a, b]$, cu f'' continuă. Dacă*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{a^2}{2}f'(a) - \frac{b^2}{2}f'(b) + bf(b) - af(a),$$

să se arate că există $\theta \in (a, b)$ astfel încât $f''(\theta) = 0$.

Mihai Haivas, Iaşi

Soluţie. Avem:

$$\int_a^b f(x)\,dx = xf(x)\Big|_a^b - \int_a^b xf'(x)\,dx =$$

$$= bf(b) - af(a) - \left[\frac{x^2}{2}f'(x)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{x^2}{2}f''(x)\,dx\right] =$$

$$= bf(b) - af(a) + \frac{a^2}{2}f'(a) - \frac{b^2}{2}f'(b) + \frac{1}{2}\int_a^b x^2 f''(x)\,dx.$$

Din ipoteză rezultă că $\int_a^b x^2 f''(x)\,dx = 0$. Conform teoremei de medie, există $\theta \in (a,b)$ astfel încat $\int_a^b x^2 f''(x)\,dx = \theta^2 f''(\theta)(b-a)$ şi cum $\theta \neq 0$, atunci $f''(\theta) = 0$.

XII.67. *Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că există $L \geq 0$ astfel încât $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$, $\forall x, y \in [0,1]$. Să se arate că pentru orice primitivă F a lui f şi pentru orice $x_1, x_2, \ldots x_n \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, are loc*

$$\left| F\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) - \frac{F(x_1) + F(x_2) + \cdots + F(x_n)}{n} \right| \leq \frac{L}{2n^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - y_j)^2 .$$

Dan-Ştefan Marinescu, Hunedoara

Soluţie. Cum f este lipschitziană, ea este continuă şi în consecinţă admite primitive. Fie $x, y \in [0,1]$, $x > y$; atunci $-L(x-y) \leq f(x) - f(y) \leq L(x-y)$, deci funcţia $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - Lx$ este descrescătoare, iar funcţia $h : [0,1] \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) + Lx$ este crescătoare. Deducem că funcţia $G : [0,1] \to \mathbb{R}$, $G(x) = F(x) - \frac{L}{2}x^2$ este concavă, iar $H : [0,1] \to \mathbb{R}$, $H(x) = F(x) + \frac{L}{2}x^2$ este convexă. Aplicând inegalitatea lui Jensen, obţinem:

$$F\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) - \frac{L}{2}\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^2 \geq \frac{F(x_1) + \cdots + F(x_n)}{n} - \frac{L}{2}\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n};$$

$$F\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) + \frac{L}{2}\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^2 \leq \frac{F(x_1) + \cdots + F(x_n)}{n} + \frac{L}{2}\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}.$$

Folosind aceste relaţii şi identitatea evidentă

$$\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n} - \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2 ,$$

obţinem concluzia.

XII.68. *Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{P(x)}$, $g(x) = e^{Q(x)}$, unde P, Q sunt polinoame de grad $m \geq 1$, având coeficienţii dominanţi a, respectiv b, $a, b \in (0, \infty)$.*

a) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \left(f(n) \int_0^n g(x)\,dx\right) / \left(g(n) \int_0^n f(x)\,dx\right)$.

b) Să se studieze buna definire a şirurilor $(a_n)_{n \geq 1}$ şi $(b_n)_{n \geq 1}$, unde $f(a_n) = \frac{1}{n}\int_0^n f(x)\,dx$, $g(b_n) = \frac{1}{n}\int_0^n g(x)\,dx$ şi apoi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

Marius Apetrii, Iaşi

Soluţie. *a)* Evident că f şi g sunt strict crescătoare. În ipoteza nerestrictivă $a \geq b$, folosind regula lui l'Hospital pentru nedeterminări de tipul $\frac{\infty}{\infty}$, obţinem:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)\int_0^x g(t)\,dt}{g(x)\int_0^x f(t)\,dt} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{P(x)-Q(x)}\int_0^x e^{Q(t)}dt}{\int_0^x e^{P(t)}dt} =$$

$$= 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{[P'(x) - Q'(x)]\int_0^x e^{Q(t)}dt}{e^{Q(x)}} = 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{P'(x) - Q'(x)}{x^{m-1}} \cdot \frac{x^{m-1}\int_0^x e^{Q(t)}dt}{e^{Q(x)}} =$$

$$= 1 + m(a-b) \lim_{x\to\infty} \frac{e^{Q(x)}}{(1-m)x^{-m}e^{Q(x)} + x^{1-m}Q'(x)e^{Q(x)}} =$$

$$= 1 + m(a-b)\frac{1}{mb} = \frac{a}{b}.$$

b) Deoarece f şi g sunt strict monotone, din teorema de medie rezultă existenţa şi unicitatea funcţiilor ξ şi η definite prin $f(\xi(x)) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$, $g(\eta(x)) = \frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,dt$, deci $\xi(x) = f^{-1}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)$, $\eta(x) = g^{-1}\left(\frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,dt\right)$. Din teorema de derivare a inversei, funcţiile ξ şi η sunt derivabile, iar $\lim\limits_{x\to\infty}\xi(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\eta(x) = +\infty$. Avem:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\xi(x)}{\eta(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\xi'(x)}{\eta'(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{g'(\eta(x))}{f'(\xi(x))}\cdot\frac{\dfrac{f(x)}{x} - \dfrac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt}{\dfrac{g(x)}{x} - \dfrac{1}{x^2}\int_0^x g(t)\,dt} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{Q'(\eta(x))\,g(\eta(x))}{P'(\xi(x))\,f(\xi(x))}\cdot\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{1 - \dfrac{1}{f(x)}\left(\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)}{1 - \dfrac{1}{g(x)}\left(\dfrac{1}{x}\int_0^x g(t)\,dt\right)} =$$

$$= \frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\eta(x)}{\xi(x)}\right)^{m-1}\frac{f(x)\int_0^x g(t)\,dt}{g(x)\int_0^x f(t)\,dt} = \frac{b}{a}\frac{a}{b}\left[\lim_{x\to\infty}\frac{\eta(x)}{\xi(x)}\right]^{m-1},$$

de unde $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\xi(x)}{\eta(x)} = 1$. Am folosit pe parcurs faptul că

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt}{f(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{xf(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{f(x)+xP'(x)\,f(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+xP'(x)} = 0.$$

XII.69. *Fie $f\in\mathbb{R}[X]$ polinom reciproc de grad $4n+2$, $n\in\mathbb{N}^*$, având rădăcinile distincte, complexe şi nereale. Să se arate că f are cel puţin o rădăcină de modul 1.*

Cătălin Ţigăeru, Suceava

Soluţie. Cum f are coeficienţi reali şi este reciproc, dacă $a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ este rădăcină a lui f cu modulul diferit de 1, atunci a, $\frac{1}{a}$, $\overline{a}$, $\frac{1}{\overline{a}}$ sunt patru rădăcini distincte, de module diferite de 1, ale lui f. Cum polinomul are $4n+2$ rădăcini, concluzia este imediată.

XII.70. *Fie G un grup de ordin $n\geq 4$ cu proprietatea că există $m\in\mathbb{N}$, $1<m<n$, astfel încât G conţine exact C_{n-1}^{m-1} subgrupuri de ordin m. Arătaţi că G este abelian.*

Marius Tărnăuceanu, Iaşi

Soluţie. Considerăm submulţimile lui G care conţin elementul neutru e al lui G şi încă $m-1$ elemente din $G\setminus\{e\}$. Numărul acestor submulţimi este C_{n-1}^{m-1}, deci toate aceste submulţimi sunt subgrupuri ale lui G. Dacă $m>2$, alegem $x,y\in G\setminus\{e\}$ cu $x\neq y$. Cum $n-3\geq m-2\geq 1$, putem alege $m-2$ elemente din $G\setminus\{e,x,y\}$, fie acestea $a_1,a_2,\ldots,a_{m-2}$. Notăm $H_1=\{e,x,a_1,\ldots,a_{m-2}\}$, $H_2=\{e,y,a_1,\ldots,a_{m-2}\}$. Cum H_1 şi H_2 sunt subgrupuri ale lui G, $xa_1\in H_1$ (deoarece H_1 subgrup), $xa_1\neq e$ (altfel $x=a_1^{-1}\in H_2$), $xa_1\neq x$ (în caz contrar $a_1=e$) şi $xa_1\neq a_i$, $i=\overline{1,m-2}$ (altfel $x=a_ia_1^{-1}\in H_2$). Contradicţia la care am ajuns arată că $m=2$ şi $a^2=e$, $\forall a\in G$, deci G este grup abelian.

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor din nr. 1 / 2006

A. Nivel gimnazial

G96. *Fie $a = x^{12m} + x^{12n}$, unde $m, n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că numărul a este divizibil cu 13, dacă şi numai dacă x este divizibil cu 13.*

Artur Bălăucă, Botoşani

Soluţie. Dacă 13 divide x atunci 13 divide $x^{12m} + x^{12n} = a$. Reciproc, să zicem că 13 divide a. Presupunem că $n \leq m$, adică $m - n = p$, $p \in \mathbb{N}$. Dacă 13 nu divide x, din faptul că 13 divide $a = x^{12m} + x^{12n} = x^{12n}\left(x^{12p} + 1\right)$ rezultă că 13 divide numărul natural $x^{12p} + 1$. Conform teoremei lui Fermat, orice $x \in \mathbb{N}^*$ care nu se divide cu 13 are proprietatea că x^{12} dă restul 1 la împărţirea cu 13 şi atunci $x^{12p} + 1$ dă la împărţirea cu 13 restul 2, ceea ce contrazice faptul că 13 divide a. Deci, x se divide cu 13.

G97. *Determinaţi $a, b \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, $a \neq 0$, astfel încât numărul $A = \overline{a\underbrace{bb\ldots b}_{n \text{ ori}}}$, $n \geq 2$, să fie pătrat perfect.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Dacă $b = 0$, atunci A este pătrat perfect dacă şi numai dacă $a \in \{1, 4, 9\}$, iar n este par. Fie acum $b \neq 0$; cum b este ultima cifră a unui pătrat perfect, avem că $b \in \{1, 4, 5, 6, 9\}$. Pentru $b \in \{1, 9\}$, rezultă că $A = \mathcal{M}4 + 3$, care nu este pătrat perfect. Dacă $b = 5$, atunci $A = \overline{\ldots 55} = \mathcal{M}25 + 5$, care iarăşi nu este pătrat perfect. Când $b = 6$, obţinem situaţia nefavorabilă $A = \mathcal{M}4 + 2$.

Rămâne de studiat cazul $b = 4$. Avem:

$$A = \overline{a44\ldots 4} = a \cdot 10^n + 4 \cdot \overline{11\ldots 1} = 4t^2, \text{ cu } t^2 = a \cdot 10^{n-2} \cdot 25 + \overline{11\ldots 1}.$$

Pentru $n \geq 3$, numărul t^2 este impar, deci $t = 2k + 1$; deducem că $a \cdot 10^{n-2} \cdot 25 + \overline{\underbrace{11\ldots 1}_{n-1 \text{ de } 1}0} = 4k(k + 1)$. Nu putem avea $n \geq 4$, pentru că ar rezulta că $\overline{11\ldots 10}$ este multiplu de 4. Dacă $n = 3$, atunci

$$A = \overline{a444} \in \left\{32^2, 38^2, 42^2, 48^2, 52^2, 58^2, 62^2, 68^2, 72^2, 78^2, 82^2, 88^2, 92^2, 98^2\right\}.$$

După calcule, reţinem $A = 38^2 = 1444$. În sfârşit, pentru $n = 2$, avem

$$A = \overline{a44} \in \left\{12^2, 18^2, 22^2, 28^2\right\}$$

şi reţinem $A = 12^2 = 144$.

G98. *Să se determine $m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\dfrac{m}{n} + \dfrac{n+1}{m^2} \in \mathbb{N}^*$.*

Gabriel Dospinescu, student, Paris

Soluţie. Dacă m, n verifică enunţul, atunci există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$m^3 + n^2 + n = pm^2 n. \tag{1}$$

Este evident că n divide m^3, adică există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $m^3 = kn$. Din (1) deducem că $n + 1 + k = p\sqrt[3]{k^2 n^2} \Rightarrow (k + n + 1)^3 = p^3 n^2 k^2$. Este evident că $(n, k) = 1$ şi deoarece $n \cdot k$ este cub perfect rezultă că n şi k sunt cuburi. Fie $u, v \in \mathbb{N}^*$ cu $u^3 = k$, $v^3 = n$. Atunci $m = uv$ şi $u^3 + u^3 + 1 = pu^2 v^2$. Dacă $u = v$, atunci $u = v = 1$, deci $m = n = 1$. Fie acum $u > v$. Este evident că $(u, v) = 1$ şi

$u^2v^2 \le pu^2v^2 = u^3 + v^3 + 1 < 2u^3 + 1$. Deci, $u \ge \dfrac{v^2}{2}$. Pe de altă parte avem u^2 divide $v^3 + 1$ şi atunci $v^3 + 1 \ge u^2 \ge \dfrac{v^4}{4}$. De aici rezultă că $v \le 4$. Dar $v^3 + 1$ se divide cu u^2, deci nu este liber de pătrate. Rezultă că $v = 2$ şi $u = 3$. Datorită simetriei rezultă şi soluţia $v = 3$, $u = 2$. Corespunzător acestor două soluţii obţinem $(m, n) \in \{(1;1), (6;8), (6;27)\}$.

G99. *Fie m, n două numere naturale nenule astfel încât m divide $n - 1$. Toate numerele naturale între 1 şi n se aşează la întâmplare pe un cerc. Se calculează suma oricărui grup de m numere vecine. Să se demonstreze că printre aceste sume există două pentru care diferenţa dintre ele este strict mai mare decât $m - 1$.*

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Deoarece $n - 1$ se divide cu m rezultă că $n = km + 1$. Dacă eliminăm numărul 1, suma numerelor rămase este $\sum_{i=2}^{n} i = \dfrac{(n-1)(n+2)}{2}$. Considerând sumele din cele k grupuri de câte m numere vecine, rezultă că media acestora este $\dfrac{(n+2)km}{2k} = \dfrac{(n+2)m}{2}$ şi deci cel puţin una din sumele calculate, să zicem că aceasta este a, este mai mare sau egală ca media lor, adică $\dfrac{(n+2)m}{2} \le a$. Eliminând acum numărul n obţinem suma numerelor rămase $\sum_{i=1}^{n-1} i = \dfrac{(n-1)n}{2}$. Raţionând ca mai sus rezultă existenţa unei sume, să zicem b, astfel încât $\dfrac{nm}{2} \ge b$. Avem că $a - b \ge \dfrac{(n-2)m}{2} - \dfrac{nm}{2} = m$, deci există două sume (de exemplu a şi b) pentru care diferenţa lor este strict mai mare decât $m - 1$.

G100. *În câte moduri putem colora cu 5 culori un pătrat 3×3, astfel încât în fiecare pătrat 2×2 să existe patru culori diferite?*

Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Pătratul 2×2 din stânga poate fi colorat în $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ moduri; fie A, B, C, D culorile folosite într-un anumit caz, ca în figură.

A	B	
C	D	

Dacă în pătrăţelul $(1, 3)$ (adică linia 1, coloana 3, i.e. pătrăţelul din dreapta sus) folosim culoarea C, în pătrăţelul $(2, 3)$ poate fi folosită una dintre culorile A sau E. Dacă în pătrăţelul $(3, 1)$ folosim culoarea din $(2, 3)$, atunci atât $(3, 2)$ cât şi $(3, 3)$ pot fi colorate în câte două moduri; dacă nu, în $(3, 1)$ putem folosi 2 culori, în $(3, 2)$ culoarea este fixată, iar în $(3, 3)$ putem folosi 2 culori. Obţinem $1 \cdot 2 (1 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 2) = 2^4$ modalităţi de colorare ale conturului exterior.

Dacă în $(1, 3)$ nu folosim culoarea C, putem folosi una dintre culorile A sau E (neavând importanţă, să zicem că aceasta este A).

• dacă în $(2, 3)$ folosim C, în $(3, 1)$ putem utiliza A, B sau E, pentru $(3, 2)$ rămân 2 culori şi la fel pentru $(3, 3)$.

• dacă în $(2, 3)$ nu folosim C, atunci acest pătrăţel va fi colorat cu E. Dacă în $(3, 1)$ utilizăm E, avem câte două modalităţi de colorare pentru $(3, 2)$ şi $(3, 3)$. Dacă în $(3, 1)$ folosim A sau B, culoarea din $(3, 2)$ este fixată, iar pentru $(3, 3)$ avem două posibilităţi.

Obţinem astfel $2(1\cdot 3\cdot 2\cdot 2+1\cdot 1\cdot 2\cdot 2+1\cdot 2\cdot 1\cdot 2)=2^3\cdot 5$ modalităţi de colorare ale conturului exterior.

În concluzie, pătratul 3×3 se poate colora în $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\left(2^4+2^3\cdot 5\right)=2^6\cdot 3\cdot 5\cdot 7=6720$ moduri.

G101. *Să se demonstreze inegalitatea*

$$4\left(\frac{1}{a(1+bc)^2}+\frac{1}{b(1+ca)^2}+\frac{1}{c(1+ab)^2}\right)\leq 1+\frac{16}{(1+bc)(1+ca)(1+ab)},$$

$\forall a,b,c\in(0,\infty)$ *astfel încât* $abc=1$.

Gabriel Mîrşanu şi Andrei Nedelcu, Iaşi

Soluţie. Avem: $\dfrac{1}{a(1+bc)^2}=\dfrac{1}{a\left(1+\frac{1}{a}\right)^2}=\dfrac{a}{(1+a)^2}$ şi analoagele. De asemenea,

$$\frac{1}{(1+bc)(1+ca)(1+ab)}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)}=\frac{1}{(1+a)(1+b)(1+c)}$$

şi atunci inegalitatea enunţului devine

$$4\left(\frac{a}{(1+a)^2}+\frac{b}{(1+b)^2}+\frac{c}{(1+c)^2}\right)\leq 1+\frac{16}{(1+a)(1+b)(1+c)}. \tag{1}$$

Adunând în ambii termeni ai relaţiei (1) pe $4\left(\dfrac{1}{(1+a)^2}+\dfrac{1}{(1+b)^2}+\dfrac{1}{(1+c)^2}\right)$ obţinem inegalitatea echivalentă

$$4\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\right)\leq 1+\frac{16}{(1+a)(1+b)(1+c)}+4\left(\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}\right). \tag{2}$$

Dacă vom considera $x=\dfrac{2}{1+a}$, $y=\dfrac{2}{1+b}$, $z=\dfrac{2}{1+c}$ inegalitatea (2) devine:

$$2(x+y+z)\leq 1+2xyz+x^2+y^2+z^2. \tag{3}$$

Condiţia $abc=1$ devine:

$$\left(\frac{2}{x}-1\right)\left(\frac{2}{y}-1\right)\left(\frac{2}{z}-1\right)=1\Leftrightarrow 8+2(xy+yz+zx)-4(x+y+z)=2xyz. \tag{4}$$

Conform cu (4), inegalitatea (3) devine:

$$2(x+y+z)\leq 1+8+2(xy+yz+zx)-4(x+y+z)+x^2+y^2+z^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x+y+z)^2-6(x+y+z)+9\geq 0\Leftrightarrow(x+y+z-3)^2\geq 0,$$

ceea ce este evident.

G102. *Să se determine valoarea maximă a parametrului* $m\in\mathbb{R}_+^*$ *astfel încât*

$$\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}+\frac{a^2+b^2}{c}\geq m\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)},\quad\forall a,b,c\in\mathbb{R}_+^*.$$

Dorel Băiţan şi I. V. Maftei, Bucureşti

Soluţie. Vom demonstra că $\sum\dfrac{b^2+c^2}{a}\geq 2\sqrt{3}\sqrt{\sum a^2}$, egalitatea fiind atinsă pentru $a=b=c$. Este evident că $\sum\dfrac{b^2+c^2}{a}\geq 2\sum\dfrac{bc}{a}=\dfrac{2}{abc}\sum b^2c^2$. Dacă vom

demonstra că
$\frac{1}{abc}\sum b^2c^2 \geq \sqrt{3}\sqrt{\sum a^2}$, atunci problema este rezolvată. Avem:

$$\sum b^2c^2 \geq \sqrt{3}abc\sqrt{\sum a^2} \Leftrightarrow \left(\sum b^2c^2\right)^2 \geq 3a^2b^2c^2\sum a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum b^4c^4 + 2a^2b^2c^2\sum a^2 \geq 3a^2b^2c^2\sum a^2 \Leftrightarrow \sum b^4c^4 \geq a^2b^2c^2\sum a^2. \quad (1)$$

Dacă în inegalitatea $\sum x^2 \geq \sum xy$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ înlocuim $x = b^2c^2$, $y = c^2a^2$, $z = a^2b^2$, obţinem inegalitatea (1). Răspunsul la cerinţa problemei este deci $m = 2$.

G103. *Pentru $a, b, c \in (0,1)$ cu $a+b+c = 2$, să se arate că*

$$abc \geq 8(1-a)(1-b)(1-c).$$

Alexandru Negrescu, elev, Botoşani

Soluţia 1 (a autorului). Este evident că $a < 1 \Leftrightarrow a+b+c < 1+b+c \Leftrightarrow 2 < 1+b+c \Leftrightarrow 1 < b+c$ şi deci $a < 1 < b+c$, adică $a < b+c$ şi analoagele. Rezultă că a, b, c pot fi lungimile laturilor unui triunghi ABC de semiperimetru $p = 1$. Inegalitatea enunţului este echivalentă cu:

$$abc \geq 8(p-a)(p-b)(p-c) \Leftrightarrow abcp \geq 8p(p-a)(p-b)(p-c) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4RSp \geq 8S^2 \Leftrightarrow Rp \geq 2S \Leftrightarrow Rp \geq 2rp \Leftrightarrow R \geq 2r$$

ceea ce este evident.

Soluţia 2 (Florian Păliţă, elev, Petroşani**).** Cum $1-a > 0$, $1-b > 0$ şi $1-c > 0$, se aplică inegalitatea mediilor $2\sqrt{(1-a)(1-b)} \leq 2-a-b = c$ şi încă două analoage. Prin înmulţire membru cu membru, rezultă concluzia.

Soluţia 3 (Marius Tiba, elev, Iaşi**).** Notând $x = 1-a$, $y = 1-b$, $z = 1-c$ obţinem $x+y+z = 1$. Înlocuind, inegalitatea devine $(1-x)(1-y)(1-z) \geq 8xyz$, apoi

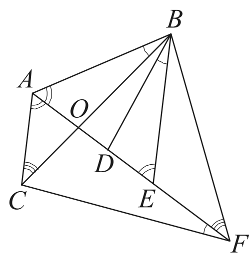
$$1 - xyz + xy + xz + yz - x - y - z \geq 8xyz \Leftrightarrow 1 + xy + xz + yz - 1 \geq 9xyz \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 9 \Leftrightarrow (x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9,$$

inegalitate binecunoscută.

G104. *Triunghiul ABC are $m(\widehat{BAC}) = 120°$. Fie $O \in (BC)$ astfel încât $[AO$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$. Pe $[AO$ se ia punctul D astfel încât $[BC$ este bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{ABD}$. Să se arate că $AD + BD = AB + AC$ şi $AB + AC \geq 4\,AO$.*

Petru Răducanu, Iaşi



Soluţie. Fie $E \in AD$ astfel încât BE este paralelă cu AC. Deoarece $\widehat{EAC} \equiv \widehat{AEB}$ şi $m(\widehat{EAC}) \equiv m(\widehat{EAB}) = 60°$ rezultă că triunghiul ABE este echilateral, adică $AB = BE = AE$.

Prelungim $[AE]$ cu $EF = AC$. Deoarece $(BE) \equiv (AB)$, $(EF) \equiv (AC)$ şi $m(\widehat{BEF}) = m(\widehat{BAC}) = 120°$ rezultă că tringhiurile BEF şi BAC sunt congruente de unde obţinem că $\widehat{BCA} \equiv \widehat{BFE}$ şi $\widehat{EBF} \equiv \widehat{ABC}$, deci $\widehat{CBD} \equiv \widehat{FBE}$ şi

$BF = BC$. Din paralelismul dreptelor AC şi BE rezultă $\widehat{ACB} \equiv \widehat{CBE}$. Prin construcţie $\widehat{CBD} \equiv \widehat{ABC}$ şi atunci $\widehat{CBD} \equiv \widehat{EBF}$, deci $m(\widehat{CBD}) + m(\widehat{DBE}) = m(\widehat{EFB}) + m(\widehat{DBE}) = m(\widehat{BCA}) = m(\widehat{BFE})$. Prin urmare triunghiul BDF este isoscel cu $BD = DF$. Rezultă că $AD + BD = AD + DF = AF = AE + EF = AB + AC$.

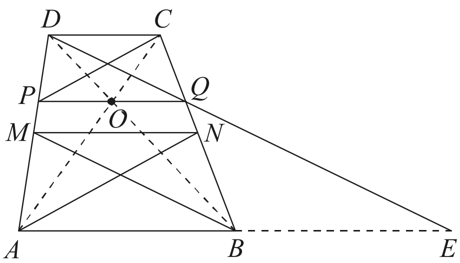
Observăm că $m(\widehat{CBF}) = 60°$ şi din $BF = BC$ rezultă că triunghiul BCF este echilateral şi deci $m(\widehat{BCF}) = 60°$. Triunghiurile AOB şi ACF fiind asemenea rezultă că $\dfrac{AO}{AC} = \dfrac{AB}{AF}$, deci $AO = \dfrac{AB \cdot AC}{AB + AC}$, de unde

$$2 \cdot AO = \frac{2AB \cdot AC}{AB + AC} \leq \frac{AB + AC}{2}, \tag{1}$$

adică $4AO \leq AB + AC$. În (1) avem egalitate între media aritmetică şi media armonică dacă şi numai dacă $AB = AC$.

G105. *Se consideră trapezul $ABCD$ cu bazele AB, CD ($AB > CD$) şi fie O intersecţia diagonalelor trapezului. Se duce linia mijlocie MN a trapezului şi paralela PQ prin O la bazele trapezului ($M, P \in (AB)$, $N, Q \in (BC)$). Să se demonstreze că trapezele $ABMN$ şi $PQCD$ au diagonalele respectiv paralele.*

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi



Soluţia 1 (a autorului). Fie E intersecţia dreptelor DQ şi AB. Din asemănări imediate obţinem că $\dfrac{CD}{BE} = \dfrac{CQ}{QB}$, $\dfrac{CQ}{QB} = \dfrac{DO}{OB}$, $\dfrac{OD}{OB} = \dfrac{CD}{AB}$. Rezultă că $\dfrac{CD}{BE} = \dfrac{CD}{AB}$, de unde deducem că $BE = AB$.

Deoarece M este mijlocul segmentului $[AD]$ iar B este mijlocul segmentului $[AE]$, rezultă că $[MB]$ este linie mijlocie în triunghiul ADE, atunci MB este paralelă cu DQ. Analog demonstrăm că AN este paralelă cu PC.

Soluţia 2 (Marius Tiba, elev, Iaşi**).** Fie $x = AB$, $y = CD$; atunci $PQ = \dfrac{2xy}{x+y}$, $MN = \dfrac{x+y}{2}$, iar $\dfrac{DP}{MA} = \dfrac{2DP}{AD} = \dfrac{2DP}{DP + PA} = \dfrac{2DO}{DO + OB} = \dfrac{2y}{x+y}$. Obţinem că $\dfrac{DP}{MA} = \dfrac{DC}{MN} = \dfrac{CQ}{NB} = \dfrac{PQ}{AB} \left(= \dfrac{2y}{x+y} \right)$ şi, cum congruenţa unghiurilor este imediată, patrulaterele $DCQP$ şi $MNBA$ vor fi asemenea. Urmează că $\widehat{PDQ} \equiv \widehat{AMB}$ şi $\widehat{PCQ} \equiv \widehat{ANB}$, deci $DQ \parallel MB$ şi $PC \parallel AN$.

B. Nivel liceal

L96. *Fie cercurile $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}$ astfel încât $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt tangente exterior în D şi fiecare dintre ele este tangent interior lui $\mathcal{C}$ în B, respectiv C. Tangenta comună interioară cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ taie cercul $\mathcal{C}$ în A şi A_1. Dreapta AB taie cercul $\mathcal{C}_1$ în K, iar dreapta AC taie cercul $\mathcal{C}_2$ în L. Din punctul M de pe cercul $\mathcal{C}$ se duc tangentele MT_1 şi MT_2 la cercurile $\mathcal{C}_1$, respectiv $\mathcal{C}_2$ ($T_1 \in \mathcal{C}_1$, $T_2 \in \mathcal{C}_2$). Dacă*

$M \in \overset{\frown}{BAC}$, *arătaţi că* $MT_1 + MT_2 = \dfrac{A_1M}{A_1D} \cdot KL$ *şi* $|MT_1 - MT_2| = \dfrac{AM}{AD} \cdot KL$.

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

Soluţie. Domnul **Titu Zvonaru**, Comăneşti, remarcă faptul că această problemă este îndeaproape înrudită cu problema **L76**, publicată de acelaşi autor în *Rec-Mat 1/2005.* Considerăm totuşi utilă elevilor includerea unei soluţii detaliate.

În rezolvarea acestei probleme vom folosi *teorema lui Casey*, pe care o prezentăm în continuare (fără demonstraţie).

Teorema lui Casey. *Dacă cercurile* $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$ *sunt tangente (toate interior sau toate exterior) la cercul* $\mathcal{C}$, *ordinea punctelor de tangenţă fiind dată de numerotarea acestor cercuri, atunci are loc relaţia*

$$d_{12} \cdot d_{34} + d_{23} \cdot d_{41} = d_{13} \cdot d_{24},$$

unde d_{ij} *este lungimea tangentei comune exterioare a cercurilor* $\mathcal{C}_i$ *şi* $\mathcal{C}_j$ *(*d_{ij} *se numeşte* distanţa tangenţială *a celor două cercuri). Rezultatul rămâne valabil şi dacă cercurile* $\mathcal{C}_i$ *(toate sau o parte dintre ele) degenerează în puncte sau dacă cercul* $\mathcal{C}$ *devine o dreaptă.*

Să revenim acum la problema considerată.

Fie $\{E\} = BC \cap \mathcal{C}_1$, $\{F\} = BC \cap \mathcal{C}_2$, d tangenta comună a cercurilor $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$ şi $T \in d$ astfel încât $m(\widehat{TBC}) = m(\overset{\frown}{BA_1C})/2$. Deoarece $m(\widehat{EKB}) = m(\widehat{EBT}) = m(\widehat{CBT}) = m(\widehat{BAC})$, rezultă că $AC \parallel KE$. Analog, obţinem $AB \parallel LF$.

Cum AD este axa radicală a cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$, rezultă că $AK \cdot AB = AL \cdot AC$, ceea ce înseamnă că patrulaterul $BCLK$ este inscriptibil, deci $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ALK}$. De aici, ţinând seama de relaţiile $\widehat{ALK} \equiv \widehat{LKE}$ (pentru că $AC \parallel KE$) şi $\widehat{ABC} \equiv \widehat{KBE}$, rezultă că $\widehat{LKE} \equiv \widehat{KBE}$, deci LK este tangentă cercului $\mathcal{C}_1$. Analog demonstrăm că LK este tangentă şi cercului $\mathcal{C}_2$.

Aplicăm teorema lui Casey pentru cercurile M, $\mathcal{C}_1(O_1)$, A_1, $\mathcal{C}_2(O_2)$ (M şi A_1 degenerate) tangente interior cercului $\mathcal{C}$ şi obţinem

$$d_{MO_1} \cdot d_{O_2A_1} + d_{MO_2} \cdot d_{A_1O_1} = d_{MA_1} \cdot d_{O_1O_2} \Leftrightarrow$$

$$MT_1 \cdot A_1D + MT_2 \cdot A_1D = A_1M \cdot KL \Leftrightarrow MT_1 + MT_2 = \frac{A_1M}{A_1D} KL.$$

Pentru a demonstra a doua relaţie, aplică teorema lui Casey cercurilor M, A, $\mathcal{C}_2(O_2)$ şi $\mathcal{C}_1(O_1)$:

$$d_{MA} \cdot d_{O_1O_2} + d_{MO_1} \cdot d_{AO_2} = d_{MO_2} \cdot d_{AO_1} \Leftrightarrow MA \cdot KL + MT_1 \cdot AD = MT_2 \cdot AD,$$

de unde concluzia.

L97. *Să se demonstreze că în orice triunghi are loc inegalitatea*

$$\frac{1}{m_a^2(m_b + m_c - m_a)} + \frac{1}{m_b^2(m_c + m_a - m_b)^2} + \frac{1}{m_c^2(m_a + m_b - m_c)^2} \geq \frac{1}{S^2}.$$

I. V. Maftei şi Dorel Băiţan, Bucureşti

Notă. Concomitent cu publicarea în revista noastră, problema a apărut cu numărul 25449 în G.M. nr. 12/2005. Soluţia sa poate fi găsită în G.M. 6/2006. În fapt, inegalitatea se reduce la $\sum \dfrac{S^2}{a^2(p-a)^2} \geq \dfrac{9}{4}$.

Vlad Emanuel, elev, Sibiu, notează $x = p - a$, $y = p - b$, $z = p - c$, iar inegalitatea precedentă (demonstrată trigonometric de către autorii problemei) revine la $\sum \frac{(x+y+z)\,xyz}{x^2\,(y+z)^2} \geq \frac{9}{4}$. Dacă $m = xy$, $n = xz$, $p = yz$, avem de arătat că $\sum \frac{mn+mp+np}{(m+n)^2} \geq \frac{9}{4}$, $m, n, p > 0$, care este chiar inegalitatea **114** din excelenta *Old and New Inequalities*, autori T. Andreescu, G. Dospinescu, V. Cîrtoaje, M. Lascu, apărută în 2004 la Editura GIL.

L98. *Se consideră un triunghi oarecare ABC. Demonstraţi că*

1) $\sin^4 A + \sin^4 B + \sin^4 C \geq \frac{27}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^3$;

2) $\cos^4 A + \cos^4 B + \cos^4 C \geq \frac{3}{8}\left(\frac{r}{R}\right)^4\left(5 - \frac{r_a}{r}\right)\left(5 - \frac{r_b}{r}\right)\left(5 - \frac{r_c}{r}\right)$,

unde R este raza cercului circumscris, r este raza cercului înscris, iar r_a, r_b, r_c sunt razele cercurilor exînscrise.

Oleg Faynshteyn, Leipzig, Germania

Soluţie. 1) Având în vedere inegalitatea $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ $(x, y, z \in \mathbb{R})$ şi relaţiile $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{z}{\sin C} = 2R$, $R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{S}{p}$ şi $p \geq 3\sqrt{3}r$, deducem că

$$\sin^4 A + \sin^4 B + \sin^4 C \geq (\sin A \sin B)^2 + (\sin B \sin C)^2 + (\sin C \sin A)^2 \geq$$
$$\geq \sin A \sin B \sin C\,(\sin A + \sin B + \sin C) = \frac{abc}{8R^3} \cdot \frac{a+b+c}{2R} =$$
$$= \frac{S}{2R^2} \cdot \frac{p}{R} = \frac{rp^2}{2R^3} \geq \frac{r}{2R^3}\left(3\sqrt{3}r\right)^2 = \frac{27}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^3.$$

2) Utilizând iarăşi inegalitatea $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$, obţinem

$$\cos^4 A + \cos^4 B + \cos^4 C \geq \cos A \cos B \cos C\,(\cos A + \cos B + \cos C)\,. \qquad (1)$$

Vom exprima acum termenul din dreapta al inegalităţii (1) în funcţie de R, r, r_a, r_b, r_c. În acest scop utilizăm faptul că în orice triunghi are loc relaţia $\cos A + \cos B + \cos C = \frac{R+r}{R}$, precum şi $\cos A = \frac{2R + r - r_a}{2R}$, $\cos B = \frac{2R + r - r_b}{2R}$, $\cos C = \frac{2R + r - r_c}{2R}$ (într-adevăr, $\cos A = \frac{2R + r - r_a}{2R} \Leftrightarrow 1 - \cos A = \frac{r_a - r}{2R} \Leftrightarrow 2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1}{2R}\left(\frac{S}{p-a} - \frac{S}{p}\right) \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{(p-b)(p-c)}{bc} = \frac{aS}{2Rp\,(p-a)} \Leftrightarrow p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c) = \frac{abc}{4R} \cdot S \Leftrightarrow S^2 = S \cdot S$).

Ţinând seama de acestea şi de inegalitatea $R \geq 2r$, rezultă că:

$$\cos^4 A + \cos^4 B + \cos^4 C \geq \frac{R+r}{R} \cdot \frac{2R + r - r_a}{2R} \cdot \frac{2R + r - r_b}{2R} \cdot \frac{2R + r - r_c}{2R} \geq$$
$$\geq \frac{3r}{R} \cdot \frac{5r - r_a}{2R} \cdot \frac{5r - r_b}{2R} \cdot \frac{5r - r_c}{2R} = \frac{3}{8}\left(\frac{r}{R}\right)^4\left(5 - \frac{r_a}{r}\right)\left(5 - \frac{r_b}{r}\right)\left(5 - \frac{r_c}{r}\right),$$

adică tocmai ceea ce trebuia demonstrat.

Notă. Am primit de la **Neculai Roman**, Mirceşti (Iaşi), o interesantă rafinare a inegalităţii de la b), anume

$$\cos^4 A+\cos^4 B+\cos^4 C\geq \frac{3}{16}\geq \frac{3}{8}\left(\frac{r}{R}\right)^4\left(5-\frac{r_a}{r}\right)\left(5-\frac{r_b}{r}\right)\left(5-\frac{r_c}{r}\right).$$

Pentru demonstraţia primei părţi, folosim cunoscuta $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\leq \frac{9}{4}$ şi inegalitatea CBS; obţinem

$$\cos^4 A+\cos^4 B+\cos^4 C\geq \frac{1}{3}\left(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\right)^2=$$

$$=\frac{1}{3}\left[3-\left(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\right)\right]^2\geq \frac{1}{3}\left(3-\frac{9}{4}\right)^2=\frac{3}{16}.$$

Pentru partea a doua, folosim $r_a+r_b+r_c=4R+r$; $r_ar_b+r_ar_c+r_br_c=p^2$; $r_ar_br_c=p^2r$; $a^2+b^2+c^2=2p^2-2r^2-8Rr$. Avem că $a^2+b^2+c^2\leq 9R^2$, de unde $2p^2\leq 2r^2+8Rr+9R^2$, apoi

$$\frac{3}{8}\left(\frac{r}{R}\right)^4\left(5-\frac{r_a}{r}\right)\left(5-\frac{r_b}{r}\right)\left(5-\frac{r_c}{r}\right)=\frac{3}{8}\left(\frac{r}{R}\right)^4[5^3-\frac{r_a+r_b+r_c}{r}\cdot 5^2+$$

$$+\frac{r_ar_b+r_ar_c+r_br_c}{r^2}\cdot 5-\frac{r_ar_br_c}{r^3}]=\frac{3}{8}\left(\frac{r}{R}\right)^4\left(100-100\frac{R}{r}+4\frac{p^2}{r^2}\right)\leq$$

$$\leq \frac{3}{8}\left(\frac{r}{R}\right)^4\left[100-100\frac{R}{r}+\frac{2}{r^2}\left(2r^2+8Rr+9R^2\right)\right]=39\left(\frac{r}{R}\right)^4-\frac{63}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^3+\frac{27}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^2.$$

Dacă $x=\frac{r}{R}\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$, funcţia $f(x)=39x^4-\frac{63}{2}x^3+\frac{27}{4}x^2$ are un maxim egal cu $\frac{3}{16}$, adică pentru $x=\frac{1}{2}$, de unde concluzia anunţată.

L99. *a) Care este numărul minim de puncte din plan de coordonate întregi astfel încât, oricum ar fi alese, să existe trei puncte cu centrul de greutate de coordonate întregi.*

b) Să se arate că într-un spaţiu n-dimensional există 2^{n+1} puncte de coordonate întregi astfel încât oricare trei dintre acestea au centrul de greutate cu cel puţin o coodonată care nu este un întreg.

Irina Mustaţă, studentă, Bremen, Germania

Soluţie (Eugenia Roşu, elevă, şi **Adrian Zanoschi**, profesor, Iaşi**).** a) Centrul de greutate al triunghiului cu vârfurile în (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) are coordonatele $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$; aceste coordonate sunt întregi dacă şi numai dacă $x_1+x_2+x_3$ şi $y_1+y_2+y_3$ sunt multipli de 3. Pentru a simplifica rezolvarea, considerăm, mai departe, în locul coordonatelor punctelor, resturile acestora modulo 3.

Pentru 8 numere, rezultatul nu este valabil. Într-adevăr dacă alegem sistemul

x	1	1	1	1	0	0	0	0
y	0	0	1	1	0	0	1	1

observăm că suma $x_1+x_2+x_3$ este multiplu de 3 dacă şi numai dacă cele trei abscise sunt egale. Dar, în acest caz, cea de-a doua sumă $y_1+y_2+y_3$ este 1 sau 2, ceea ce înseamnă că, pentru orice trei dintre aceste puncte, centrul de greutate nu are ambele coordonate întregi.

Să analizăm, în continuare, cazul a 9 numere. Reamintim că două coordonate congruente modulo 3 sunt considerate egale.

Dacă există 5 punte care au una dintre coordonate identică, atunci pentru cea de-a doua coordonată avem unul din următoarele cazuri: apar toate cele trei resturi posibile la împărţirea cu 3 sau, conform principiului cutiei, unul dintre resturi apare de trei ori. În ambele situaţii putem găsi trei coordonate cu suma multiplu de 3, deci există trei puncte cu centrul de greutate de coordonate întregi.

Presupumen acum că nu este îndeplinită condiţia precedentă. Atunci, înseamnă că fiecare din numerele 0, 1, 2 apare cel puţin o dată şi cel mult de patru ori atât printre abscise cât şi printre ordonate. Dacă două dintre aceste numere ar apărea de cel mult două ori, atunci cel puţin cinci coordonate ar fi egale cu al treilea număr, ceea ce contrazice presupunerea făcută. Deci, două dintre numerele 0, 1, 2 apar de cel puţin 3 ori la o coordonată. Notăm aceste numere cu m şi n.

Considerăm, pentru fiecare dintre cele două grupuri cu prima coordonată m, respectiv n, că cea de-a doua coordonată ia cel puţin două valori distincte (astfel există trei puncte identice şi centrul lor de greutate are coordonatele întregi). Dacă avem toate cele trei valori (0, 1, 2) la ordonate, atunci suma lor este 3 şi centrul de greutate respectiv are coordonatele întregi. Cazul cel mai nefavorabil ar fi, aşadar, cel în care în ambele grupuri, ordonatele iau două valori a şi b pentru primul grup şi c şi d pentru celălalt grup ($a \neq b$, $c \neq d$).

Întrucât $a, b, c, d \in \{0, 1, 2\}$, conform principiului cutiei, rezultă că există două numere egale. Cum $a \neq b$ şi $c \neq d$, înseamnă că unul dintre numerele a, b este egal cu c sau d. Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $a = c$.

Să arătăm că sumele $a + c$, $a + d$, $b + c$, $b + d$ iau cele trei valori posibile 0, 1, 2. Avem relaţiile $a \neq b \Rightarrow a + c \neq b + c$, $c \neq d \Rightarrow b + c \neq b + d$, $b \neq a \Rightarrow b + d \neq a + d$. Astfel, dacă cele patru sume ar lua doar două valori din cele trei, atunci $a+c = b+d$ şi $b + c = a + d$, ceea ce implică $c = d$. Contradicţia la care am ajuns dovedeşte că fiecare dintre numerele 0, 1, 2 se află printre cele patru sume.

Acum, să revenim la cel de-al treilea grup - al punctelor care au ca primă coordonată un număr diferit de m şi n (există cel puţin un punct de acest fel). Ordonata unui astfel de punct adunată cu una din sumele $a + c$, $a + d$, $b + c$, $b + d$ va da un multiplu de 3, pentru că printre aceste sume se află toate numerele 0, 1, 2.

Evident, punctele din primele două grupuri cu ordonatele din suma găsită mai sus şi cu punctul ales din grupa a treia formează un triplet a cărui centru de greutate are coordonate întregi. Cu aceasta, demonstraţia este încheiată.

b) Vom demonstra propoziţia prin inducţie după n. În cazul $n = 2$, am găsit la punctul *a)* un exemplu de 2^3 puncte care satisfac condiţia din enunţ.

Presupunem propoziţia adevărată pentru un număr natural $n \geq 2$. Să arătăm că propoziţia este adevărată pentru $n + 1$. Conform ipotezei de inducţie, există 2^{n+1} puncte în spaţiul n - dimensional astfel încât centrul de greutate al oricăror trei dintre ele să nu aibă toate coordonatele întregi. Celor 2^{n+1} puncte de mai sus le mai adăugăm la sfârşit încă o coordonată egală cu 0 şi apoi, din nou tuturor punctelor, încă o coordonată egală cu 1. Astfel obţinem 2^{n+2} puncte din spaţiul $n+1$ dimensional (jumătate dintre ele se termină cu 0, iar cealaltă jumătate se termină cu 1). Se observă uşor că, oricum am alege trei dintre aceste 2^{n+2} puncte, centrul lor de greutate nu are toate coordonatele întregi.

Notă. Soluţie corectă s-a primit de la **Vlad Emanuel**, elev, Sibiu.

L100. *Fie* $x \in (0,1)$*; arătaţi că există* $n \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât* $\{nx\} \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Ciprian Baghiu şi Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţia 1(a autorilor). Dacă $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$, cum $\frac{2}{3x} - \frac{1}{3x} = \frac{1}{3x} > 1$, există $n \in \mathbb{N}^*$ cu $n \in \left(\frac{1}{3x}, \frac{2}{3x}\right)$, deci $nx \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, adică $\{nx\} \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Pentru $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ putem alege $n = 1$, iar pentru $x = \frac{2}{3}$ luăm $n = 2$.

Rămâne de analizat situaţia $x \in \left(\frac{2}{3}, 1\right)$. Cum $\left(\frac{2}{3}, 1\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right) \cup \left[\frac{3}{4}, \frac{4}{5}\right) \cup \cdots \cup \left[\frac{k}{k+1}, \frac{k+1}{k+2}\right) \cup \ldots$, există $k \geq 2$ astfel încât $x \in \left[\frac{k}{k+1}, \frac{k+1}{k+2}\right)$. Când $k = 3p$, $p \in \mathbb{N}^*$, obţinem că $x \in \left[\frac{3p}{3p+1}, \frac{3p+1}{3p+2}\right)$, deci $(p+1)\,x \in \left[p + \frac{2p}{3p+1}, p + \frac{2p+1}{3p+2}\right)$, adică $\{(p+1)\,x\} \in \left[\frac{2p}{3p+1}, \frac{2p+1}{3p+2}\right) \subset \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Când $k = 3p+1$, $p \in \mathbb{N}^*$, vom avea că $(p+1)\,x \in \left[p + \frac{2p+1}{3p+2}, p + \frac{2}{3}\right)$, deci $\{(p+1)\,x\} \in \left[\frac{2p+1}{3p+2}, \frac{2}{3}\right) \subset \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. În sfârşit, dacă $k = 3p+2$, $p \in \mathbb{N}$, atunci $(p+2)\,x \in \left[p + 1 + \frac{2p+1}{3p+3}, p + 1 + \frac{2p+2}{3p+4}\right)$, deci $\{(p+2)\,x\} \in \left[\frac{2p+1}{3p+3}, \frac{2p+2}{3p+4}\right) \subset \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Soluţia 2 (Vlad Emanuel, elev, Sibiu**).** Dacă $x \in \mathbb{R}^* \backslash \mathbb{Q}$, mulţimea $\{\{nx\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ este densă în $[0,1]$ (Lema lui Kronecker) şi atunci concluzia este imediată. Dacă $x \in \mathbb{Q}^*$, fie $x = \frac{p}{q}$, cu $p, q \in \mathbb{N}^*$, $(p,q) = 1$; observăm că ip, $i = \overline{1,q}$, parcurge toate resturile modulo q. Notăm $r_i = ip \pmod q$; atunci $\left\{\frac{ip}{q}\right\} = \frac{r_i}{q}$, deci expresia $\left\{\frac{ip}{q}\right\}$, $i = \overline{1,q}$, va lua toate valorile din mulţimea $\left\{0, \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \ldots, \frac{q-q}{q}\right\}$. Pentru a rezolva problema, ar fi suficient să găsim $m \in \{1, 2, \ldots, q-1\}$ astfel încât $\frac{1}{3} \leq \frac{m}{q} < \frac{2}{3}$, adică $\frac{q}{3} \leq m < \frac{2q}{3}$. Cum $x \in (0,1)$, atunci $q \geq 2$. Pentru $q \in \{2, 3\}$, luăm $m = 1$. Pentru $q \geq 4$, $\frac{2q}{3} - \frac{q}{3} > 1$ şi astfel există cel puţin un întreg în $\left[\frac{q}{3}, \frac{2q}{3}\right]$. Acel întreg nu este chiar $\frac{2q}{3}$; dacă $q \in \{4, 5\}$, atunci $\frac{2q}{3} \notin \mathbb{N}$, iar dacă $q \geq 6$, există cel puţin doi întregi în intervalul respectiv.

L101. *Fie* $a, n \geq 2$ *două numere întregi. Să se arate că* $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a^n - a^k}{n-k} \in \mathbb{Z}$.

Adrian Zahariuc, elev, Bacău

Soluţie. Să facem mai întâi câteva notaţii. Fie $A = \prod_{k=0}^{n-1} \left(a^n - a^k\right)$ şi $E = \prod_{k=1}^{n} \left(a^k - 1\right)$. În acest caz, avem $A = a \cdot a^2 \cdot \ldots \cdot a^{n-1} \cdot E$. Dacă p este un divizor prim al numărului $m \in \mathbb{N}^*$, atunci notăm cu $\exp_p m$ exponentul lui p din descompunerea în factori primi a lui m.

Pentru a demonstra că $\frac{A}{n!} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a^n - a^k}{n-k} \in \mathbb{Z}$ este suficient să arătăm că, pentru orice număr prim p, $p \leq n$, are loc inegalitatea

$$\exp_p n! \leq \exp_p A. \tag{1}$$

Se verifică uşor că

$$\exp_p n! = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right], \text{ oricare ar fi numărul prim } p. \tag{2}$$

Fie p un număr prim mai mic sau egal ca n.

I. Dacă $p \mid a$, atunci $p^2 \mid a^2$, $p^3 \mid a^3$, $p^n \mid a^n$ şi $p^{\frac{n(n-1)}{2}} \mid a \cdot a^2 \cdot \ldots \cdot a^{n-1} E = A$. Notând cu l cel mai mare număr natural cu proprietatea $p^2 \leq n$, avem

$$\exp_p n! \leq \sum_{k=1}^{l} \frac{n}{p^l} = \frac{n}{p-1}\left(1 - \frac{1}{p^l}\right) \leq \frac{n\,(n-1)}{2} \leq \exp_p A,$$

deci, relaţia (1) este adevărată.

II. Presupunem, în continuare, că $(a,p) = 1$. Deoarece $a^{\varphi\left(p^k\right)} \equiv 1 \left(\operatorname{mod} p^k\right)$ (teorema lui Euler) şi $\varphi\left(p^k\right) = p^k - p^{k-1}$, rezultă că $p^k \mid a^{p^k - p^{k-1}} - 1$, deci $p^k \mid a^{m\left(p^k - p^{k-1}\right)} - 1$, oricare ar fi $m \in \mathbb{N}^*$.

Să demonstrăm că are loc inegalitatea

$$\exp_p E \geq \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^k - p^{k-1}}\right]. \tag{3}$$

Pentru fiecare $k \in \mathbb{N}^*$, considerăm mulţimile $A_k = \left\{m\left(p^k - p^{k-1}\right) \mid m \in \mathbb{N}^*\right\}$ şi $B_k = A_k \cap \{1, 2, \ldots, n\}$. Se observă că $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots \supseteq B_k \supseteq \cdots$ şi $|B_k| = \left[\frac{n}{p^k - p^{k-1}}\right]$. După cum am văzut, $p^k \mid a^{m\left(p^k - p^{k-1}\right)} - 1$, deci fiecare element al lui B_k contribuie cu cel puţin k la $\exp_p E$. Fie $C_k = B_k - B_{k+1}$ Întrucât mulţimile C_k sunt disjuncte două câte două, putem scrie:

$$\exp_p E \geq \sum_{k=1}^{\infty} k\,|C_k| = \sum_{k=1}^{\infty} k\left(|B_k| - |B_{k+1}|\right) = \sum_{k=1}^{\infty} |B_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{n}{p^k - p^{k-1}}\right|,$$

ceea ce înseamnă că inegalitatea (3) este adevărată.

În sfârşit, din relaţiile (2) şi (3), rezultă că

$$\exp_p n! = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right] \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^k - p^{k-1}}\right] \leq \exp_p E \leq \exp_p A,$$

deci inegalitatea (1) este adevărată.

Notă. Aceeaşi soluţie a dat **Vlad Emanuel**, elev, Sibiu.

L102. *Fie* $p = 2k + 1$ *un număr prim. Atunci*

$$S_1 = \sum_{i=k+1}^{2k} C_{p+i-1}^{i} \equiv 2^p - 2 \left(\operatorname{mod} p^2\right), \quad S_2 = \sum_{i=1}^{k} C_{p+i-1}^{i} \equiv 2 - 2^p \left(\operatorname{mod} p^2\right).$$

Marius Pachiţariu, elev, Iaşi

Soluţie. Considerăm inelul $\left(\mathbb{Z}_{p^2}, +, \cdot\right)$. Dacă $i \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, atunci $\hat{\imath}$ este un element inversabil al inelului. Notăm cu $\frac{p}{i}$ reprezentantul canonic al clasei $\hat{p} \cdot \hat{\imath}^{-1}$. Cu acest sens dat scrierii $\frac{p}{i}$, avem $\frac{p}{i} \in \mathbb{N}$. Astfel, putem scrie

$$C_p^i = \frac{p\,(p-1)\ldots(p-i+1)}{i!} = \frac{\mathcal{M}_{p^2} + (-1)^{i-1}\, p\,(i-1)!}{i!} =$$

$$\frac{\mathcal{M}_{p^2}}{i!} + (-1)^{i-1}\,\frac{p}{i} \equiv (-1)^{i-1} \cdot \frac{p}{i} \left(\operatorname{mod} p^2\right),$$

unde $i \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$. Analog, obţinem relaţia $C_{p+i-1}^{i} \equiv \frac{p}{i} \left(\operatorname{mod} p^2\right)$, pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, 2k\}$. Avem

$$\sum_{i=1}^{p-1} C_p^i \equiv p\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{p-1}\right) \equiv$$

$$\equiv p\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1} - \frac{2}{2} - \frac{2}{4} - \cdots - \frac{2}{p-1}\right) \equiv$$

$$\equiv p\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k}\right) \equiv \sum_{i=k+1}^{2k} C_{p+i-1}^{i} \left(\operatorname{mod} p^2\right).$$

Deoarece $\sum\limits_{i=1}^{p-1} C_p^i = 2^p - 2$, rezultă că $\sum\limits_{i=k+1}^{2k} C_{p+i-1}^{i} \equiv 2^p - 2 \left(\operatorname{mod} p^2\right)$.

Pentru a demonstra a doua cerinţă, observăm că $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1} \equiv 0 \,(\operatorname{mod} p)$, întrucât termenii sumei dau resturi distincte la împărţirea cu p şi suma acestor resturi este $1 + 2 + \cdots + (p-1) = \frac{p\,(p-1)}{2} \equiv 0 \,(\operatorname{mod} p)$. Prin urmare

$$\sum_{i=1}^{p-1} C_p^i = 2^p - 2 \equiv p\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1} - \frac{2}{2} - \frac{2}{4} - \cdots - \frac{2}{p-1}\right) \equiv$$

$$\equiv p\left(-1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{k}\right) = -\sum_{i=1}^{k} C_{p+i-1}^{i} \left(\operatorname{mod} p^2\right),$$

ceea ce înseamnă că $S_2 \equiv 2 - 2^p \left(\operatorname{mod} p^2\right)$.

Notă. Soluţie asemănătoare a dat **Vlad Emanuel**, elev, Sibiu.

L103. *Fie* a, b, c, d *reale astfel încât* $\left(1 + a^2\right)\left(1 + b^2\right)\left(1 + c^2\right)\left(1 + d^2\right) = 16$. *Arătaţi că*

$$-3 \leq ab + bc + cd + da + ac + bd - abcd \leq 5.$$

Mai mult, avem egalitate în cel puţin una din inegalităţile de mai sus dacă şi numai dacă $a+b+c+d = abc+bcd+cda+dab$.

Gabriel Dospinescu, student, Paris

Soluţie. Egalitatea din ipoteză este echivalentă cu

$$\prod (i+a)\cdot \prod (i-a) = 16 \Leftrightarrow$$

$$\left(1 - i\sum a - \sum ab + i\sum abc + abcd\right)\left(1 + i\sum a - \sum ab - i\sum abc + abcd\right) = 16.$$

Deoarece ultima egalitate se poate scrie în forma

$$\left(1 - \sum ab + abcd\right)^2 + \left(\sum a - \sum abc\right)^2 = 16, \qquad (*)$$

rezultă că $|1 - \sum ab + abcd| \le 4$, de unde obţinem $-3 \le ab+bc+cd+da+ac+bd+abcd \le 5$. Se observă că, în relaţia precedentă, putem avea o egalitate dacă şi numai dacă $|1-\sum ab + abcd| = 4$, ceea ce, în virtutea identităţii $(*)$, este echivalent cu $\sum a = \sum abc$.

Notă. Vlad Emanuel, elev, Sibiu, remarcă faptul că problema apare şi în *Old and New Inequalities* (citată la soluţia problemei **L97**), semnată de acelaşi autor.

L104. *Fie* $x_0 > 0$ *şi* $x_n = x_{\left[\frac{n}{2}\right]} + x_{\left[\frac{n}{3}\right]} + \frac{n}{6}$, *pentru orice* $n > 0$.

a) Să se arate că şirul $\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n\ge 1}$ *este convergent la* 1.

b) Să se arate că dacă $\alpha > \log_3 \frac{5}{2}$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - n}{n^\alpha} = 0$.

Gabriel Dospinescu, student, Paris

Soluţie. *a)* Fie $M = \max\left\{1, x_1, \frac{x_2}{2}\right\}$. Vom demonstra prin inducţie că $x_n < nM$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Datorită modului în care a fost ales numărul M, rezultă că propoziţia este adevărată pentru $n=1$ şi $n=2$. Dacă inegalitatea este adevărată pentru orice $k \le n-1\,(n\ge 3)$, atunci din $x_{\left[\frac{n}{2}\right]} \le \left[\frac{n}{2}\right] M$ şi $x_{\left[\frac{n}{3}\right]} \le \left[\frac{n}{3}\right] M$, obţinem $x_n \le \left[\frac{n}{2}\right] M + \left[\frac{n}{3}\right] M + \frac{n}{6} \le \left(\frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{6}\right) M = nM$. Drept urmare, avem $x_n < nM$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, ceea ce înseamnă că şirul $\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n\ge1}$ este mărginit. Egalitatea din enunţ poate fi scrisă în forma

$$\frac{x}{n} = \frac{x_{\left[\frac{n}{2}\right]}}{\left[\frac{n}{2}\right]}\cdot\frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{n} + \frac{x_{\left[\frac{n}{3}\right]}}{\left[\frac{n}{3}\right]}\cdot\frac{\left[\frac{n}{3}\right]}{n} + \frac{1}{6}.$$

De aici, ţinând seama de relaţiile $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{n} = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{n}{3}\right]}{n} = \frac{1}{3}$ şi $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(a_n+b_n) \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,a_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,b_n$, deducem că

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_n}{n} \le \frac{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{x_n}{n}}{2} + \frac{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{x_n}{n}}{3} + \frac{1}{6},$$

de unde obţinem $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{x_n}{n} \le 1$. Analog, demonstrăm că $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n \ge 1$. Din relaţiile $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{x_n}{n} \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{x_n}{n}$ şi $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{x_n}{n} \le 1 \le \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{x_n}{n}$ rezultă că cele două limite extreme sunt egale cu 1, deci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = 1$.

b) Considerăm, din nou, $M = \max\left\{1, x_1, \frac{x_2}{2}\right\}$ şi $a_k = 1 + (M-1)\left(\frac{5}{6}\right)^k$, $k \geq 0$. Să demonstrăm, prin inducţie după k, inegalitatea $x_n \leq na_k$, oricare ar fi $n \geq 2 \cdot 3^k$. Pentru $k = 0$, am dovedit că propoziţia este adevărată la punctul *a*). Presupunem că relaţia este adevărată pentru k. Fie $n > 2 \cdot 3^{k+1}$. Atunci, $\left[\frac{n}{2}\right] \geq 2 \cdot 3^k$ şi $\left[\frac{n}{3}\right] \geq 2 \cdot 3^k$. Conform ipotezei de inducţie, rezultă că

$$x_n \leq \left[\frac{n}{2}\right] a_k + \left[\frac{n}{3}\right] a_k + \frac{n}{6} \leq n \cdot \frac{5a_k + 1}{6} = na_{k+1},$$

ceea ce încheie inducţia.

Fie $n > 1$ şi $k = \left[\log_3 \frac{n}{2}\right]$. Cum

$$\frac{x_n}{n} \leq 1 + (M-1)\left(\frac{5}{6}\right)^k \leq 1 + (M-1) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{\log_3 \frac{n}{2} - 1} =$$

$$= 1 + \frac{6(M-1)}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{\log_3 \frac{n}{2}} = 1 + \frac{6(M-1)}{5}\left(\frac{n}{2}\right)^{\log_3 \frac{5}{6}},$$

înseamnă că există o constantă $a \geq 0$ astfel încât

$$\frac{x_n}{n} \leq 1 + an^{\log_3 \frac{5}{6}}, \text{ oricare ar fi } n > 1. \tag{1}$$

Considerăm şirurile $c_k = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{k+1}$ şi $d_k = 2^{k+1} - 2$. Vom arăta, prin inducţie, că $x_n > nc_k - d_k$, oricare ar fi $n \geq 2 \cdot 3^k$. Pentru $k = 0$, inegalitatea devine $x_n > \frac{n}{6}$, $n \geq 2$, care este adevărată. Presupunem propoziţia adevărată pentru k. Alegem un număr $n \geq 2 \cdot 3^{k+1}$ şi atunci, conform ipotezei de inducţie, avem

$$x_n > \left[\frac{n}{2}\right] c_k - d_k + \left[\frac{n}{3}\right] c_k - d_k + \frac{n}{6} > \left(\frac{5n}{6} - 2\right) c_k - 2d_k + \frac{n}{6} =$$

$$= \frac{5c_k + 1}{6} n - 2c_k - 2d_k > c_{k+1} \cdot n - 2 - 2d_k = c_{k+1} n - d_{k+1}.$$

Cu aceasta, demonstraţia prin inducţie s-a terminat.

Acum, luăm din nou $k = \left[\log_3 \frac{n}{2}\right]$. Deoarece

$$\frac{x_n}{n} > c_k - \frac{d_k}{n} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{k+1} - \frac{2 \cdot 2^k}{n} + \frac{2}{n} > 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{\log_3 \frac{n}{2}} - \frac{2 \cdot 2^{\log_3 \frac{n}{2}}}{n},$$

rezultă că

$$\left(\frac{x_n}{n} - 1\right) n^{\log_3 \frac{6}{5}} > \left(-\frac{1}{2}\right)^{\log_3 \frac{5}{6}} - \frac{2}{n}\left(\frac{n}{2}\right)^{\log_3 2} n^{\log_3 \frac{6}{5}} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{\log_3 \frac{5}{6}} - 2^{1 - \log_3 2} \cdot n^{\log_3 \frac{12}{15}}.$$

De aici, având în vedere şi relaţia (1), deducem că şirul $\left(\frac{x_n}{n} - 1\right) n^{\log_3 \frac{6}{5}}$ este mărginit, deci şirul $\left(\frac{x_n - n}{n^{\log_3 \frac{5}{2}}}\right)_{n \geq 1}$ este mărginit. Prin urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - n}{n^x} = 0$.

L105. *Să se determine toate funcţiile continue $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, care verifică ecuaţia funcţională*

$$nx^{n-1}f\left(x^n\right)=(x+1)\,f\left(x\right),\quad \forall x\in(0,\infty),$$

unde $n\in\mathbb{N}^*$, n fixat.

Marian Tetiva şi Dumitru Mihalache, Bârlad

Soluţie. Pentru $n=1$, ecuaţia considerată devine $f(x)=(x+1)\,f(x)$, $x>0$. Soluţia ei, în acest caz, este $f(x)=0$, $x>0$.

Presupunem, în continuare, că $n\geq 2$. Ecuaţia dată este echivalentă cu

$$f\left(x^n\right)=\frac{x+1}{nx^{n-1}}f\left(x\right),\quad x>0,$$

de unde, înlocuind succesiv pe x cu $\sqrt[n]{x}$, obţinem:

$$f\left(x\right)=\frac{\sqrt[n]{x}+1}{nx^{\frac{n-1}{n}}}f\left(\sqrt[n]{x}\right),\quad f\left(\sqrt[n]{x}\right)=\frac{\sqrt[n^2]{x}+1}{nx^{\frac{n-1}{n^2}}}f\left(\sqrt[n^2]{x}\right),\ldots,$$

$$f\left(\sqrt[n^{n-1}]{x}\right)=\frac{\sqrt[n^k]{x}+1}{nx^{\frac{n-1}{n^k}}}f\left(\sqrt[n^k]{x}\right).$$

De aici, deducem că

$$f\left(x^n\right)=\frac{\left(\sqrt[n]{x}+1\right)\left(\sqrt[n^2]{x}+1\right)\cdots\left(\sqrt[n^k]{x}+1\right)}{n^k\cdot x^{\frac{n-1}{n}+\frac{n-1}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^k}}}f\left(\sqrt[n^k]{x}\right),\quad \forall k\in\mathbb{N}^*.$$

Deoarece $\dfrac{n-1}{n}+\dfrac{n-1}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^k}=\dfrac{n-1}{n}\cdot\left(1-\dfrac{1}{n^k}\right):\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=1-\dfrac{1}{n^k}$, rezultă că

$$f\left(x\right)=\frac{\left(\sqrt[n]{x}+1\right)\left(\sqrt[n^2]{x}+1\right)\cdots\left(\sqrt[n^k]{x}+1\right)}{n^k\cdot x^{1-\frac{1}{n^k}}}f\left(\sqrt[n^k]{x}\right),\quad \forall k\in\mathbb{N}^*. \tag{1}$$

Avem $\lim\limits_{k\to\infty}x^{1-\frac{1}{n^k}}=x$ şi $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\sqrt[n^k]{x}\right)=f\left(\lim\limits_{k\to\infty}x^{1/n^k}\right)=f\left(1\right)$. Să calculăm acum

$$L=\lim_{k\to\infty}\frac{\left(\sqrt[n]{x}+1\right)\left(\sqrt[n^2]{x}+1\right)\cdots\left(\sqrt[n^k]{x}+1\right)}{n^k}.$$

a) Dacă $n=2$, atunci putem restrânge produsul $P=\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt[2^2]{x}+1\right)\cdots\left(\sqrt[2^k]{x}+1\right)$:

$$\begin{aligned}P\left(\sqrt[2^k]{x}-1\right)&=\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt[2^2]{x}+1\right)\cdots\left(\sqrt[2^k]{x}+1\right)\left(\sqrt[2^k]{x}-1\right)=\\&=\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt[2^2]{x}+1\right)\cdots\left(\sqrt[2^{k-1}]{x}+1\right)\left(\sqrt[2^{k-1}]{x}-1\right)=\cdots=\\&=\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)=x-1,\end{aligned}$$

deci $P=\dfrac{x-1}{\sqrt[2^k]{x}-1}$, pentru $x\neq 1$. Drept urmare,

$$L=\lim_{k\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt[2^2]{x}+1\right)\ldots\left(\sqrt[2^k]{x}+1\right)}{2^k}=\lim_{k\to\infty}\frac{x-1}{\frac{x^{1/2^k}-1}{1/2^k}}=\frac{x-1}{\ln x},\quad x\neq 1.$$

În acest caz, trecând la limită în relaţia (1), pentru $k\to\infty$, obţinem:

$$f\left(x\right)=\frac{x-1}{x\ln x}f\left(1\right),\quad \forall x\neq 1.$$

Notăm pe $f(1)$ cu c ($c \in \mathbb{R}$). Cum $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x\ln x}c\right) = c$, înseamnă că soluţia ecuaţiei considerate este:

$$f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x\ln x}c, & x\neq 1 \\ c, & u\neq 1 \end{cases},\ \text{unde } c\in\mathbb{R}\ .$$

b) Să vedem ce se întâmplă dacă $n > 2$. Există $l \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $n > 2^l$, deci $\frac{1}{n^i} < \frac{1}{2^{li}}$, $i = \overline{1,k}$. Dacă $x > 1$, atunci

$$\left(\sqrt[n]{x}+1\right)\left(\sqrt[n^2]{x}+1\right)\cdots\left(\sqrt[n^k]{x}+1\right) < \left(\sqrt[2^l]{x}+1\right)\left(\sqrt[2^{2l}]{x}+1\right)\cdots\left(\sqrt[2^{lk}]{x}+1\right) <$$
$$< \left(\sqrt[2]{x}+1\right)\left(\sqrt[2^2]{x}+1\right)\left(\sqrt[2^3]{x}+1\right)\cdots\left(\sqrt[2^{lk}]{x}+1\right).$$

Astfel, avem

$$0 \le \frac{\left(\sqrt[n]{x}+1\right)\left(\sqrt[n^2]{x}+1\right)\cdots\left(\sqrt[n^k]{x}+1\right)}{n^k} <$$
$$< \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt[2^2]{x}+1\right)\left(\sqrt[2^3]{x}+1\right)\cdots\left(\sqrt[2^{lk}]{x}+1\right)}{n^k} =$$
$$= \frac{x-1}{\sqrt[2^{kl}]{x}-1}\cdot\frac{1}{n^k} = \frac{x-1}{\frac{x^{1/2^{kl}}-1}{1/2^{kl}}\left(\frac{n}{2^l}\right)^k}.$$

De aici, ţinând cont că $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{x^{1/2^{kl}}-1}{1/2^{kl}} = \ln x$ şi $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{n}{2^l}\right)^k = \infty$, deducem egalitatea $L = 0$, unde $x > 1$, deci $f(x) = 0$, $x > 1$.

Dacă $x \in (0,1)$, notăm pe $\frac{1}{x}$ cu y şi atunci $y > 1$. Se observă că

$$\left(\sqrt[n]{x}+1\right)\left(\sqrt[n^2]{x}+1\right)\cdots\left(\sqrt[n^k]{x}+1\right) = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{y}}+1\right)\left(\frac{1}{\sqrt[n^2]{y}}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{\sqrt[n^k]{y}}+1\right) =$$
$$= \frac{\left(\sqrt[n]{y}+1\right)\left(\sqrt[n^2]{y}+1\right)\cdots\left(\sqrt[n^k]{y}+1\right)}{y^{\frac{1}{n}}y^{\frac{1}{n^2}}\cdots y^{\frac{1}{n^k}}} = \frac{\left(\sqrt[n]{y}+1\right)\left(\sqrt[n^2]{y}+1\right)\cdots\left(\sqrt[n^k]{y}+1\right)}{y^{\frac{1}{n}\cdot\frac{1-1/n^k}{1-1/n}}} =$$
$$= \frac{\left(\sqrt[n]{y}+1\right)\left(\sqrt[n^2]{y}+1\right)\cdots\left(\sqrt[n^k]{y}+1\right)}{y^{\frac{1-1/n^k}{n-1}}}.$$

Aşadar, avem

$$L = \lim_{k\to\infty}\frac{\left(\sqrt[n]{y}+1\right)\left(\sqrt[n^2]{y}+1\right)\cdots\left(\sqrt[n^k]{y}+1\right)}{n^k\, y^{\frac{1-1/n^k}{n-1}}} = 0\cdot\frac{1}{y^{\frac{1}{n-1}}} = 0,$$

de unde, rezultă că $f(x) = 0$, oricare ar fi $x \in (0,1)$.

Deoarece f este continuă în $x = 1$, conchidem că soluţia problemei, în acest caz, este

$$f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x) = 0.$$