

PROBLEME ȘI SOLUȚII

Soluțiile problemelor propuse în nr. 1 / 2004

Clasele primare

P.64. Într-o piesă de teatru sunt 12 personaje, copii și adulți. Câți copii joacă în piesă, dacă la fiecare doi adulți corespunde un copil?

(Clasa I)

Alexandra Radu, elevă, Iași

Soluție. Formăm grupe de forma (copil, adult, adult) până epuizăm personajele. Putem forma patru grupe de acest fel. Rezultă că în piesă joacă patru copii.

P.65. Se dau jetoanele $\boxed{A\bar{T}}$ \boxed{II} \boxed{CRE} $\boxed{\bar{T}II}$ $\boxed{A\bar{T}II}$ \boxed{RECR} \boxed{EA} \boxed{RE} \boxed{REC} . Care este numărul cel mai mare de jetoane cu care se poate forma cuvântul "RECREAȚII"?

(Clasa I)

Oxana Pascal, elevă, Rep. Moldova

Soluție. Cuvântul "RECREAȚII" poate fi format astfel: \boxed{RE} \boxed{CRE} $\boxed{A\bar{T}II}$, \boxed{REC} \boxed{RE} $\boxed{A\bar{T}}$ \boxed{II} și \boxed{RECR} \boxed{EA} $\boxed{\bar{T}II}$. Numărul cel mai mare de jetoane utilizate este patru.

P.66. Într-o livadă sunt tot atâția peri cât și meri. Sunt 6 rânduri cu peri și 4 rânduri cu meri. Numărul merilor de pe un rând întrece cu 5 numărul perilor de pe un rând. Câți pomi sunt în acea livadă?

(Clasa a II-a)

Înv. Maria Racu, Iași

Soluție. Utilizăm metoda figurativă.

Numărul perilor din cele 6 rânduri:



Numărul merilor din cele 4 rânduri:

Din figurarea mărimilor se deduce că un rând de peri are $5+5 = 10$ pomi. Numărul perilor este $6 \cdot 10 = 60$. Numărul tuturor pomilor din livadă este $60 + 60 = 120$.

P.67. Dintr-o mulțime de 5 copii, orice grupare de trei conține cel puțin o fată. Câți băieți pot fi în mulțime?

(Clasa a II-a)

Andreea Surugiu, elevă, Iași

Soluție. În mulțime nu putem avea mai mult de 2 băieți, altfel am găsi o grupare de trei în care nu avem cel puțin o fată. În concluzie, putem avea 2 băieți, 1 băiat sau nici unul.

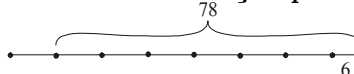
P.68. Dacă Ina ar împărți numărul nucilor culese de ea la numărul nucilor culese de sora sa, ar obține 7 rest 6. Știind că Ina a cules cu 78 nuci mai mult decât sora sa, aflați câte nuci a cules fiecare.

(Clasa a III-a)

Înv. Doișița Spănu, Iași

Soluție. Utilizăm metoda figurativă.

Numărul nucilor culese de Ina:



Numărul nucilor culese de sora Inei: $\underline{\quad}$

Numărul nucilor culese de sora Inei este $(78 - 6) : 6 = 72 : 6 = 12$. Numărul nucilor culese de Ina este $7 \cdot 12 + 6 = 84 + 6 = 90$.

P.69. Într-o împărțire cu rest, în care împărțitorul este mai mare ca nouă, mărinind împărțitorul cu o unitate și efectuând din nou împărțirea obținem câtul 9

și restul 0. Aflați câtul și restul împărțirii inițiale.

(Clasa a III-a)

Înv. Mariana Toma, Muncelu de Sus (Iași)

Soluție. Împărțirea inițială este $D = I \times C + R$, $R < I$. A doua împărțire este exactă și avem $D = (I + 1) \times 9$. Rezultă $D = I \times 9 + 9$. Cum $I > 9$ obținem $C = 9$ și $R = 9$.

P.70. Într-o tabără internațională de matematică sunt elevi din patru țări: Bulgaria, Grecia, Republica Moldova și România. Dacă 21 elevi nu sunt din Bulgaria, 23 nu sunt din Grecia, 22 elevi nu sunt din Republica Moldova și 21 elevi nu sunt din România, câți elevi sunt din fiecare țară?

(Clasa a III-a)

Georgiana Ciobanu, elevă, Iași

Soluție. Dacă 21 elevi nu sunt din Bulgaria, înseamnă că sunt din Grecia, Republica Moldova și România.

Analog, 23 elevi sunt din Bulgaria, Republica Moldova și România;

22 elevi sunt din Bulgaria, Grecia și România;

21 elevi sunt din Bulgaria, Grecia și Republica Moldova.

Triplul elevilor din cele patru țări este $21 + 23 + 22 + 21 = 87$. Numărul elevilor din cele patru țări este $87 : 3 = 29$. Rezultă $29 - 21 = 8$ elevi din Bulgaria, $29 - 23$ elevi din Grecia, $29 - 22 = 7$ elevi din Republica Moldova și $29 - 21 = 8$ elevi din România.

P.71. Fiecare pătrat din figura alăturată $\square\square$ se colorează cu o altă culoare. În câte moduri putem face acest lucru având la dispoziție patru culori?

(Clasa a IV-a)

Înv. Cătălina Rață, Coarnele Caprei (Iași)

Soluție. Dacă alegem culorile C_1, C_2, C_3 din cele patru, putem să colorăm pătratele în șase moduri diferite: $(C_1, C_2, C_3), (C_1, C_3, C_2), (C_2, C_1, C_3), (C_2, C_3, C_1), (C_3, C_1, C_2), (C_3, C_2, C_1)$. Cele trei culori pot fi alese în patru moduri diferite: $(C_1, C_2, C_3), (C_1, C_2, C_4), (C_1, C_3, C_4)$ și (C_2, C_3, C_4) . Pentru fiecare alegere avem șase moduri diferite de colorare. În total avem $6 \times 4 = 24$ moduri diferite de colorare.

P.72. Aruncăm două zaruri și adunăm punctele de pe cele două fețe de deasupra.

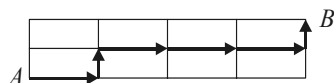
a) Câte sume diferite putem obține? b) Câte sume se pot forma în trei moduri diferite?

(Clasa a IV-a)

Înv. Gheorghe Toma, Muncelu de Sus (Iași)

Soluție. a) Suma minimă care se poate forma este $1 + 1 = 2$, iar cea maximă este $6 + 6 = 12$. Toate numerele de la 2 la 12 sunt sume posibile. b) Singurele sume care se pot forma în trei moduri diferite sunt: $6 = 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3$, $7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4$ și $8 = 2 + 6 = 3 + 5 = 4 + 4$. În trei moduri diferite se pot forma trei sume.

P.73. În figura alăturată este pus în evidență un drum format din șase segmente care pleacă din A și ajunge în B. Câte drumuri de felul acesta se pot construi?



(Clasa a IV-a)

Înv. Constantin Rață, Coarnele Caprei (Iași)

Soluție. Orice drum de acest fel conține numai două segmente verticale. Numărul drumurilor coincide cu numărul perechilor distincte de segmente ver-

6	7	8	9	10	B
1	2	3	4	5	A

ticale prin care trec drumurile cu șase segmente. Aceste perechi sunt: (1, 10), (1, 9), (1, 8), (1, 7), (1, 6), (2, 9), (2, 8), (2, 7), (2, 6), (3, 8), (3, 7), (3, 6), (4, 7), (4, 6), (5, 6). În total se pot construi 15 drumuri formate din șase segmente.

Clasa a V-a

V.46. Aflați $n \in \mathbb{N}$ pentru care $11^n + 9^n$ și $11^n - 9^n$ sunt simultan pătrate perfecte.

Andrei - Sorin Cozma, elev, Iași

Soluție. Dacă n este par, $U(11^n + 9^n) = 1 + 1 = 2$, deci $11^n + 9^n$ nu poate fi pătrat perfect. Dacă n este impar, $U(11^n - 9^n) = U(\overline{\dots 1} - \overline{\dots 9}) = 2$, deci $11^n - 9^n$ nu poate fi pătrat perfect. Rezultă că nu există $n \in \mathbb{N}$ cu proprietățile dorite.

V.47. Să se arate că numărul $\overline{51a51a}$ nu poate fi scris ca produsul a patru numere prime.

Cătălin Budeanu, Iași

Soluție. Avem că $\overline{51a51a} = \overline{51a} \cdot 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{51a}$. Însă $\overline{51a}$ este număr compus, oricare ar fi cifra a în baza 10, de unde concluzia.

V.48. Se consideră fracțiile $x_1 = \frac{9}{14}$, $x_2 = \frac{10}{21}$, $x_3 = \frac{11}{28}$, Scrieți fracția x_{1000} și apoi ordonați crescător primele 1000 de fracții.

Dumitru Gherman, Pașcani

Soluție. Numărătorii fracțiilor sunt 9, 9 + 1, 9 + 2, ... Numărătorul lui x_{1000} va fi 9 + 999 = 1008. Numitorii fracțiilor sunt 14, 14 + 7, 14 + 27, ... Numitorul lui x_{1000} va fi 14 + 999 · 7 = 7007; deci $x_{1000} = \frac{1008}{7007}$. Observăm că $x_1 = \frac{1}{7} + \frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{1}{7} + \frac{1}{3}$; $x_3 = \frac{1}{7} + \frac{1}{4}$; ...; $x_{1000} = \frac{1}{7} + \frac{1}{1001}$. Atunci $x_{1000} < x_{999} < \dots < x_3 < x_2 < x_1$.

Observăm că dacă indicelui îi adunăm 8 obținem numărătorul. Dacă indicelui îi adunăm 1 și îl înmulțim cu 7 obținem numitorul, deci $x_{1000} = \frac{1000 + 8}{(1000 + 1) \cdot 7} = \frac{1008}{7007}$.

V.49. Determinați numărul tripletelor $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ dacă $3a + 2b + c = 598$ și $a + 2b + 3c = 602$. Dacă în plus $a < b < c$, determinați a , b și c .

Gheorghe Iurea, Iași

Soluție. Avem că $(a + 2b + 3c) - (3a + 2b + c) = 602 - 598$, deci $c - a = 2$. De aici, $c = a + 2$ și apoi $b = 298 - 2a$, unde $a \in \{0, 1, 2, \dots, 149\}$. Prin urmare, există 150 de triplete, având forma $(a, 298 - 2a, a + 2)$. Dacă în plus $a < b < c$, atunci $a < 298 - 2a < a + 2$, de unde $296 < 3a < 298$, deci $a = 99$ și apoi $b = 100$, $c = 101$.

V.50. Câte numere de 7 cifre se pot scrie folosind cifrele 1, 2 și 3, astfel încât 1 să apară de 2 ori, 2 să apară de 3 ori și 3 să apară de 2 ori? Dar dacă în locul cifrelor 1, 2 și 3 considerăm cifrele 0, 1 și respectiv 2?

Petru Asaftei, Iași

Soluție. Dacă prima cifră 1 se găsește pe primul loc, a doua cifră 1 poate ocupa locurile 2, 3, ..., 7, deci 6 poziții. Dacă prima cifră 1 se găsește pe locul al doilea, a doua cifră 1 poate ocupa locurile 3, 4, ..., 7, deci 5 poziții etc. În total, cele 2 cifre 1 pot fi așezate în $6 + 5 + \dots + 1 = 21$ moduri. Pentru fiecare poziționare a cifrelor 1, rămân 5 locuri libere care pot fi ocupate în $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ moduri de cifra 3,

rămânând astfel exact trei locuri libere pentru cifrele 2. Folosind regula produsului, obținem $21 \cdot 10 \cdot 1 = 210$ numere de 7 cifre.

În al doilea caz, cifrele 0 pot fi așezate în $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ moduri, cifrele 2 în $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ moduri, rămânând libere exact trei poziții pentru 1; obținem $15 \cdot 10 \cdot 1 = 150$ numere.

Clasa a VI-a

VI.46. *Suma dintre opusul unui număr natural și inversul altui număr natural este $-119,992$. Să se determine numerele.*

Ciprian Baghiu, Iași

Soluție. Fie $n \in \mathbb{N}$ și $k \in \mathbb{N}^*$ cele două numere, adică $-n + \frac{1}{k} = -119,992$.

Atunci $k \neq 1$ și $\frac{1}{k} - 0,008 = n - 120$, de unde $\left| \frac{1}{k} - \frac{1}{125} \right| \in \mathbb{N}$. Însă

$$\left| \frac{1}{k} - \frac{1}{125} \right| \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{125} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{125} < 1,$$

deci $\frac{1}{k} = \frac{1}{125}$, adică $n = 120$, $k = 125$.

VI.47. *Aflați restul împărțirii numărului $N = 2844^{2844} + 4107^{4107} + 6398^{6398}$ prin 79.*

Tamara Culac, Iași

Soluție. Se știe că $(a + b)^n = Ma + b^n$; atunci $2844^{2844} = \mathcal{M}79$, $4107^{4107} = (4108 - 1)^{4107} = \mathcal{M}79 - 1$, iar $6398^{6398} = (6399 - 1)^{6398} = \mathcal{M}79 + 1$. Prin urmare, $N = \mathcal{M}79$, deci restul cerut este 0.

VI.48. *a) Într-o proporție cu termeni nenuli, un extrem este suma celorlalți trei termeni dacă și numai dacă celălalt extrem are inversul egal cu suma inversilor celorlalți trei termeni.*

b) Dacă din patru numere raționale nenule distincte unul este suma celorlalți trei, iar altul are inversul egal cu suma inverselor celorlaltor trei, atunci numerele sunt termeni ai unei proporții.

Claudiu - Ștefan Popa, Iași

Soluție. a) În condițiile $a, b, c, d \in \mathbb{Q}^*$, $ad = bc$, avem că $a = b + c + d \Leftrightarrow$

$$a - d = b + c \Leftrightarrow \frac{a - d}{ad} = \frac{b + c}{bc} \Leftrightarrow \frac{1}{d} - \frac{1}{a} = \frac{1}{c} + \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{1}{d} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

b) Dacă $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ și $a = b + c + d$, $\frac{1}{d} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, atunci $a - d = b + c \neq 0$ și $\frac{1}{d} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, adică $a - d = b + c \neq 0$ și $\frac{a - d}{ad} = \frac{b + c}{bc}$, deci $ad = bc$, i.e. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

VI.49. *Să se arate că orice număr natural relativ prim cu 10 admite un multiplu care se scrie folosind numai cifra 3.*

Lucian - Georges Lăduncă, Iași

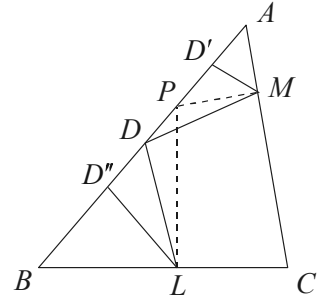
Soluție. Fie $n \in \mathbb{N}$ cu $(n, 10) = 1$. Considerăm numerele $3, 33, 333, \dots, \underbrace{33 \dots 3}_{n+1}$;

există printre acestea măcar două care dau același rest la împărțirea prin n , conform principiului cutiei. Evident că n divide diferența acestor numere, iar această diferență este de forma $\underbrace{33 \dots 3}_{n+1} \cdot 10^k$. Deoarece $(n, 10^k) = 1$, urmează că $n \mid \underbrace{33 \dots 3}_{n+1}$.

VI.50. Fie $\triangle ABC$ cu $[AC] \equiv [BC]$, D mijlocul lui $[AB]$, P un punct pe dreapta AB , iar M și L picioarele perpendicularelor din P pe AC , respectiv BC . Să se arate că $[DM] \equiv [DL]$.

Neculai Roman, Mircești (Iași)

Soluție. Deosebim trei cazuri, după cum $P \in [AB]$, $P \in [BA \setminus [AB]]$ sau $P \in [AB \setminus [AB]]$. Vom trata numai prima situație, celelalte rezolvându-se asemănător. Ne situăm cu $P \in [DA]$, ca în figură și fie D' , D'' mijloacele segmentelor $[PA]$, respectiv $[PB]$; demonstrăm că $\triangle DD'M \equiv \triangle LD''D$. Avem că $DD' = \frac{1}{2}(AB - PA) = \frac{1}{2}PB = D''L$, iar $DD'' = \frac{1}{2}(AB - PB) = \frac{1}{2}PA = D'M$. În plus, $m(\widehat{DD'M}) = 2m(\widehat{BAC}) = 2m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{LD''D})$ și atunci congruența de triunghiuri anunțată urmează conform LUL. Rezultă că $[DM] \equiv [DL]$.



Clasa a VII-a

VII.46. Să se rezolve în \mathbb{R} inecuațiile:

- a) $x^{100} + x^{77} + x^{50} + x^{21} + x^{10} + x^5 + 1 > 0$;
 b) $x^{100} - x^{77} + x^{50} - x^{21} + x^{10} - x^5 + 2 < 0$.

Vasile Solcanu, Bogdănești (Suceava)

Soluție. a) Fie $E(x) = x^{100} + x^{77} + x^{50} + x^{21} + x^{10} + x^5 + 1$. Dacă $x \geq 0$, evident că $E(x) > 0$. Pentru $x \in (-1, 0)$, avem $x^{2k} > 0$ și $x^{2k+1} + 1 > 0$, deci $E(x) = x^{100} + x^{50}(x^{27} + 1) + x^{10}(x^{11} + 1) + x^5 + 1 > 0$. Dacă $x = -1$, atunci $E(-1) = 1 > 0$. În sfârșit, dacă $x \in (-\infty, -1)$, atunci $x^{2k+1} + 1 < 0$, $x^{2k+1} < 0$, deci $E(x) = x^{77}(x^{23} + 1) + x^{21}(x^{29} + 1) + x^5(x^5 + 1) + 1 > 0$. În concluzie, $E(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Dacă $F(x) = x^{100} - x^{77} + x^{50} - x^{21} + x^{10} - x^5 + 2$, atunci $F(x) = E(-x) + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci inecuația dată nu are soluție în \mathbb{R} .

VII.47. Să se rezolve în \mathbb{Z}^2 ecuația $u^2v + uv^2 = 2u^2 + 2v^2 - 40$.

Mihai Crăciun, Pașcani

Soluție. Ecuația se scrie echivalent $uv(u+v) = 2(u+v)^2 - 4uv - 40 \Leftrightarrow uv(u+v+4) = 2[(u+v)^2 - 16] - 8 \Leftrightarrow (u+v+4)(uv-2u-2v+8) = -8$, iar $uv-2u-2v+8 = (u-2)(v-2)+4$. Considerând toate cazurile posibile, găsim în final soluțiile $(u, v) \in \{(2, -8), (-8, 2)\}$.

VII.48. Dacă $a_i = i + \sqrt{i}$, $\forall i = \overline{1, 2004}$, precizați dacă numărul

$N = a_1 - a_2 - a_3 + a_4 + a_5 - a_6 - a_7 + a_8 + \dots + a_{2001} - a_{2002} - a_{2003} + a_{2004}$ este negativ, pozitiv sau nul.

Viorel Cornea și Dan Ștefan Marinescu, Hunedoara

Soluție. Avem că $N = N_1 + N_2$, unde

$$N_1 = (1 - 2 - 3 + 4) + (5 - 6 - 7 + 8) + \dots + (2001 - 2002 - 2003 + 2004), \quad \text{iar}$$

$$N_2 = (\sqrt{1} - \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4}) + (\sqrt{5} - \sqrt{6} - \sqrt{7} + \sqrt{8}) + \dots + (\sqrt{2001} - \sqrt{2002} - \sqrt{2003} + \sqrt{2004}).$$

Evident că $N_1 = 0$ și cum vom arăta că fiecare paranteză din scrierea lui N_2 este negativă, va rezulta că $N < 0$. Pentru a demonstra că $\sqrt{p} + \sqrt{p+3} < \sqrt{p+1} + \sqrt{p+2}$, $\forall p \geq 1$, este suficient să ridicăm la pătrat în ambii membri, obținând după reduceri $p^2 + 3p < p^2 + 3p + 2$, fapt adevărat.

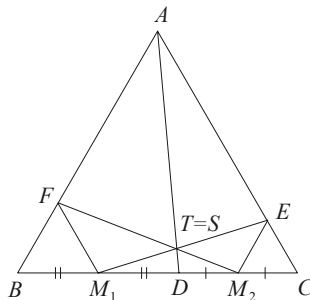
VII.49. Fie $\triangle ABC$ echilateral și $D \in (BC)$. Notăm cu M_1, M_2 mijloacele segmentelor $[BD]$, respectiv $[CD]$. Paralela prin M_1 la AC intersectează AB în F , iar paralela prin M_2 la AB intersectează AC în E . Să se arate că dreptele AD, M_1E și M_2F sunt concurente.

Nicolae Gross și Lucian Tuțescu, Craiova

Soluție. Deoarece $\triangle BFM_1$ și $\triangle CEM_2$ sunt echilaterale, avem $BM_1 = BF = FM_1, CE = CM_2 = EM_2, AF = CM_1$ și $AE = BM_2$. Fie $\{S\} = AD \cap EM_1, \{T\} = AD \cap FM_2$. Aplicând teorema lui Menelaus în $\triangle ABC$ cu transversala $M_1 - S - E$ și în $\triangle ABD$ cu transversala $F - T - M_2$, obținem

$$\frac{M_1D}{M_1C} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AS}{SD} = 1 = \frac{M_2D}{M_2B} \cdot \frac{BF}{FA} \cdot \frac{AT}{TD},$$

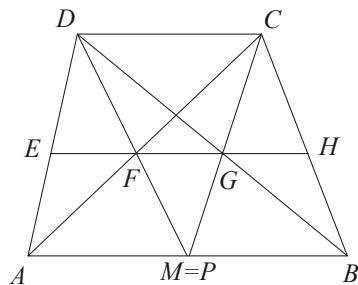
de unde $\frac{AS}{SD} = \frac{AT}{TD}$, adică $S = T$.



VII. 50. Fie $ABCD$ un trapez cu bazele $[AB]$ și $[CD]$. O paralelă la baze intersectează AD, AC, BD și BC în punctele E, F, G și respectiv H . Să se arate că $EH = 3FG$ dacă și numai dacă DF, CG și AB sunt drepte concurente.

Adrian Zanoschi, Iași

Soluție. Aplicăm teorema fundamentală a asemănării în $\triangle ADC$ și în $\triangle BDC$, obținem că $\frac{EF}{DC} = \frac{AE}{AD}$ și $\frac{GH}{DC} = \frac{BH}{BC}$ de unde, având în vedere că $\frac{AE}{AD} = \frac{BH}{BC}$, rezultă că $EF = GH = u$. Notăm încă $v = FG$ și să presupunem că $EH = 3FG$; atunci $2u + v = 3v$, adică $u = v$. Astfel, în $\triangle DEG$ avem DF mediană și $AB \parallel EG$, deci DF intersectează AB în mijlocul M al segmentului $[AB]$. Analog rezultă că CG intersectează AB în M , de unde urmează că DF, CG și AB sunt concurente. Reciproc, dacă cele trei drepte sunt concurente în P , notăm $AP = a, PB = b$ și obținem că $\frac{u}{v} = \frac{a}{b}$ și $\frac{v}{u} = \frac{a}{b}$, de unde $u = v$, adică $EH = 2u + v = 3v = 3FG$.



Clasa a VIII-a

VIII.46. Să se demonstreze că nu există $m, n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} = 2003$.

Alexandru Negrescu, elev, Botoșani

Soluție. Relația dată se scrie $t^2 - 2003t + 1 = 0$, unde $t = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. În aceste condiții, discriminantul ecuației în t trebuie să fie pătratul unui număr rațional, chiar pătrat perfect. Însă $\Delta = 2003^2 - 4 = 2001 \cdot 2005$ nu este pătrat perfect.

Notă. Se poate arăta că relația $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} \in \mathbb{N}^*$ implică $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} = 2$.

VIII.47. Pentru $\forall x \in (0, \infty)$, să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{(x^5 + x^3 + x^2 + 1)(x^3 + x^2 + 2) + (x^4 + x^3 + x + 1)(x^3 + x + 2) + (x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2)}{x^6 + x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1} \geq 6.$$

Mircea Coșbuc, elev, Iași

Soluție. Cu notațiile $a = x + 1$, $b = x^2 + 1$, $c = x^3 + 1$, inegalitatea se scrie succesiv

$$\frac{ac(a+c) + bc(b+c) + ab(a+b)}{abc} \geq 6 \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 6.$$

Ultima inegalitate rezultă din cunoscutele $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ și analogele.

VIII.48. Găsiți numerele prime p și q pentru care $p^2 + q = 37q^2 + p$.

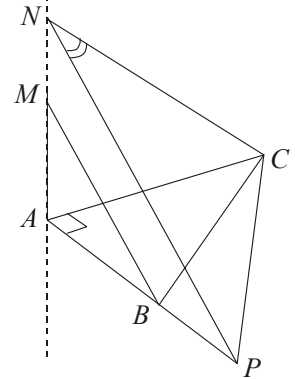
Liviu Smarandache, Craiova

Soluție. Evident $p \neq q$ și scriem ipoteza sub forma $p(p-1) = q(37q-1)$, unde $(p, q) = 1$. Urmează că $37q-1 = tp$, $t \in \mathbb{N}^*$, deci $p(p-1) = qtp$, adică $p = qt + 1$ și înlocuind în ipoteză găsim că $qt^2 + t = 37q - 1$. De aici, $q(37 - t^2) = t + 1 \geq 2$, deci $37 - t^2 \geq 0$, prin urmare $t \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. După încercări, singurul caz favorabil rămâne $t = 6$, când $q = 7$, $p = 43$.

VIII.49. Fie $\triangle ABC$ dreptunghic în A cu $AB = AC = a$. Considerăm $MA \perp (ABC)$, $MA = a\sqrt{2}$ și $N \in AM$ astfel încât $m(\widehat{CN, BM}) = 60^\circ$. Să se afle lungimea segmentului $[AN]$.

Romanța Ghiță și Ioan Ghiță, Blaj

Soluție. Fie N de aceeași parte a planului (ABC) ca și M ; notăm $AN = x$. Construim $d \parallel MB$, cu $N \in d$; evident că $NP \subset (AMB)$ și fie $\{P\} = AB \cap d$. Din $\triangle ABM \sim \triangle APN$, obținem $AP = \frac{x\sqrt{2}}{2}$, $NP = \frac{x\sqrt{6}}{2}$. Cu teorema lui Pitagora în $\triangle APC$ și $\triangle NAC$, găsim $PC = \sqrt{a^2 + \frac{x^2}{2}}$, $NC = \sqrt{a^2 + x^2}$. Deoarece $m(\widehat{PNC}) = m(\widehat{CN, BM}) = 60^\circ$, teorema cosinusului în $\triangle NPC$ duce la o ecuație în x , cu soluția admisibilă $x = \frac{a\sqrt{15}}{5}$. Analog se tratează cazul când N se află de cealaltă parte a planului (ABC) , obținând același rezultat.



VIII.50. Fie patrulaterul convex $ABCD$ cu $AB = BC$, $m(\widehat{A}) = m(\widehat{C}) = 90^\circ$, $m(\widehat{B}) \leq 90^\circ$ și fie O mijlocul lui $[BD]$. Pe perpendiculara în O pe planul (ABC) se ia un punct V astfel încât $OV = OB$. Să se arate că $d(D, (VAB)) = 2d(D, (VAC))$ dacă și numai dacă $m(\widehat{ABC}) = 60^\circ$.

Monica Nedelcu, Iași

Soluție. Observăm că $ABCD$ este patrulater înscris în cercul de diametru $[BD]$ și fie $r = OA = OB = OC = OD = OV$. Notăm $\{P\} = AC \cap BD$ și $x = OP$; evident că $AP = PC$ și $AP \perp BD$. Calculând în două moduri volumul tetraedrului

$VABD$, obținem că $h_1 = d(D, (VAB)) = VO \cdot \frac{S_{ABD}}{S_{VAB}} = \frac{2r\sqrt{5}}{5}$.

Deoarece $VP \perp AC$, $VP = \sqrt{r^2 + x^2}$ și $AC = 2\sqrt{r^2 - x^2}$, calculând în două moduri volumul lui $VDAC$, găsim

$$h_2 = d(D, (VAC)) = \frac{VO \cdot S_{DAC}}{S_{VAC}} = \frac{2r(r-x)}{\sqrt{r^2 + x^2}}.$$

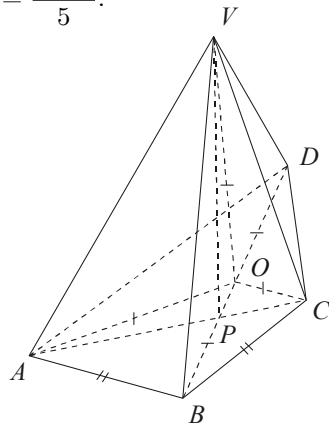
Atunci $h_1 = 2h_2 \Leftrightarrow \sqrt{5}(r-x) = \sqrt{r^2 + x^2} \Leftrightarrow$

$$2x^2 - 5rx + 2r^2 = 0 \text{ și } x \in [0, r] \Leftrightarrow x = \frac{r}{2} \Leftrightarrow BP = \frac{3r}{2}$$

și

$$AP = \frac{r\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \widehat{ABD} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$$

$$m(\widehat{ABD}) = 30^\circ \Leftrightarrow m(\widehat{ABC}) = 60^\circ.$$



Clasa a IX-a

IX.46. Să se rezolve ecuația $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} - \sqrt[2n]{x-2} = 2$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Dan Popescu, Suceava

Soluție. Din condițiile de existență a radicalilor obținem $x \in [2, 3]$, de unde $t = \sqrt[2n]{x-2} \in [0, 1]$. Ecuația se scrie atunci $\sqrt{t^{2n}+1} + \sqrt{1-t^{2n}} = 2 + t$. Însă $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{a+b}$, deci $2 + t \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{t^{2n}+1+1-t^{2n}} = 2$, adică $t = 0$. În consecință, singura soluție a ecuației este $x = 2$.

IX.47. Să se determine șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ de numere strict pozitive pentru care

$$a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - \dots + (-1)^{n-1} a_n^2 = (-1)^{n-1} (a_1 + a_2 + \dots + a_n), \quad \forall n \geq 1.$$

Marian Ursărescu, Roman

Soluție. Pentru $n = 1$, obținem $a_1^2 = a_1$, adică $a_1 = 1$. Pentru $n = 2$, obținem $a_1^2 - a_2^2 = -a_1 - a_2$, deci $a_2^2 - a_2 - 2 = 0$ și, cum $a_2 > 0$, găsim $a_2 = 2$. Intuim că $a_n = n$, $\forall n \geq 1$, fapt care se demonstrează prin inducție matematică. Presupunem că $a_1 = 1, a_2 = 2, \dots, a_k = k$, avem că

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{k-1} k^2 + (-1)^k a_{k+1}^2 = (-1)^k (1 + 2 + \dots + k) + (-1)^k a_{k+1},$$

de unde, după calcule, folosind faptul că $\sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} i^2 = (-1)^{k-1} \frac{k(k+1)}{2}$, iar

$\sum_{i=1}^k i = \frac{k(k+1)}{2}$, obținem că $a_{k+1}^2 - a_{k+1} - k(k+1) = 0$. Unica soluție pozitivă a acestei ecuații de grad II este $a_{k+1} = k+1$, ceea ce încheie demonstrația.

IX.48. Fie $a, b, c \in (0, \infty)$ cu $a + b + c + \sqrt{abc} = 4$. Să se arate că

$$\frac{a^2}{a + \sqrt{bc}} + \frac{b^2}{b + \sqrt{ca}} + \frac{c^2}{c + \sqrt{ab}} \geq \frac{3}{2}.$$

Cezar Lupu, elev, Constanța

Soluție. Conform inegalității mediilor, $4 = a + b + c + \sqrt{abc} \geq 4\sqrt[4]{abc\sqrt{abc}}$, de unde $abc \leq 1$, prin urmare $a + b + c \geq 3$. Folosind acum inegalitatea Cauchy - Schwartz și cunoscuta $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ac)$, avem:

$$\begin{aligned} & \left[(a + \sqrt{bc}) + (b + \sqrt{ca}) + (c + \sqrt{ab}) \right] \left[\frac{a^2}{a + \sqrt{bc}} + \frac{b^2}{b + \sqrt{ca}} + \frac{c^2}{c + \sqrt{ab}} \right] \geq (a + b + c)^2 \\ & \Rightarrow \sum \frac{a^2}{a + \sqrt{bc}} \geq \frac{(a + b + c)^2}{\sum a + \sum \sqrt{bc}} \geq \frac{(a + b + c)^2}{2(a + b + c)} \geq \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

IX.49. Să se arate că $\triangle ABC$ este isoscel în fiecare din ipotezele:

a) $2m_a + b = 2m_b + a$; b) $2m_a + a = 2m_b + b$.

Marius Pachitariu, elev, Iași

Soluție. Folosind torema medianei, avem că

$$4(m_a^2 - m_b^2) = [2(b^2 + c^2) - a^2] - [2(a^2 + c^2) - b^2] = 3(b^2 - a^2).$$

În ipoteza a), obținem că $(a - b)[2m_a + 2m_b + 3(a + b)] = 0$ și, cum paranteza pătrată ia valori strict pozitive, rămâne că $a = b$. În ipoteza b), găsim $(a - b)[2m_a + 2m_b - 3(a + b)] = 0$. Însă $2m_a < b + c$, $2m_b < a + c$, deci $2(m_a + m_b) < a + b + 2c$. În plus, $c < a + b$, prin urmare $2(m_a + m_b) < 3(a + b)$, adică paranteza pătrată ia valori strict negative și din nou $a = b$.

IX.50. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ascuțitunghic ABC . Dacă A , B , C sunt măsurile în radiani ale unghiurilor triunghiului, iar $A \cdot \vec{IA} + B \cdot \vec{IB} + C \cdot \vec{IC} = \vec{0}$, să se arate că $\triangle ABC$ este echilateral.

Constantin Micu, Melinești (Dolj)

Soluție. Deoarece $a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$, relația din ipoteză arată că $\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}$.

Pe de altă parte, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, prin urmare $\frac{\sin A}{A} = \frac{\sin B}{B} = \frac{\sin C}{C}$.

Considerăm funcția $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; vom demonstra că f este strict descrescătoare. Fie $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $x < y$; avem:

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= \frac{\sin y}{y} - \frac{\sin x}{x} = \frac{x(\sin y - \sin x) - (y - x)\sin x}{xy} = \\ &= \frac{2x \sin \frac{y-x}{2} \cos \frac{x+y}{2} - (y-x)\sin x}{xy} < \\ &< \frac{2x \frac{y-x}{2} \cos x - (y-x)\sin x}{xy} = \frac{(y-x)(x - \operatorname{tg} x) \cos x}{xy} < 0. \end{aligned}$$

(Am folosit faptul că $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, apoi că $\frac{x+y}{2} > x \Rightarrow \cos \frac{x+y}{2} < \cos x$, deoarece funcția cosinus este descrescătoare pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.) Urmează că f este injectivă și atunci faptul că $f(A) = f(B) = f(C)$ conduce la $A = B = C$, deci $\triangle ABC$ este echilateral.

Clasa a X-a

X.46. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația $2^{x-1} + 2^{x^2-1} = \frac{y^2 + ay + a^2}{y^2 + a^2}$ să aibă soluții în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Petru Răducanu, Iași

Soluție. Observăm că pentru orice $a \in \mathbb{R}$ ecuația dată are soluții în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (de exemplu, perechea $(0, 0)$ pentru $a \neq 0$ și perechile $(0, y)$, $y \in \mathbb{Z}^*$, pentru $a = 0$).

X.47. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ distincte, cu $z_2 + z_3 = 2$ și astfel încât $|z_1 - 1| = |z_2 - 1| = |z_3 - 1|$. Să se arate că $(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_3)$ este număr complex pur imaginar.

Lidia Nicola, Craiova

Soluția I. Să observăm întâi că $(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_3) \neq 0$, dat fiind faptul că z_1, z_2, z_3 sunt distincte. Atunci faptul că $(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_3)$ este pur imaginar este succesiv echivalent cu:

$$\begin{aligned} (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_3) + (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(z_1 - z_3) &= 0 \Leftrightarrow \\ (z_1 - z_2)[(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) + (\bar{z}_2 - \bar{z}_3)] + [(\bar{z}_1 - \bar{z}_3) + (\bar{z}_3 - \bar{z}_2)](z_1 - z_3) &= 0 \Leftrightarrow \\ (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) + (\bar{z}_1 - \bar{z}_3)(z_1 - z_3) &= z_2\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_3 - \bar{z}_2z_3 + z_3\bar{z}_3 \Leftrightarrow \\ |z_1 - z_2|^2 + |z_1 - z_3|^2 &= |z_2 - z_3|^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Fie A_1, A_2, A_3, C punctele de afixe z_1, z_2, z_3 și respectiv 1. Deoarece $z_2 + z_3 = 2$ implică $(z_2 - 1) + (z_3 - 1) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{CA_2} + \overrightarrow{CA_3} = \vec{0}$, rezultă că $[A_2A_3]$ este diametru și, deci $\triangle A_1A_2A_3$ este dreptunghic în A_1 . Atunci $A_1A_2^2 + A_1A_3^2 = A_2A_3^2$, adică tocmai relația de demonstrat scrisă sub forma (1).

Soluția a II-a (prof. **Dumitru Găleată, Iași; Diana Timofte, elevă, Iași**). Din condiția $z_2 + z_3 = 2$ rezultă că $z_3 = 2 - z_2$ și, deci, $|z_3 - 1| = |2 - z_2 - 1| = |z_2 - 1|$; așadar, egalitatea a 2-a din condiție este superfluă. Notând $z_k = a_k + ib_k$, $k = \overline{1, 3}$, din $z_2 + z_3 = 2$ deducem că $a_2 + a_3 = 2$ și $b_2 + b_3 = 0$, iar din $|z_1 - 1| = |z_2 - 1|$ obținem $a_1^2 - 2a_1 + 1 + b_1^2 = a_2^2 - 2a_2 + 1 + b_2^2$. Ținând seama de aceste relații, prin calcul direct, se arată că $\operatorname{Re}(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_3) = 0$.

X.48. Se consideră planele paralele α și β aflate la distanța h unul de celălalt și $\triangle ABC$ echilateral inclus în planul β .

a) Să se afle locul geometric al punctelor $M \in \alpha$ pentru care $MA^2 + h^2 = MB^2 + MC^2$.

b) Să se determine $M \in \alpha$ astfel încât suma $MA^2 + MB^2 + MC^2$ să fie minimă.

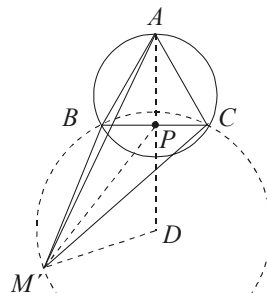
Viorel Cornea și

Dan Ștefan Marinescu, Hunedoara

Soluție. a) Fie $M' = \operatorname{Pr}_\beta M$; atunci $MA^2 = h^2 + M'A^2$ și analogele, deci relația care caracterizează pe M devine $M'A^2 = M'B^2 + M'C^2$. Fie D simetricul lui A față de BC și fie a latura $\triangle ABC$. Aplicând teorema medianei în $\triangle M'AD$ și în $\triangle M'BC$, obținem

$$4M'P^2 = 2(M'A^2 + M'D^2) - AD^2 = 2(M'B^2 + M'C^2) - BC^2,$$

de unde, după calcule, $M'D^2 = a^2$. Atunci locul punctului M' este inclus în cercul



de centru D și rază a . Se arată ușor că orice punct de pe acest cerc aparține locului lui M' . Rezultă că locul lui M este proiecția locului lui M' pe planul α .

b) Dacă T este punctul lui Torricelli al $\triangle ABC$, avem:

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 &= h^2 + M'A^2 + h^2 + M'B^2 + h^2 + M'C^2 \geq \\ &\geq 3h^2 + \frac{(M'A + M'B + M'C)^2}{3} \geq 3h^2 + \frac{(TA + TB + TC)^2}{3}, \end{aligned}$$

cu egalitate dacă $M' = O$ - centrul cercului circumscris și, pe de altă parte, $M' = T$. Însă $\triangle ABC$ este echilateral, deci $O = T$ și atunci suma este minimă dacă $M = \text{Pr}_\alpha O$.

X.49. Să se arate că $\sin^3 x + \sin^3 y + \sin^3 z - 3 \sin x \sin y \sin z \geq$
 $\geq \frac{3}{4} [\sin x (1 - \cos(y - z)) + \sin y (1 - \cos(z - x)) + \sin z (1 - \cos(x - y))],$

$\forall x, y, z \in [0, \pi/3]$.

Marian Tetiva, Bârlad

Soluție. Funcția sinus este concavă pe intervalul $[0, \pi]$; aplicând inegalitatea lui Jensen cu argumentele $3x, 3y, 3z \in [0, \pi]$, obținem că

$$\sin 3x + \sin 3y + \sin 3z \leq 3 \sin(x + y + z) \Leftrightarrow$$

$$3 \sum \sin x - 4 \sum \sin^3 x \leq 3 \sum \sin x \cos y \cos z - 3 \sin x \sin y \sin z \Leftrightarrow$$

$$4 \sum \sin^3 x - 12 \sin x \sin y \sin z \geq 3 \sum \sin x - 3 \sum \sin x \cos y \cos z - 9 \sin x \sin y \sin z.$$

După rearanjarea termenilor în membrul drept și împărțirea prin 4, obținem inegalitatea dorită. Egalitate se obține pentru $x = y = z$.

X.50. Fie $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{N}$, $k \in \overline{1, n}$; notăm cu $f(p)$ numărul tripletelor (A, B, C) de submulțimi (nu neapărat nevide) cu reuniunea $M = \{1, 2, \dots, n\}$, oricare două disjuncte și astfel încât numărul $\sum_{i \in M \setminus A} a_i + \sum_{i \in M \setminus B} b_i + \sum_{i \in M \setminus C} c_i - p$ să fie multiplu de 3 (convenim ca $\sum_{i \in \emptyset} x_i = 0$). Arătați că dacă $f(0) = f(1) = f(2)$, atunci există i pentru care $a_i + b_i + c_i \vdots 3$.

Gabriel Dospinescu, student, București

Soluție. Vom folosi metoda descrisă în articolul *Combinatorică ... algebrică* publicat de autorul problemei în nr. 2/2003 al revistei. Fie $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$; avem că

$$\prod_{i=1}^n (\varepsilon^{a_i+b_i} + \varepsilon^{b_i+c_i} + \varepsilon^{c_i+a_i}) = \sum_{\substack{A \cup B \cup C = M \\ A \cap B = B \cap C = C \cap A = \emptyset}} \sum_{i \in C} (\varepsilon^{a_i+b_i}) + \sum_{i \in B} (\varepsilon^{a_i+c_i}) + \sum_{i \in A} (\varepsilon^{c_i+b_i}),$$

fapt care se obține desfăcând parantezele în stânga și grupând termenii. Însă $\varepsilon^p = \varepsilon^{p \pmod{3}}$ și atunci, utilizând ipoteza, obținem că

$$\prod_{i=1}^n (\varepsilon^{a_i+b_i} + \varepsilon^{b_i+c_i} + \varepsilon^{c_i+a_i}) = f(0) + f(1)\varepsilon + f(2)\varepsilon^2.$$

Dacă $f(0) = f(1) = f(2)$, produsul din stânga este zero, deci există $i \in M$ pentru care $\varepsilon^{a_i+b_i} + \varepsilon^{b_i+c_i} + \varepsilon^{c_i+a_i} = 0$. Aceasta este posibil dacă și numai dacă numerele

$a_i + b_i \pmod{3}$, $b_i + c_i \pmod{3}$ și $c_i + a_i \pmod{3}$ reprezintă o permutare a numerelor $0, 1, 2$ și atunci $3 \mid a_i + b_i + b_i + c_i + c_i + a_i$, deci $3 \mid a_i + b_i + c_i$.

Clasa a XI-a

XI.46. Determinați $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ pentru care $\det(A+B) = 2$ și $\det(A+3B) = 5$.

Cezar Lupu, elev, Constanța

Soluție. Fie A, B ca în enunț și fie $P(X) = \det(A + XB) \in \mathbb{Z}[X]$, polinom de grad n . Din ipoteză, $P(1) = 2$ și $P(3) = 5$. Se știe că, dacă $P \in \mathbb{Z}[X]$ și $a, b \in \mathbb{Z}$ sunt distincte, atunci $P(a) - P(b) : a - b$; în cazul nostru, $P(3) - P(1) : 3 - 1$, deci $3 : 2$, absurd. În concluzie, nu există matrice cu proprietățile dorite.

XI.47. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice cu $a_{ij} = \begin{cases} a, & \text{dacă } i = j \\ b, & \text{dacă } i \neq j \end{cases}$, unde $b \neq 0$ și $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Z}$. Arătați că A este inversabilă și determinați A^{-1} .

Gheorghe Iurea, Iași

Soluție. Adunând toate liniile la prima și apoi scăzând, pe rând, coloana 1 din celelalte coloane, obținem că $\det A = [a + (n-1)b](a-b)^{n-1} \neq 0$, deoarece $a + (n-1)b = 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = 1 - n \in \mathbb{Z}$, iar $a - b = 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = 1 \in \mathbb{Z}$, situații contradictorii. Rezultă că A este inversabilă. Pentru determinarea inversei, fie $A = (a-b)I + bB$, unde I este matricea unitate, iar B matricea având toate elementele egale cu 1. Avem:

$$\begin{aligned} A^2 &= (a-b)^2 I + 2b(a-b)B + b^2 B^2 = \\ &= (a-b)^2 I + 2b(a-b) \cdot \frac{1}{b} [A - (a-b)I] + b^2 \cdot n \cdot \frac{1}{b} [A - (a-b)I] = \\ &= I \cdot \left[(a-b)^2 - 2(a-b)^2 - bn(a-b) \right] + A \cdot [2(a-b) + bn] = \\ &= [2a + b(n-2)] \cdot A - (a-b)[a + b(n-1)] \cdot I \Rightarrow \\ A &= [2a + b(n-2)] \cdot I - (a-b)[a + b(n-1)] \cdot A^{-1} \Rightarrow \\ A^{-1} &= \frac{2a + b(n-2)}{(a-b)(a + bn - b)} \cdot I - \frac{1}{(a-b)(a + bn - b)} \cdot A \end{aligned}$$

XI.48. Se definește șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ prin $x_n = x_{n-1}^2 - [x_{n-1}]$, $\forall n \geq 1$; $x_0 \in [0, (1 + \sqrt{5})/2)$. Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Cătălin Țigăeru, Suceava

Soluție. Dacă $x_0 \in [0, 1)$, atunci $[x_0] = 0$ și se demonstrează ușor prin inducție că $x_n = x_0^{2^n}$; prin urmare, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Dacă $x_0 = 1$, se observă imediat că $x_n = 0$, $\forall n \geq 1$, adică $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ și în acest caz.

Presupunem că $x_0 \in \left(1, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$. Se arată prin inducție că $x_n \in \left(0, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$, $\forall n \geq 1$. În plus, x_n poate lua valorile x_{n-1}^2 , 0 sau $x_{n-1}^2 - 1$, după cum $x_{n-1} \in [0, 1)$, $x_{n-1} = 1$, respectiv $x_{n-1} \in \left(1, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$; în fiecare caz, $x_n - x_{n-1} \leq 0$, deci șirul este descrescător. Rezultă că șirul este convergent și fie l limita sa. Vom demonstra

că există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $[x_{n_0}] = 0$; atunci $x_n = x_{n_0}^{2^{n-n_0}}$, $\forall n \geq n_0$ (prin inducție), de unde concluzia. Să presupunem deci prin absurd că $x_n \in \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. În acest caz, $x_n = x_{n-1}^2 - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și, trecând la limită în această relație, obținem că $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Aceasta contrazice însă faptul că șirul este descrescător, ceea ce încheie demonstrația.

XI.49. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$, $(a_n)_{n \geq 0}$ șiruri de numere reale astfel încât $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, $|x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}| + |x_{n+1} - 3x_n + 2x_{n-1}| \leq a_n$, $\forall n \geq 1$. Să se arate că $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent.

Paul Georgescu și Gabriel Popa, Iași

Soluție. Demonstrăm întâi că, dacă $(z_n)_{n \geq 0}$ și $(a_n)_{n \geq 0}$ sunt șiruri de numere reale cu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, astfel încât $|z_{n+1} - z_n| \leq a_n$, $\forall n \geq 0$, atunci $(z_n)_{n \geq 0}$ este convergent. Într-adevăr, deoarece $|z_n| \leq |z_0| + \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k| \leq |z_0| + \sum_{k=0}^{n-1} a_k$, obținem că $(z_n)_{n \geq 0}$ este mărginit. Apoi, fiindcă $-a_n \leq z_{n+1} - z_n \leq a_n$, $\forall n \geq 0$, atunci $z_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq z_n + \sum_{k=n}^{\infty} a_k$, deci șirul $y_n = z_n + \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ este monoton descrescător și mărginit, adică $(y_n)_{n \geq 0}$ este convergent. Însă șirul $\left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k\right)_{n \geq 0}$ este convergent la 0, deci $(z_n)_{n \geq 0}$ este șir convergent.

Aplicăm acest rezultat șirurilor $z_n^1 = x_{n+1} - x_n$ și $z_n^2 = x_{n+1} - 2x_n$ și rezultă convergența lor; atunci $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent ca diferență de șiruri convergente.

XI.50. Fie $n \in 2\mathbb{N}$, iar $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că $f\left(\frac{nx+y}{n+1}\right) \geq f\left({}^{n+1}\sqrt{x^ny}\right)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Să se arate că funcția este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și crescătoare pe $[0, \infty)$. (În legătură cu Problema 2819 din *Crux Mathematicorum*, nr. 2/2003.)

Titu Zvonaru, București

Soluție. Fie $a, b \in [0, \infty)$ astfel încât $a > b$. Deoarece

$$\frac{nx+y}{n+1} = \frac{x+x+\cdots+x+y}{n+1} \geq {}^{n+1}\sqrt{x^ny}, \quad \forall x, y > 0,$$

încercăm să găsim x, y astfel încât $a = \frac{nx+y}{n+1}$, $b = {}^{n+1}\sqrt{x^ny}$. Prin substituție, x trebuie să fie soluție a ecuației $nx^{n+1} - (n+1)ax^n + b^{n+1} = 0$. Cu notația $g(x) = nx^{n+1} - (n+1)ax^n + b^{n+1}$, avem că g este funcție continuă de x , $g(a) = = b^{n+1} - a^{n+1} < 0$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x) = \infty$, deci ecuația $g(x) = 0$ admite o unică soluție $x_0 > a > 0$; corespunzător găsim pe y_0 . În aceste condiții,

$$f(a) = f\left(\frac{nx_0+y}{n+1}\right) \geq f\left({}^{n+1}\sqrt{x_0^n y_0}\right) = f(b),$$

adică f este crescătoare pe $[0, \infty)$.

Dacă $a, b \in (-\infty, 0]$ cu $a > b$ procedăm asemănător, cu observația că în acest caz $\frac{nx+y}{n+1} \leq \sqrt[n+1]{x^{n+1}y}$, iar radicalul are sens dat fiind faptul că n este par.

Clasa a XII-a

XII.46. Să se determine funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dacă $(\mathbb{R}, *)$ este grup abelian cu proprietatea că simetricul oricărui element $x \in [-1, 1]$ se află în $[-1, 1]$, unde $x * y = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Ioan Săcăleanu, Hârlău

Soluție. Notăm cu e elementul neutru al grupului și cu x' simetricul lui x . Din $x = x * e$, $\forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că $f(x) = x - f(e)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Pentru $x = e$, obținem $f(e) = \frac{e}{2}$, deci $f(x) = x - \frac{e}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Deoarece $x * x' = e$, avem că $f(x) + f(x') = e$, prin urmare $x' = 2e - x$. Pentru $x = 1$, $x' = 2e - 1 \in [-1, 1]$, de unde $e \in [0, 1]$. Dacă $x = -1$, $x' = 2e + 1 \in [-1, 1]$, de unde $e \in [-1, 0]$. Rămâne că $e = 0$, deci $f(x) = x$, funcție care verifică toate condițiile din problemă.

XII.47. Fie $G = (a, b)$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, iar $" \cdot "$ înmulțirea numerelor reale. Să se determine a, b astfel încât $(\mathbb{R}_+^*, \cdot) \cong (G, \cdot)$ printr-un izomorfism de forma $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow G$,

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \text{cu } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}.$$

Alexandru Blaga și Ovidiu Pop, Satu Mare

Soluție. Deoarece (G, \cdot) este grup și 1 este unitatea față de înmulțire, rezultă că $a < 1 < b$ și $f(1) = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = \gamma + \delta$.

Dacă $b \in \mathbb{R}$, fie $x, y \in G$, $1 < x < b$, $1 < y < b$. Cum (G, \cdot) este grup, urmează că $xy < b^2 \leq b$, de unde $b^2 \leq b$ sau $b \in (0, 1)$, ceea ce este în contradicție cu $1 < b$. Rezultă că $b \notin \mathbb{R}$, deci $b = +\infty$.

Deoarece $f'(x) = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma x + \delta)^2}$, funcția f este strict monotonă pe $(0, \infty)$.

Cazul I. f strict crescătoare pe $(0, \infty) \Leftrightarrow \alpha\delta - \beta\gamma > 0$. Este necesar ca $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a$

și $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$, adică $\frac{\beta}{\delta} = a$ și $\gamma = 0$, $\frac{\alpha}{\delta} > 0$. Așadar,

$$f(x) = \frac{\alpha x + a\delta}{\delta} = (1 - a)x + a, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$$

(am utilizat faptul că relația $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ revine la $\alpha = (1 - a)\delta$. Cum pentru $x = y = 2$ în condiția de morfism obținem $f(4) = [f(2)]^2$, rezultă că

$$4 - 3a = (2 - a)^2 \Leftrightarrow a^2 - a = 0 \Leftrightarrow a \in \{0, 1\}.$$

Convine doar $a = 0$. În concluzie, $a = 0$, $b = +\infty$ și $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

Cazul II. f strict descrescătoare pe $(0, \infty) \Leftrightarrow \alpha\delta - \beta\gamma < 0$. Urmăm pas cu pas aceeași cale și obținem $a = 0$, $b = +\infty$ și $f(x) = \frac{1}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

XII.48. Fie (G, \cdot) grup de element neutru e și $x, y \in G$ pentru care avem:

$$a) \exists k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \text{ a. i. } x^k = e; \quad b) \exists p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \text{ a. i. } xy = y^p x.$$

Să se arate că:

$$1) xy^n x^{k-1} = y^{np}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*; \quad 2) xy = yx \Leftrightarrow y^{n(p-1)} = e, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Mihai Haivas, Iași

Soluție. 1) Demonstrăm afirmația prin inducție după n . Pentru $n = 1$, $xyx^{k-1} = y^p x x^{k-1} = y^p x^k = y^p$. Presupunem concluzia adevărată pentru n și să o justificăm pentru $n + 1$; avem:

$$xy^{n+1}x^{k-1} = (xy)(y^n x^{k-1}) = y^p x \cdot y^n x^{k-1} = y^p y^{np} = y^{(n+1)p}.$$

2) Dacă $xy = yx$, atunci $y^p x = yx$, deci $y^p = y$ și prin urmare $y^{p-1} = e$; evident avem și $y^{n(p-1)} = e^n = e$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Reciproc, dacă $y^{n(p-1)} = e$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, în particular $y^{p-1} = e$, deci $xy = y^p x = y^{p-1} \cdot yx = e \cdot yx = yx$, ceea ce încheie rezolvarea.

XII.49. Se consideră numerele reale $b > a \geq 0$, $c \geq 1$ și funcțiile continue $f, g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{na}^{nb} g(x) dx = d \in \mathbb{R}$. Să se arate că șirul $(u_n)_{n \geq 1}$, $u_n = \int_a^b \frac{1}{c + f(x) + g(nx)} dx$ este convergent și să se afle limita sa.

D. M. Bătinețu - Giurgiu, București

Soluție. Din ipotezele problemei, avem că

$$0 \leq \frac{1}{c + f(x)} - \frac{1}{c + f(x) + g(nx)} = \frac{g(nx)}{[c + f(x)][c + f(x) + g(nx)]} \leq g(nx)$$

pentru $x \in [a, b]$ și $n \in \mathbb{N}^*$. Prin integrare, deducem că

$$0 \leq \int_a^b \frac{1}{c + f(x)} - u_n \leq \int_a^b g(nx) dx.$$

Însă

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g(nx) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{an}^{bn} g(t) dt = d \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

prin urmare există limita șirului $(u_n)_{n \geq 1}$, egală cu $\int_a^b \frac{1}{c + f(x)} dx$.

XII.50. Fie $s(n)$ suma cifrelor numărului natural n . Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s(n!)}{\ln^k \ln n}$, unde $k \in \mathbb{N}$ este fixat.

Gabriel Dospinescu, student, București

Soluție. Vom arăta întâi că orice multiplu nenul al lui $A = \underbrace{11 \dots 1}_m$ are suma

cifrelor cel puțin m . Într-adevăr, să presupunem că există B cel mai mic multiplu nenul al lui A cu $s(B) < m$. Cum $s(iA) \geq m$, $\forall i \in \overline{1, 9}$ se impune să avem $B \geq 10A > 10^m$; fie $B = a_r 10^r + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$, unde $r \geq m$. Considerăm numărul $C = B - 10^{r-m} (10^m - 1)$.

Evident că $C < B$ și A divide C . În plus, dacă $a_{r-m} < 9$ atunci $s(C) = s(B)$, iar dacă $a_{r-m} = 9$, atunci $s(C) < s(B)$, prin urmare C este un număr mai mic decât B și având proprietățile acestuia, absurd. Rămâne deci că $s(nA) \geq m$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Acum, deoarece $\underbrace{11 \dots 1}_{[\lg n]} \mid 10^{[\lg n]} - 1$, iar $10^{[\lg n]} - 1 \mid n!$ fiindcă $10^{[\lg n]} - 1 < n$,

aplicând rezultatul demonstrat mai sus urmează că $s(n!) \geq [\lg n]$. Se știe însă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\lg n]}{\ln^k \ln n} = \infty, \text{ prin urmare } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s(n!)}{\ln^k \ln n} = \infty.$$

Soluțiile problemelor pentru pregătirea concursurilor din nr. 1 / 2004

A. Nivel gimnazial

G56. Fie $m \in \mathbb{Z}$, $n \in 2\mathbb{Z} + 1$ fixate. Să se arate că ecuația $nx + y = m$, $x, y \in \mathbb{Z}$ are o unică soluție (x_0, y_0) cu proprietatea că $|y_0| < |n|/2$.

Petru Asaftei, Iași

Soluție. Pentru existența soluției, să observăm că există $q, r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < |n|$ cu $m = nq + r$ (din teorema împărțirii cu rest). Dacă $0 \leq r < \frac{|n|}{2}$, luăm $x_0 = q$, $y_0 = r$.

Dacă $\frac{|n|}{2} < r < n$, luăm $x_0 = q + \operatorname{sgn}(n)$ și $y_0 = r - |n|$; avem evident că

$$nx_0 + y_0 = n(q + \operatorname{sgn}(n)) + r - |n| = nq + |n| + r - |n| = nq + r = m,$$

iar $|y_0| = |n| - r < |n| - \frac{|n|}{2} = \frac{|n|}{2}$.

Pentru demonstrarea unicității, fie încă (x_1, y_1) soluție a ecuației cu $|y_1| < \frac{|n|}{2}$; atunci $n(x_0 - x_1) = y_0 - y_1$, de unde

$$|n| \cdot |x_0 - x_1| = |y_0 - y_1| \leq |y_0| + |y_1| < |n|$$

și cum $|x_0 - x_1| \in \mathbb{N}$, în mod necesar trebuie să avem $|x_0 - x_1| = 0$, adică $x_1 = x_0$ și apoi $y_1 = y_0$.

G57. Un șeic a lăsat moștenire celor doi fii ai săi cinci cămile, cu condiția ca unul să primească jumătate, iar celălalt o treime. Moștenitorii nu și-au putut împărți averea, așa că au apelat la un înțelept care trecea pe acolo, călare pe o cămilă. Cum a procedat înțeleptul?

Câte probleme asemănătoare mai putem formula (în care moștenirea este de n cămile, iar fiii primesc a p -a și a q -a parte)?

Gabriel Popa, Iași

Soluție. Problema este clasică, dar cu 3 fii și 17 cămile. Totul se bazează pe faptul că $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \neq 1$. Înțeleptul așează cămila sa lângă cele cinci lăstate moștenire de șeic. Primul fiu ia $\frac{1}{2}$ din cele 6 cămile, adică 3; al doilea ia $\frac{1}{3}$, adică 2 cămile, iar înțeleptului îi rămâne cămila sa.

Pentru a formula alte asemenea probleme, trebuie să găsim trei numere nenule p, q, n astfel încât p și q să dividă $n + 1$, iar $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{n}{n+1}$. Evident că $p, q \geq 2$, măcar unul cu inegalitate strictă; atunci $\frac{n}{n+1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$, deci $n \leq 5$. Considerând cazurile posibile, obținem că $(n, p, q) \in \{(5, 2, 3); (3, 2, 4)\}$, bineînțeles în ipoteza $p \leq q$. Afară de problema dată, mai putem formula încă una.

Generalizare (Petru Asaftei, Iași). Dacă înțeleptul are r cămile, $r \geq 1$ putem formula o infinitate de probleme. Mai precis, pentru $p, q \geq 2$ numere naturale fixate, $p + q \neq 4$, vom determina $n, r \in \mathbb{N}^*$, $p \nmid n$, $q \nmid n$, astfel încât $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)(n + r) = n$.

Dacă $(p, q) = 1$, atunci $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)(n+r) = n \Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{n}{n+r} \Leftrightarrow \frac{pq-p-q}{pq} = \frac{n}{n+r}$. Deoarece $(pq-p-q, pq) = 1$, avem $r = k(pq-p-q)$, $n+r = pqk \Leftrightarrow n = k(p+q)$, cu $k \in \mathbb{N}^*$, k nefiind multipli de p sau q . Dacă $(p, q) = d > 1$, atunci $\frac{pq-p-q}{pq} = \frac{p_1q_1d^2-p_1d-q_1d}{p_1q_1d^2} = \frac{p_1q_1d-p_1-q_1}{p_1q_1d}$, cu $(p_1, q_1) = 1$. Deoarece $(p_1q_1d-p_1-q_1, p_1q_1d) = 1$, atunci $r = k(p_1q_1d-p_1-q_1)$, $n+r = p_1q_1dk \Leftrightarrow n = k(p_1+q_1)$, cu $k \in \mathbb{N}^*$, k nefiind multiplu de p sau q . Condiția $p+q \neq 4$ exclude cazul $p=q=2$, care ar conduce la $n+r = n \Leftrightarrow r = 0$.

G58. Să se rezolve în \mathbb{N}^2 ecuația $2^x + 1 = 5^y$.

Irina Mustață, elevă, și Valentina Blendea, Iași

Soluție. Dacă x, y sunt ambele pare, $x = 2p$ și $y = 2q$, $p, q \in \mathbb{N}$, atunci $2^x + 1 = 4^p + 1 = (3+1)^p + 1 = \mathcal{M}3 + 2$, iar $5^y = 25^q = (\mathcal{M}3 + 1)^q = \mathcal{M}3 + 1$, deci $2^x + 1 \neq 5^y$. Dacă x, y sunt ambele impare $x = 2p + 1$, $y = 2q + 1$, $p, q \in \mathbb{N}$, atunci $2^x + 1 = 2 \neq 5^y$ pentru $p = 0$ și $2^x + 1 = 2 \cdot 4^p + 1 = \mathcal{M}8 + 1$, $5^y = 5 \cdot 25^q = \mathcal{M}8 + 5$, deci $2^x + 1 \neq 5^y$ și pentru $p \geq 1$. Dacă $x = 2p + 1$, $y = 2q$, $p, q \in \mathbb{N}$, atunci $2^x + 1 = 2 \cdot 4^p + 1 = 2(\mathcal{M}3 + 1) + 1 = \mathcal{M}3$ iar $5^y = \mathcal{M}3 + 1$, deci $2^x + 1 \neq 5^y$. În sfârșit, pentru $x = 2p, y = 2q + 1$, $p, q \in \mathbb{N}$, avem în cazul $p \geq 2$ că $2^x + 1 = 4^p + 1 = \mathcal{M}8 + 1$, iar $5^y = \mathcal{M}8 + 5$, adică $2^x + 1 \neq 5^y$. Dacă $p \leq 1$, prin verificări obținem unica soluție a ecuației (2, 1).

G59. Fie $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid s(2000n) + s(2002n) = 2s(2001n)\}$, unde prin $s(x)$ am notat suma cifrelor lui x . Demonstrați că orice număr natural nenul are un multiplu ce aparține lui A .

Gabriel Dospinescu, student, București

Soluție. Notăm $N(k, p) = \underbrace{11 \dots 100 \dots 0}_p$; atunci pentru orice $p > 3$ și orice $k \in \mathbb{N}$ avem că $2000 \cdot N(k, p) = \underbrace{22 \dots 200 \dots 0}_p$, $2002 \cdot N(k, p) = \underbrace{22244 \dots 422200 \dots 0}_{p-3}$, $2001 \cdot N(k, p) = \underbrace{22233 \dots 311100 \dots 0}_{p-3}$, deci

$$s(2000 \cdot N(k, p)) + s(2002 \cdot N(k, p)) = 2p + 6 + 4(p-3) + 6 = 6p = 2s(2001 \cdot N(k, p)),$$

adică $N(k, p) \in A$. Fie acum $m \in \mathbb{N}^*$ oarecare; considerând numerele 1, 11, 111, ..., conform principiului cutiei rezultă că putem găsi $i < j$ astfel încât m să dividă diferența $\underbrace{11 \dots 1}_j - \underbrace{11 \dots 1}_i$, deci $m \mid N(j-i, i)$ ceea ce încheie soluția.

G60. Să se demonstreze că pentru orice $a, b, c \in (0, \infty)$ are loc

$$\frac{ab}{(a+b)^2} + \frac{bc}{(b+c)^2} + \frac{ca}{(c+a)^2} \leq \frac{1}{4} + \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Gabriel Dospinescu, student, București

Soluție. Să observăm că

$$\begin{aligned} \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} &= \frac{2[(a+b)(b+c)(c+a) - ab(a+b) - bc(b+c) - ca(c+a)]}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \\ &= 2 - \frac{(a^2+bc)(b+c) + (b^2+ac)(a+c) + (c^2+ab)(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \\ &= 2 - \left(\frac{a}{a+b} \frac{c}{b+c} + \frac{a}{a+b} \frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c} \frac{b}{a+b} + \frac{b}{b+c} \frac{a}{a+c} + \frac{c}{c+a} \frac{c}{b+c} + \frac{c}{c+a} \frac{b}{a+b} \right) = \\ &= 2 - \left[\left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \right) \left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} \right) - \frac{ab}{(a+b)^2} - \frac{bc}{(b+c)^2} - \frac{ac}{(a+c)^2} \right]. \end{aligned}$$

Aplicăm inegalitatea mediilor numerelor $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$ și $\frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a}$, a căror sumă este 3; obținem că

$$\left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \right) \left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} \right) \leq \frac{9}{4}.$$

Înlocuind în identitatea demonstrată, obținem concluzia. Egalitatea este atinsă atunci când două dintre numerele a, b, c sunt egale.

G61. Să se demonstreze că pentru orice $a, b, c \in (0, \infty)$ are loc

$$\left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \right)^3 \geq 54\sqrt{2} \frac{\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}{abc} \geq 27 \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}.$$

Marian Tetiva, Bârlad

Soluție. Prima inegalitate se scrie succesiv

$$\begin{aligned} [ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)]^3 &\geq 54\sqrt{2} a^2 b^2 c^2 \sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \Leftrightarrow \\ [a(b^2+c^2) + b(a^2+c^2) + c(a^2+b^2)]^3 &\geq 54\sqrt{2} a^2 b^2 c^2 \sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}. \end{aligned}$$

Pentru a demonstra această inegalitate, vom intercala între cele două cantități pe $27abc(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)$. Faptul că

$$[a(b^2+c^2) + b(a^2+c^2) + c(a^2+b^2)]^3 \geq 27abc(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)$$

rezultă din inegalitatea mediilor aplicată numerelor $a(b^2+c^2)$, $b(a^2+c^2)$ și $c(a^2+b^2)$. Apoi, avem

$$\begin{aligned} 27abc(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) &\geq 54\sqrt{2} a^2 b^2 c^2 \sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \Leftrightarrow \\ (a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) &\geq 8a^2 b^2 c^2, \end{aligned}$$

fapt care rezultă prin înmulțirea membru cu membru a inegalităților $a^2+b^2 \geq 2ab$, $b^2+c^2 \geq 2bc$, $c^2+a^2 \geq 2ac$.

În ce privește a doua inegalitate, ce rezultă prin înmulțirea membru cu membru a inegalităților cunoscute $\sqrt{2(a^2+b^2)} \geq a+b$, $\sqrt{2(b^2+c^2)} \geq b+c$, $\sqrt{2(c^2+a^2)} \geq 2ac$. Egalitatea se atinge pentru $a=b=c$.

G62. Fie $ABCD$ un patrulater convex în care se poate înscrie pătratul $MNPQ$ de centru O ($M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CD)$, $Q \in (AD)$). Să se arate că $AB+BC+CD+DA \geq \sqrt{2}(AO+BO+CO+DO)$. Când are loc egalitatea?

Lucian Tuțescu, Craiova și Ioan Șerdeal, Orăștie

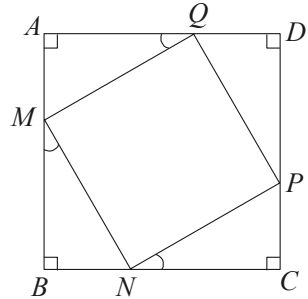
Soluție. Conform inegalității lui Ptolomeu aplicată în patrulaterul $AMOQ$, avem $AQ \cdot MO + AM \cdot OQ \geq AO \cdot MQ$, adică $\frac{a\sqrt{2}}{2} (AQ + AM) \geq a \cdot AO$, unde a este latura pătratului $MNPQ$; prin urmare, $AQ + AM \geq \sqrt{2} \cdot AO$. Scriind celelalte trei inegalități analoge și adunându-le, urmează concluzia. Egalitatea are loc dacă cele patru patrulatere în care s-a aplicat Ptolomeu sunt inscriptibile, fapt care se întâmplă dacă $ABCD$ este dreptunghi. Însă în $ABCD$ trebuie să se poată înscrie pătratul $MNPQ$, deci $ABCD$ este el însuși pătrat.

Justificare: $ABCD$ - dreptunghi, $MNPQ$ - pătrat
 $\Rightarrow ABCD$ - pătrat.

$$\left. \begin{array}{l} m(\widehat{MNB}) + m(\widehat{CNP}) = 90^\circ \\ m(\widehat{MNB}) + m(\widehat{NMB}) = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{BMN} \equiv \widehat{CNP}$$

$$\left. \begin{array}{l} m(\widehat{BMN}) + m(\widehat{AMQ}) = 90^\circ \\ m(\widehat{AMQ}) + m(\widehat{AQM}) = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{BMN} \equiv \widehat{AQM}$$

Considerăm $\triangle NCP$, $\triangle MBN$ și $\triangle QAM$
 $(m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = 90^\circ)$



$$\left. \begin{array}{l} [NP] \equiv [MN] \equiv [MQ] \\ \widehat{CNP} \equiv \widehat{BMN} \equiv \widehat{AQM} \end{array} \right\} \stackrel{IU}{\Rightarrow} \triangle NCP \equiv \triangle MBN \equiv \triangle QAM \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} [BN] \equiv [AM] \\ [NC] \equiv [MB] \end{array} \right\} \Rightarrow [BC] \equiv [AB] \Rightarrow ABCD - \text{pătrat.}$$

G63. În $\triangle ABC$ cu $m(\widehat{A}) = 10^\circ$ și $m(\widehat{B}) = 100^\circ$ construim $M \in (AB)$ și $N \in (AC)$ astfel ca $m(\widehat{MCB}) = 40^\circ$ și $m(\widehat{NBC}) = 75^\circ$. Să se afle $m(\widehat{AMN})$.

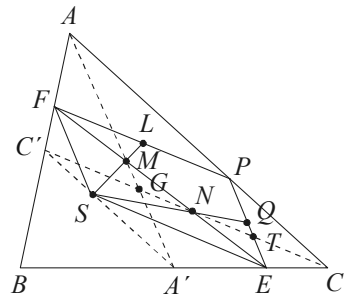
Octavian Bondoc, Pitești

Soluție. Fie $P \in (AC)$ astfel încât $m(\widehat{PBC}) = 40^\circ$. Obținem atunci $\triangle BPC$ isoscel, deci $[BP] \equiv [BC]$, apoi $\triangle MBC$ isoscel cu $[BM] \equiv [BC]$, de unde $[BP] \equiv [BM]$. Însă $m(\widehat{MBP}) = 60^\circ$, deci $\triangle MBP$ este echilateral și $[MP] \equiv [MB]$, iar $m(\widehat{BMP}) = 60^\circ$. Pe de altă parte, tot din congruențe de unghiuri, $\triangle NPB$ este isoscel cu $[NP] \equiv [PB]$, prin urmare $[NP] \equiv [PM]$ și cum $m(\widehat{NPM}) = 50^\circ$, găsim $m(\widehat{NMP}) = 65^\circ$. În final, $m(\widehat{AMN}) = 180^\circ - 65^\circ - 60^\circ = 55^\circ$.

G64. Prin punctul P al laturii (AC) a $\triangle ABC$ se duc paralele la medianele AA' și CC' , care intersectează laturile (BC) și (AB) în E , respectiv F . Fie $\{M\} = EF \cap AA'$, $\{N\} = EF \cap CC'$, iar L și Q mijloacele segmentelor $[FP]$, respectiv $[PE]$. Să se arate că dreptele ML , NQ și $A'C'$ sunt concurente.

Andrei Nedelcu, Iași

Soluție. Fie G centrul de greutate al $\triangle ABC$ și $\{T\} = PE \cap CC'$. Deoarece $TN \parallel PF$, avem $\frac{EN}{NF} = \frac{ET}{TP}$. Însă $\frac{ET}{TP} = \frac{GA'}{GA} = \frac{1}{2}$, de unde $2EN = NF$. Analog se arată că $2MF = ME$, prin urmare $FM = MN = NE$. Fie acum



$FS \parallel AA'$, $S \in A'C'$; atunci $\frac{FS}{AA'} = \frac{C'F}{C'A} = \frac{PC}{AC} = \frac{PE}{AA'}$, deci $FS = PE$, adică $FPES$ este paralelogram. În $\triangle FSP$, M se află pe mediana din F la $\frac{2}{3}$ de vârf, deci M este centrul de greutate al $\triangle FSP$ și atunci SM este mediană și va trece prin L . Analog, $Q \in SN$, de unde concluzia.

G65. Fie $SABCD$ o piramidă cu baza $ABCD$ dreptunghi, M proiecția lui D pe SB și N proiecția lui C pe SA , iar $\{P\} = AM \cap NB$. Știind că $M \in (SB)$ și $N \in (SA)$, să se arate că $NP \cdot SA \cdot MB = SM \cdot AN \cdot PB$.

Daniel Ștefan Ninu, elev, Iași

Soluție. Fie $\{O\} = AC \cap BD$ și $a = OA = OB = OC = OD$. Avem că $NO = MO = a$, ce mediane corespunzătoare ipotenzelor în triunghiuri dreptunghice. Prin urmare, punctele A, B, M, N aparțin sferei de centru O și rază a . Însă cele patru puncte sunt coplanare, iar un plan taie o sferă după un cerc, deci patrulaterul $ABMN$ este inscripabil. Atunci $\triangle NPA \sim \triangle MPB$ și $\triangle NPM \sim \triangle APB$, de unde $\frac{NP}{MP} = \frac{NA}{MB}$, respectiv $\frac{PM}{PB} = \frac{MN}{AB}$, prin urmare $\frac{NP}{MP} \cdot \frac{PM}{PB} = \frac{NM \cdot NA}{MB \cdot AB}$, adică $\frac{MN}{AB} = \frac{MB \cdot NP}{PB \cdot NA}$. Pe de altă parte, $\triangle SMN \sim \triangle SAB$, deci $\frac{MN}{AB} = \frac{SM}{SA}$. Comparând ultimele două relații, rezultă concluzia.

B. Nivel liceal

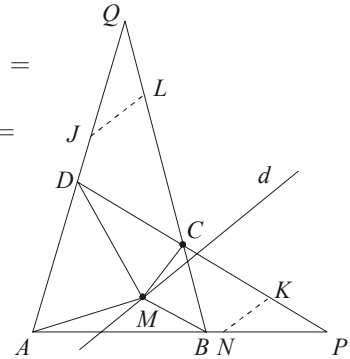
L56. Fie $ABCD$ patrulater convex și $\{P\} = AB \cap CD$, $\{Q\} = AD \cap BC$. Considerăm $J \in (AQ)$, $L \in (BQ)$, $K \in (DP)$, $N \in (AP)$ astfel încât $QJ = AD$, $QL = CB$, $PK = DC$ și $PN = AB$. Să se arate că $JL \parallel NK$.

Carmen Nejnaru, Iași

Soluție. Fie $M \in \text{Int } ABCD$, avem:

$$\begin{aligned} S_{MAD} + S_{MBC} &= \frac{AD \cdot d(M, AD)}{2} + \frac{BC \cdot d(M, BC)}{2} = \\ &= \frac{QJ \cdot d(M, QJ)}{2} + \frac{QL \cdot d(M, QL)}{2} = \\ &= S_{MJQ} + S_{MQL} = S_{QJL} + S_{MJL} \end{aligned}$$

și cum S_{QJL} este constantă, locul geometric al punctelor M pentru care $S_{MAD} + S_{MBC} = k$ este o porțiune dintr-o dreaptă d paralelă cu JL . Analog se arată că locul geometric al punctelor M pentru care $S_{MAB} + S_{MCD} = k'$ este o porțiune dintr-o dreaptă d' paralelă cu NK . Luând $k = k' = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ cele două locuri geometrice coincid, prin urmare $JL \parallel NK$.



Notă. Soluție corectă au dat următorii elevi: **Andrei-Codruț Onofrei, Lucian Rotaru, Cosmin-Alexandru Spînu.**

L57. Fie $\triangle ABC$ înscris în cercul C și punctele $D \in (CB)$, $D' \in (BC)$ astfel încât $\widehat{CAD} \equiv \widehat{ABC}$, $\widehat{BAD'} \equiv \widehat{ACB}$. Se mai consideră cercul C_1 tangent la AD , BD și la

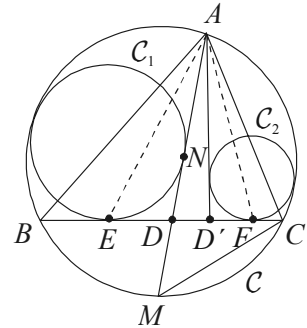
\mathcal{C} , cercul \mathcal{C}_2 tangent la AD' , CD' și la \mathcal{C} , iar $\{E\} = \mathcal{C}_1 \cap [BD]$, $\{F\} = \mathcal{C}_2 \cap [D'C]$. Să se arate că cercul circumscris $\triangle AEF$ și cercul înscris în $\triangle ABC$ sunt concentrice.

Neculai Roman, Mircești (Iași)

Soluție. Fie $\{N\} = AD \cap \mathcal{C}_1$, $\{M_1A\} = AD \cap \mathcal{C}$.
 Avem că $\widehat{CAD} \equiv \widehat{ABC} \equiv \widehat{AMC}$, deci $[AC] \equiv [MC]$.
 Aplicăm teorema lui Casey cercurilor cele A , C , M (degenerate) și \mathcal{C}_1 , tangente interior cercului \mathcal{C} ; obținem succesiv:

$$\begin{aligned} AC \cdot MN + AN \cdot MC &= AM \cdot CE \Leftrightarrow \\ AC \cdot MN + AN \cdot AC &= AM \cdot CE \Leftrightarrow \\ AC(MN + AN) &= AM \cdot CE \Leftrightarrow AC = CE. \end{aligned}$$

Rezultă că $\triangle ACE$ este isoscel, deci mediatoarea lui $[AE]$ este bisectoarea unghiului \widehat{ACB} . Analog se arată că mediatoarea lui $[AF]$ este bisectoarea lui \widehat{ABC} , de unde concluzia.



L58. Pe muchiile $(Ox, Oy$ și Oz ale unui triedru oarecare se consideră punctele $A, L \in (Ox, B, M \in (Oy$ și $C, N \in (Oz$ astfel încât $OA = OB = OC = a$ și $OL = OM = ON = b$ ($a < b$). Notăm $\alpha = m(\widehat{Oy, Oz})$, $\beta = m(\widehat{Oz, Ox})$, $\gamma = m(\widehat{Ox, Oy})$ și $\{P\} = (AMN) \cap (BNL) \cap (CLM)$, $\{Q\} = (LBC) \cap (MCA) \cap (NAB)$. Să se calculeze distanța PQ în funcție de $a, b, \alpha, \beta, \gamma$.

Soluție. Existența punctului P (ca și a lui Q) se arată ușor; într-adevăr, $(AMN) \cap (BNL) = NX$, unde $\{X\} = AM \cap BL$, iar $NX \cap (CLM) = \{P\}$.

Notăm $\vec{OA} = \vec{r}_A$ etc. În planul (AMN) putem scrie

$$\begin{aligned} \vec{AP} &= \lambda \vec{AM} + \mu \vec{AN} \Leftrightarrow \\ \vec{r}_P - \vec{r}_A &= \lambda(\vec{r}_M - \vec{r}_A) + \mu(\vec{r}_N - \vec{r}_A) \Leftrightarrow \\ \vec{r}_P &= (1 - \lambda - \mu)\vec{r}_A + \lambda\vec{r}_M + \mu\vec{r}_N. \end{aligned} \quad (1)$$

Procedând similar în planele (BNL) și (CLM) obținem și relațiile

$$\vec{r}_P = (1 - \lambda' - \mu')\vec{r}_B + \lambda'\vec{r}_N + \mu'\vec{r}_L, \quad \vec{r}_P = (1 - \lambda'' - \mu'')\vec{r}_C + \lambda''\vec{r}_L + \mu''\vec{r}_M. \quad (2)$$

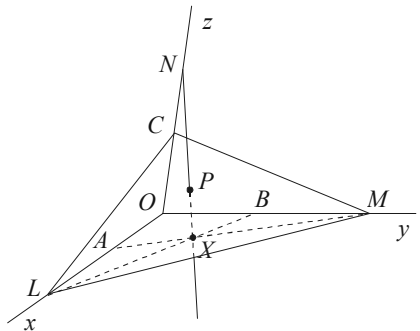
Notând cu $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ versorii pe $(Ox, (Oy$ și $(Oz$, relațiile (1) și (2) se pot scrie

$$\begin{aligned} \vec{r}_P &= (1 - \lambda - \mu)a\vec{u}_1 + \lambda b\vec{u}_2 + \mu b\vec{u}_3 = (1 - \lambda' - \mu')a\vec{u}_2 + \lambda'b\vec{u}_3 + \mu'b\vec{u}_1 = \\ &= (1 - \lambda'' - \mu'')a\vec{u}_3 + \lambda''b\vec{u}_1 + \mu''b\vec{u}_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Motive de simetrie ne sugerează să considerăm $\lambda = \lambda' = \lambda''$ și $\mu = \mu' = \mu''$ și să căutăm λ, μ pentru care au loc egalitățile precedente. Egalând coordonatele corespunzătoare versorilor $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$, obținem sistemul

$$(1 - \lambda - \mu)a = \mu b = \lambda b, \quad \lambda b = (1 - \lambda - \mu)a = \mu b, \quad \mu b = \lambda b = (1 - \lambda - \mu)a$$

Temistocle Bîrsan, Iași



care are soluția unică $\lambda = \mu = \frac{a}{2a+b}$. Ca urmare, relațiile (3) devine

$$\vec{r}_P = \vec{OP} = \frac{ab}{2a+b} (\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3). \quad (4)$$

În mod analog, în privința punctului Q găsim

$$\vec{r}_Q = \vec{OQ} = \frac{ab}{a+2b} (\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3). \quad (5)$$

În sfârșit, avem următoarele

$$\begin{aligned} \vec{PQ} &= \left(\frac{ab}{a+2b} - \frac{ab}{2a+b} \right) (\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3), \\ PQ^2 &= \vec{PQ} \cdot \vec{PQ} = \left(\frac{ab}{a+2b} - \frac{ab}{2a+b} \right)^2 (\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3) (\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3) = \\ &= \frac{a^2 b^2 (a-b)^2}{(a+2b)(2a+b)} (3 + 2 \cos \alpha + 2 \cos \beta + 2 \cos \gamma), \end{aligned}$$

deci

$$PQ = \frac{ab(a-b)}{\sqrt{(a+2b)(2a+b)}} \sqrt{3 + 2(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)}.$$

L59. Care este probabilitatea ca latura și diagonalele unui romb, luat la întâmplare, să fie laturile unui triunghi?

Petru Minuț, Iași

Soluție. Proprietatea de a putea construi un triunghi cu laturile congruente cu latura și diagonalele unui romb este adevărată sau nu pentru toate romburile din plan dintr-o clasă de romburi asemenea. Este suficient să rezolvăm problema pentru romburile a căror laturi au lungimea egală cu 1. Un asemenea romb este determinat de unghiul pe care îl formează diagonala cea mai lungă cu una dintre laturile rombului; notăm măsura acestui unghi cu x . Mulțimea cazurilor posibile este $D = \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$.

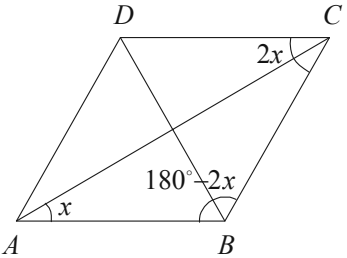
Din triunghiul BCD , conform teoremei cosinusului, avem

$$\begin{aligned} d_1^2 &= BD^2 = BC^2 + DC^2 - 2 BC CD \cos 2x = \\ &= 2 - 2 \cos 2x = 4 \sin^2 x \Rightarrow d_1 = 2 \sin x. \end{aligned}$$

Analog, din $\triangle ABC$, se obține că $d_2 = AC = 2 \cos x$.

Din $0 < x \leq \frac{\pi}{4}$ rezultă că $d_1 = 2 \sin x \leq \sqrt{2}$ și $d_2 = 2 \cos x \geq \sqrt{2}$. Dintre numerele $l = 1$, $d_1 = 2 \sin x$, $d_2 = 2 \cos x$ cel mai mare este d_2 . Putem construi un triunghi cu laturile având aceste lungimi, dacă și numai dacă $l + d_1 > d_2 \Leftrightarrow 1 + 2 \sin x > 2 \cos x$. Notând $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, avem

$$1 + \frac{4t}{1+t^2} > \frac{1-t^2}{1+t^2} \Leftrightarrow 3t^2 + 4t - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(2 \arctg \frac{\sqrt{7}-2}{3}, \frac{\pi}{4} \right].$$



Domeniul valorilor posibile este $D_0 = \left(2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}-2}{3}, \frac{\pi}{4} \right]$. Proprietatea cerută este

$$p = \frac{\operatorname{mes} D_0}{\operatorname{mes} D} = \frac{\frac{\pi}{4} - 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}-2}{3}}{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{8 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}-2}{3}}{\pi}.$$

L60. Fie $A_1 A_2 \dots A_n$ și $B_1 B_2 \dots B_n$ ($n > 2$) două poligoane înscrise în același cerc de centru O și având centrele de greutate tot în O . Să se arate că putem renumera vârfurile poligonului $A_1 A_2 \dots A_n$ pentru a obține un nou poligon $A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_n}$ în care $A_{i_j} \neq B_j$ pentru $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Gabriel Dospinescu, student, București

Soluție. Trebuie să arătăm că există o permutare $\sigma \in S_n$ astfel încât $A_{\sigma(1)} \neq B_i$ pentru $i \in M = \{1, 2, \dots, n\}$. Să definim matricea $T = (t_{ij})_{i,j \in M}$, $t_{ij} = A_i B_j^2$. Vom arăta că sumele elementelor de pe orice linie și coloană în T sunt egale. Putem presupune că poligoanele sunt înscrise în cercul unitate (O fiind originea planului complex) și fie a_i, b_i afixele punctelor A_i, B_i . Suma elementelor de pe linia i în matricea T este

$$\sum_{j=1}^n |a_i - b_j|^2 = \sum_{j=1}^n (|a_i|^2 + |b_j|^2 - a_i \bar{b}_j - \bar{a}_i b_j) = 2n - a_i \sum_{j=1}^n b_j - \bar{a}_i \sum_{j=1}^n b_j = 2n$$

(am folosit faptul că centrul de greutate al poligonului $B_1 B_2 \dots B_n$ este O , deci $\sum_{j=1}^n b_j = 0$).

Analog, suma elementelor de pe coloana j a matricei T este $2n$. Să presupunem că pentru orice permutare $\sigma \in S_n$ există i astfel încât $t_{i\sigma(i)} = 0$. Vom spune: "*coloana R_i place linia S_j* " dacă elementul de la intersecția liniei și coloanei este nenul în matricea T . Rezultă că nu putem asocia câte o linie distinctă fiecărei coloane astfel încât coloanele respective să placă liniile asociate lor. Deci, din lema mariajelor, rezultă că există $k > 0$ și k coloane ce plac cel mult $k-1$ linii. Prin permutări de linii și coloane, putem presupune că aceste linii și coloane sunt primele din matricea T . Să facem suma elementelor dreptunghiului determinat de aceste $k-1$ linii și k coloane. În dreptunghiul determinat de primele k coloane și ultimele $n-k+1$ linii avem numai zerouri (căci cele k coloane nu plac nici una dintre liniile $k, k+1, \dots, n$), deci suma elementelor din dreptunghi este egală cu suma elementelor de pe primele k coloane, adică $2nk$. Pe de altă parte, evident, suma este cel mult cât suma elementelor de pe primele $k-1$ linii, adică $2n(k-1)$. Deducem că $2n(k-1) \geq 2nk$, contradicție.

L61. Fie $n \geq 3$. Să se determine maximul expresiei

$$E = x_1^3 x_2^2 + x_2^3 x_3^2 + \dots + x_n^3 x_1^2 + (n-1)^{2(n-1)} x_1^3 x_2^3 \dots x_n^3,$$

când numerele nenegative x_1, x_2, \dots, x_n au suma 1.

Gabriel Dospinescu, student, București

Soluție. Pentru $x_1 = \frac{3}{5}, x_2 = \frac{2}{5}, x_k = 0, \forall k \in \overline{3, n}$, obținem pentru E valoarea $\frac{108}{3125} = \frac{2^2 3^3}{5^5}$, deci maximul cerut este cel puțin $\frac{108}{3125}$. Să demonstrăm că maximul

lui E este cel mult $\frac{108}{3125}$. Fie $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ cu suma 1, fixate. Permutând ciclic variabilele, putem presupune că $x_1 = \max x_k$. Conform inegalității mediilor, avem

$$1 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_1}{3} + \frac{x_1}{3} + \frac{x_2 + \dots + x_n}{2} + \frac{x_2 + \dots + x_n}{2} \geq 5 \sqrt[5]{\frac{x_1^3 (x_2 + \dots + x_n)^2}{3^3 2^2}},$$

deci este suficient să demonstrăm că

$$x_1^3 (x_2 + \dots + x_n)^2 \geq x_1^3 x_2^2 + \dots + x_n^3 x_1^2 + (n-1)^{2(n-1)} x_1^3 x_2^3 \dots x_n^3. \quad (1)$$

Însă

$$\begin{aligned} x_1^3 (x_2 + \dots + x_n)^2 &\geq 2(x_1^3 x_2 x_3 + \dots + x_1^3 x_{n-1} x_n) + x_1^3 x_2^2 + x_1^3 x_n^2 \geq \\ &\geq (x_1^3 x_2 x_3 + \dots + x_1^3 x_{n-1} x_n) + (x_2^3 x_3^2 + \dots + x_{n-1}^3 x_n^2) + x_1^3 x_2^2 + x_1^3 x_n^2 \geq \\ &\geq x_1^3 x_2 x_3 + x_1^3 x_2^2 + (x_2^3 x_3^2 + \dots + x_{n-1}^3 x_n^2) + x_1^3 x_n^2 \geq \\ &\geq x_1^3 x_2 x_3 + x_1^3 x_2^2 + (x_2^3 x_3^2 + \dots + x_{n-1}^3 x_n^2) + x_n^3 x_1^2, \end{aligned}$$

unde de fiecare dată am folosit faptul că $x_1 = \max x_k$. În aceste condiții, pentru a demonstra (1) este suficient să arătăm că

$$x_1^3 x_2 x_3 \geq (n-1)^{2(n-1)} x_1^3 x_2^3 \dots x_n^3. \quad (2)$$

Pentru $n = 3$, aceasta se scrie $x_2 x_3 \leq \frac{1}{4}$ și rezultă din $x_2 x_3 \leq \left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$, iar pentru $n > 3$, (2) se scrie sub forma

$$x_2^2 x_3^2 x_4^3 \dots x_n^3 \leq \frac{1}{(n-1)^{2(n-1)}}$$

și rezultă din

$$x_2^2 x_3^2 x_4^3 \dots x_n^3 \leq (x_2 x_3 \dots x_n)^2 \leq \left(\frac{x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n-1}\right)^{2(n-1)} \leq \frac{1}{(n-1)^{2(n-1)}}.$$

Rezolvarea este astfel încheiată.

L62. Rezolvați ecuația $2x^2 = y(y+1)$; $x, y \in \mathbb{N}$.

Mircea Bîrsan, Iași

Soluția I. Cazul $y = 2h$, $h \in \mathbb{N}$. Ecuația dată devine $x^2 = h(2h+1)$ și, întrucât $(h, 2h+1) = 1$, urmează că $h, 2h+1$ sunt pătrate perfecte, adică $\exists m, n \in \mathbb{N}$ a.i. $h = n^2$ și $2h+1 = m^2$. De aici rezultă că m și n trebuie să satisfacă ecuația Pell

$$m^2 - 2n^2 = 1, \quad (1)$$

iar soluțiile ecuației inițiale sunt date de

$$x = mn, \quad y = 2n^2. \quad (2)$$

Observăm că (3, 2) este cea mai mică soluție nebanală a ecuației (1) și, după cum este cunoscut, soluțiile ecuației (1) în \mathbb{N} sunt perechile $(m_k, n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ cu

$$m_k = \frac{1}{2} \left[\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^k + \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^k \right], \quad n_k = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^k - \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^k \right]. \quad (3)$$

În conformitate cu (2), soluțiile ecuației date, în cazul y par, sunt perechile $(x_k, y_k)_{k \in \mathbb{N}}$; unde

$$x_k = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^{2k} - \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^{2k} \right], \quad y_k = \frac{1}{4} \left[\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^{2k} + \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^{2k} - 2 \right]. \quad (4)$$

Cazul $y = 2l - 1$, $l \in \mathbb{N}^*$. Urmăm calea din cazul precedent. Ecuația din enunț se scrie $x^2 = l(2l - 1)$. Deoarece $(l, 2l - 1) = 1$, aceste numere sunt de forma $l = \bar{m}^2$, $2l - 1 = \bar{n}^2$. Rezultă că \bar{m} și \bar{n} verifică următoarea ecuație Pell conjugată ecuației (1)

$$2\bar{m}^2 - \bar{n}^2 = 1, \quad (5)$$

iar pentru ecuația dată avem

$$x = \bar{m}\bar{n}, \quad y = 2\bar{m}^2 - 1. \quad (6)$$

Cum $(1, 1)$ este cea mai mică soluție nebanală a ecuației (5), soluțiile acestei ecuații sunt perechile $(\bar{m}_k, \bar{n}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ cu

$$\bar{m}_k = m_k + n_k, \quad \bar{n}_k = m_k + 2n_k,$$

unde $(m_k, n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sunt soluțiile ecuației (1) date de relațiile (3) (**T. Andreescu, D. Andrica** - *Asupra rezolvării în numere naturale a ecuației $ax^2 - by^2 = 1$* , GM - 4/1980, p. 146-148). Ținând seama de (6), ecuația din enunț are, în cazul y impar, soluțiile $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ cu

$$\bar{x}_k = (m_k + n_k)(m_k + 2n_k), \quad \bar{y}_k = 2(m_k + n_k)^2 - 1, \quad (7)$$

unde m_k, n_k sunt date de (3).

În concluzie, mulțimea soluțiilor este formată din $(x_k, y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ și $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ cu $x_k, y_k, \bar{x}_k, \bar{y}_k$ date de (4), (7) și (3).

Soluția II. Observăm că ecuația dată admite soluțiile banale $x = y = 0$ și $x = y = 1$. Căutăm soluțiile (x, y) cu $x, y \notin \{0, 1\}$.

Cazul $y = 2h$, $h \in \mathbb{N}^*$. Ca mai sus, $\exists m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $h = n^2$ și $2h + 1 = m^2$; deci m, n satisfac relația $2n^2 + 1 = m^2$. Rezultă că m este impar și n este par, adică $m = 2k + 1$, $n = 2l$ cu $k, l \in \mathbb{N}^*$. Înlocuind în relația precedentă, obținem $2l^2 = k(k + 1)$. Așadar, dacă (x, y) este o soluție nenulă a ecuației date cu y par, atunci există o altă soluție nenulă (l, k) astfel încât

$$x = 2l(2k + 1), \quad y = 8l^2, \quad \text{și} \quad x > l, \quad y > k. \quad (1)$$

Cazul $y = 2h + 1$, $h \in \mathbb{N}^*$. Procedând asemănător, dar după calcule puțin mai complicate, ajungem la concluzia că pentru orice soluție nebanală (x, y) a ecuației date, cu y impar, există o soluție nenulă (u, v) a acesteia astfel încât

$$x = (4u + 2v + 1)(2u + 2v + 1), \quad y = (4u + 2v + 1)^2 \quad \text{și} \quad x > u, \quad y > v. \quad (2)$$

Rezultă că oricare ar fi o soluție (x, y) a ecuației date diferită de $(0, 0)$ și $(1, 1)$, după un număr finit de pași în care se găsesc, recursiv, soluții mai mici determinate prin relații de tipul (1) sau (2), vom obține soluția $(1, 1)$. Cu alte cuvinte, mulțimea S a soluțiilor este dată de $S = \{(0, 0)\} \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$, unde $S_0 = \{(1, 1)\}$ și $S_{n+1} = \left\{ (2i(2j + 1), 8i^2), \left((4i + 2j + 1)(2i + 2j + 1), (4i + 2j + 1)^2 \right) \mid (i, j) \in S_n \right\}, n \in \mathbb{N}$. Mai observăm că S_m și S_n sunt disjuncte pentru $m \neq n$ și $\text{card}(S_n) = 2^n$.

L63. Fie $G \subset M_n(\mathbb{R})$ un grup netrivial în raport cu produsul uzual al matricelor. Presupunem că există $X \in G$ astfel încât pe fiecare linie, respectiv coloană a sa să existe cel mult un element nenul și acesta egal cu 1. Să se demonstreze că există $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ astfel încât G este izomorf cu un subgrup al lui $GL_k(\mathbb{R})$ (s -a notat $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$).

Ovidiu Munteanu, Brașov

Soluție. Vom spune că o matrice A are proprietatea (P) , dacă pe fiecare linie, respectiv coloană a sa există cel mult un element nenul, și acesta egal cu 1. Cum produsul a două matrici cu proprietatea (P) are proprietatea (P) rezultă că și X^2, X^3, X^4, \dots au proprietatea (P) . Dar, cum există un număr finit de matrici de ordin n cu elemente 0 sau 1 rezultă că mulțimea $\{X, X^2, X^3, \dots\}$ este finită, deci $\exists k, h \geq 1, k > h$, astfel încât $X^k = X^h$. Acum, simplificând în G , vom obține $X^{k-h} = E$, unde E este elementul neutru în G . Avem deci că E are proprietatea (P) și $E^2 = E$. Fie $E = (e_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$; să presupunem că $\exists i, j$ astfel ca $e_{ij} = 1$; rezultă că $1 = \sum_{k=\overline{1,n}} e_{ik}e_{kj}$, deci $\exists s$ astfel ca $e_{is} = e_{sj} = 1$. Dar, pe linia i a lui E nu se află două elemente egale cu 1, deci $s = j$. Totodată, pe coloana j nu se află două elemente egale cu 1, deci $s = i$. Rezultă $i = j$, adică eventualele elemente nenule ale lui E sunt pe diagonala principală. Evident $E \neq O_n$ deoarece G este netrivial. Vom presupune acum că elementele nenule ale lui E sunt $e_{i_1j_1} = 1, \dots, e_{i_rj_r} = 1$. (1)

Fie $A \in G$ oarecare; $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$. Din $A = AE = EA$ rezultă că $a_{ij} = \sum_{k=\overline{1,n}} a_{ik}e_{kj} = \sum_{k=\overline{1,n}} e_{ik}a_{kj}$. Folosind (1) va rezulta că singurele elemente nenule ale lui A pot fi din mulțimea $\{A_{i_sj_t}\}_{s,t=\overline{1,r}}$. Fie aplicația Φ care asociază matricii A matricea $\tilde{A} \in M_r(\mathbb{R})$, $\tilde{A} = (a_{i_sj_t})_{s,t=\overline{1,r}}$. Evident, $\tilde{E} = I_r$ și $\Phi : G \rightarrow M_r(\mathbb{R})$ este morfism injectiv și unitar de monoizi. Întrucât (G, \cdot) este grup și Φ este unitar, rezultă că $\Phi(G) \subset GL_r(\mathbb{R})$. Prin urmare, G este izomorf cu $\Phi(G)$, care este subgrup al lui $GL_r(\mathbb{R})$.

L64. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin: $x_1, x_2 \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+2} = \frac{[x_{n+1}, x_n]}{x_{n+1}}$, $n \geq 1$.

Dacă $x_{2003} = 2004$, demonstrați că șirul nu este convergent.

Iuliana Georgescu și Paul Georgescu, Iași

Soluție. Se observă că $x_n \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \geq 1$. În plus, $x_{n+2} \leq \frac{x_{n+1}x_n}{x_{n+1}} = x_n$, deci $(x_{2n})_{n \geq 1}$ și $(x_{2n-1})_{n \geq 1}$ sunt monoton descrescătoare și, cum sunt șiruri de numere naturale, sunt constante de la un loc încolo, egale cu a , respectiv cu b . Astfel, pentru n suficient de mare, $b = \frac{[a, b]}{a}$, deci $(a, b) = 1$. Să presupunem prin absurd că $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent; atunci $a = b = 1$. Fie i_0 indicele primului termen din șir care este egal cu 1; avem că $i_0 > 1$ deoarece $x_1 \geq x_{2003} > 1$ și fie $x_{i_0-1} = a > 1$. Avem că $x_{i_0+1} = \frac{[1, a]}{1} = a$, $x_{i_0+2} = \frac{[a, 1]}{a} = 1$ și, prin inducție, $x_{i_0+2k+1} = a$, $x_{i_0+2k} = 1, \forall k \geq 0$. Acest fapt intră în contradicție cu convergența șirului, fapt ce încheie rezolvarea.

L65. Fie $n \in \mathbb{N}$ și funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, unde $f(x) = x^{2n} \cos(1/x), \forall x < 0$, $f(0) = 0, f(x) = x^{2n} \sin(1/x), \forall x > 0$, iar $g(x) = x^{2n+1} \sin(1/x), \forall x < 0$,

$g(0) = 0$ și $g(x) = x^{2n+1} \cos(1/x)$, $\forall x > 0$. Să se afle cel mai înalt ordin de derivabilitate al acestor funcții și să se studieze problema continuității acestor derivate în origine.

Gheorghe Costovici, Iași

Soluție. Se arată că f și g sunt derivabile de ordin n , $f^{(n)}$ este discontinuă în origine și $g^{(n)}$ este continuă în origine. Aceste afirmații decurg din următorul rezultat cunoscut (*American Mathematical Monthly*; 54(1947), p.224 și 55(1948), p.97): funcția $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată de $h(0) = 0$ și $h(x) = x^k \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, este derivabilă de m ori dacă $k = 2m$ sau $k = 2m + 1$ și $h^{(m)}$ este discontinuă sau continuă în $x = 0$ după cum $k = 2m$ sau $k = 2m + 1$. Pentru demonstrația acestuia se stabilește prin inducție completă că

$$h^{(r)}(x) = P_r(x) \sin \frac{1}{x} + Q_r(x) \cos \frac{1}{x}, \quad x \neq 0, \quad 0 \leq r \leq m,$$

unde P_r, Q_r sunt funcții polinomiale cu proprietățile:

- 1) sunt de grad $k - 2r$,
- 2) $f^{(r)}(0) = 0$, $0 \leq r \leq m$,
- 3) dacă $k = 2m$, atunci sau P_m sau Q_m are termen liber nenul,
- 4) dacă $k = 2m + 1$, atunci P_m și Q_m au termenii liberi nuli.

Recreații ... matematice

Truelul (răspuns la întrebarea pusă la p.20)

Să examinăm posibilitățile lui X . Prima ar fi ca X să tragă asupra lui Y . Dacă Y este ucis, atunci următoarea lovitură revine lui Z . Dar Z nu mai are decât un singur adversar și, cum Z este trăgător perfect, X va fi un om mort.

O opțiune mai bună este să țintească asupra lui Z . Dacă îl doboară, atunci următoarea lovitură va reveni lui Y . Cum Y nimerește ținta de două ori din trei, există o șansă ca X să tragă la rândul lui asupra lui Y și eventual să câștige truelul.

Exista însă o a treia opțiune pe care o poate adopta X , mai bună decât precedentele: X poate să tragă în aer. Va urma Y , care va ținti asupra lui Z , căci acesta este adversarul cel mai periculos. Dacă Z supraviețuiește, el va trage în Y , fiindcă acesta este adversarul mai periculos. Ca urmare, trăgând în aer, X îi permite lui Y să-l elimine pe Z și invers.

Aceasta este cea mai bună strategie a lui X : în cele din urmă Y sau Z va muri și X va trage asupra supraviețuitorului, oricare ar fi el. X a manevrat astfel încât, în loc de prima lovitură într-un truel, să aibă prima lovitură într-un duel.