PROBLEME ŞI SOLUŢII

Soluţiile problemelor propuse în nr. 1 / 2004

Clasele primare

P.64. *Într-o piesă de teatru sunt* 12 *personaje, copii şi adulţi. Câţi copii joacă în piesă, dacă la fiecare doi adulţi corespunde un copil?*
(*Clasa I*) **Alexandra Radu, elevă, Iaşi**

Soluţie. Formăm grupe de forma (copil, adult, adult) până epuizăm personajele. Putem forma patru grupe de acest fel. Rezultă că în piesă joacă patru copii.

P.65. *Se dau jetoanele* $\boxed{\text{AŢ}}$ $\boxed{\text{II}}$ $\boxed{\text{CRE}}$ $\boxed{\text{ŢII}}$ $\boxed{\text{AŢII}}$ $\boxed{\text{RECR}}$ $\boxed{\text{EA}}$ $\boxed{\text{RE}}$ $\boxed{\text{REC}}$. *Care este numărul cel mai mare de jetoane cu care se poate forma cuvântul "RECREAŢII"?*
(*Clasa I*) **Oxana Pascal, elevă, Rep. Moldova**

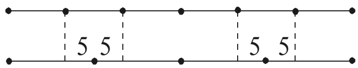
Soluţie. Cuvântul "RECREAŢII" poate fi format astfel: $\boxed{\text{RE}}$ $\boxed{\text{CRE}}$ $\boxed{\text{AŢII}}$, $\boxed{\text{REC}}$ $\boxed{\text{RE}}$ $\boxed{\text{AŢ}}$ $\boxed{\text{II}}$ şi $\boxed{\text{RECR}}$ $\boxed{\text{EA}}$ $\boxed{\text{ŢII}}$. Numărul cel mai mare de jetoane utilizate este patru.

P.66. *Într-o livadă sunt tot atâţia peri cât şi meri. Sunt* 6 *rânduri cu peri şi* 4 *rânduri cu meri. Numărul merilor de pe un rând întrece cu* 5 *numărul perilor de pe un rând. Câţi pomi sunt în acea livadă?*
(*Clasa a II-a*) **Înv. Maria Racu, Iaşi**

Soluţie. Utilizăm metoda figurativă.

Numărul perilor din cele 6 rânduri:

Numărul merilor din cele 4 rânduri:



Din figurarea mărimilor se deduce că un rând de peri are $5+5=10$ pomi. Numărul perilor este $6\cdot 10=60$. Numărul tuturor pomilor din livadă este $60+60=120$.

P.67. *Dintr-o mulţime de* 5 *copii, orice grupare de trei conţine cel puţin o fată. Câţi băieţi pot fi în mulţime?*
(*Clasa a II-a*) **Andreea Surugiu, elevă, Iaşi**

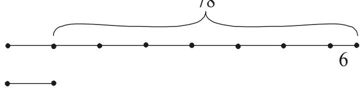
Soluţie. În mulţime nu putem avea mai mult de 2 băieţi, altfel am găsi o grupare de trei în care nu avem cel puţin o fată. În concluzie, putem avea 2 băieţi, 1 băiat sau nici unul.

P.68. *Dacă Ina ar împărţi numărul nucilor culese de ea la numărul nucilor culese de sora sa, ar obţine* 7 *rest* 6. *Ştiind că Ina a cules cu* 78 *nuci mai mult decât sora sa, aflaţi câte nuci a cules fiecare.*
(*Clasa a III-a*) **Înv. Doiniţa Spânu, Iaşi**

Soluţie. Utilizăm metoda figurativă.

Numărul nucilor culese de Ina:

Numărul nucilor culese de sora Inei:



Numărul nucilor culese de sora Inei este $(78-6):6=72:6=12$. Numărul nucilor culese de Ina este $7\cdot 12+6=84+6=90$.

P.69. *Într-o împărţire cu rest, în care împărţitorul este mai mare ca nouă, mărind împărţitorul cu o unitate şi efectuând din nou împărţirea obţinem câtul* 9 *şi restul* 0. *Aflaţi câtul şi restul împărţirii iniţiale.*

(*Clasa a III-a*) **Înv. Mariana Toma, Muncelu de Sus (Iaşi)**

Soluţie. Împărţirea iniţială este $D = I \times C + R$, $R < I$. A doua împărţire este exactă şi avem $D = (I + 1) \times 9$. Rezultă $D = I \times 9 + 9$. Cum $I > 9$ obţinem $C = 9$ şi $R = 9$.

P.70. *Într-o tabără internaţională de matematică sunt elevi din patru ţări: Bulgaria, Grecia, Republica Moldova şi România. Dacă* 21 *elevi nu sunt din Bulgaria,* 23 *nu sunt din Grecia,* 22 *elevi nu sunt din Republica Moldova şi* 21 *elevi nu sunt din România, câţi elevi sunt din fiecare ţară?*

(*Clasa a III-a*) **Georgiana Ciobanu, elevă, Iaşi**

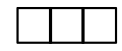
Soluţie. Dacă 21 elevi nu sunt din Bulgaria, înseamnă că sunt din Grecia, Republica Moldova şi România.

Analog, 23 elevi sunt din Bulgaria, Republica Moldova şi România;

22 elevi sunt din Bulgaria, Grecia şi România;

21 elevi sunt din Bulgaria, Grecia şi Republica Moldova.

Triplul elevilor din cele patru ţări este $21 + 23 + 22 + 21 = 87$. Numărul elevilor din cele patru ţări este $87 : 3 = 29$. Rezultă $29 - 21 = 8$ elevi din Bulgaria, $29 - 23$ elevi din Grecia, $29 - 22 = 7$ elevi din Republica Moldova şi $29 - 21 = 8$ elevi din România.

P.71. *Fiecare pătrat din figura alăturată*  *se colorează cu o altă culoare. În câte moduri putem face acest lucru având la dispoziţie patru culori?*

(*Clasa a IV-a*) **Înv. Cătălina Raţă, Coarnele Caprei (Iaşi)**

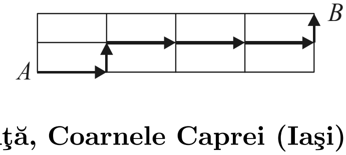
Soluţie. Dacă alegem culorile C_1, C_2, C_3 din cele patru, putem să colorăm pătratele în şase moduri diferite: (C_1, C_2, C_3), (C_1, C_3, C_2), (C_2, C_1, C_3), (C_2, C_3, C_1), (C_3, C_1, C_2), (C_3, C_2, C_1). Cele trei culori pot fi alese în patru moduri diferite: (C_1, C_2, C_3), (C_1, C_2, C_4), (C_1, C_3, C_4) şi (C_2, C_3, C_4). Pentru fiecare alegere avem şase moduri diferite de colorare. În total avem $6 \times 4 = 24$ moduri diferite de colorare.

P.72. *Aruncăm două zaruri şi adunăm punctele de pe cele două feţe de deasupra. a) Câte sume diferite putem obţine? b) Câte sume se pot forma în trei moduri diferite?*

(*Clasa a IV-a*) **Înv. Gheorghe Toma, Muncelu de Sus (Iaşi)**

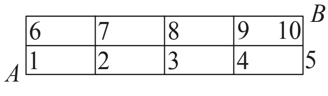
Soluţie. *a*) Suma minimă care se poate forma este $1 + 1 = 2$, iar cea maximă este $6 + 6 = 12$. Toate numerele de la 2 la 12 sunt sume posibile. *b*) Singurele sume care se pot forma în trei moduri diferite sunt: $6 = 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3$, $7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4$ şi $8 = 2 + 6 = 3 + 5 = 4 + 4$. În trei moduri diferite se pot forma trei sume.

P.73. *În figura alăturată este pus în evidenţă un drum format din şase segmente care pleacă din* A *şi ajunge în* B. *Câte drumuri de felul acesta se pot construi?*



(*Clasa a IV-a*) **Înv. Constantin Raţă, Coarnele Caprei (Iaşi)**

Soluţie. Orice drum de acest fel conţine numai două segmente verticale. Numărul drumurilor coincide cu numărul perechilor distincte de segmente ver-



ticale prin care trec drumurile cu şase segmente. Aceste perechi sunt: $(1,10)$, $(1,9)$, $(1,8)$, $(1,7)$, $(1,6)$, $(2,9)$, $(2,8)$, $(2,7)$, $(2,6)$, $(3,8)$, $(3,7)$, $(3,6)$, $(4,7)$, $(4,6)$, $(5,6)$. În total se pot construi 15 drumuri formate din şase segmente.

Clasa a V-a

V.46. *Aflaţi $n \in \mathbb{N}$ pentru care $11^n + 9^n$ şi $11^n - 9^n$ sunt simultan pătrate perfecte.*

Andrei - Sorin Cozma, elev, Iaşi

Soluţie. Dacă n este par, $U(11^n + 9^n) = 1 + 1 = 2$, deci $11^n + 9^n$ nu poate fi pătrat perfect. Dacă n este impar, $U(11^n - 9^n) = U\left(\overline{\ldots 1} - \overline{\ldots 9}\right) = 2$, deci $11^n - 9^n$ nu poate fi pătrat perfect. Rezultă că nu există $n \in \mathbb{N}$ cu proprietăţile dorite.

V.47. *Să se arate că numărul $\overline{51a51a}$ nu poate fi scris ca produsul a patru numere prime.*

Cătălin Budeanu, Iaşi

Soluţie. Avem că $\overline{51a51a} = \overline{51a} \cdot 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{51a}$. Însă $\overline{51a}$ este număr compus, oricare ar fi cifra a în baza 10, de unde concluzia.

V.48. *Se consideră fracţiile $x_1 = \dfrac{9}{14}$, $x_2 = \dfrac{10}{21}$, $x_3 = \dfrac{11}{28}$, $\ldots$. Scrieţi fracţia x_{1000} şi apoi ordonaţi crescător primele 1000 de fracţii.*

Dumitru Gherman, Paşcani

Soluţie. Numărătorii fracţiilor sunt 9, $9+1$, $9+2$, $\ldots$ Numărătorul lui x_{1000} va fi $9+999 = 1008$. Numitorii fracţiilor sunt 14, $14+7$, $14+\dot{2}7$, $\ldots$ Numitorul lui x_{1000} va fi $14 + 999 \cdot 7 = 7007$; deci $x_{1000} = \dfrac{1008}{7007}$. Observăm că $x_1 = \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{2}$; $x_2 = \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{3}$; $x_3 = \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{4}$; $\ldots$; $x_{1000} = \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{1001}$. Atunci $x_{1000} < x_{999} < \cdots < x_3 < x_2 < x_1$.

Observăm că dacă indicelui îi adunăm 8 obţinem numărătorul. Dacă indicelui îi adunăm 1 şi îl înmulţim cu 7 obţinem numitorul, deci $x_{1000} = \dfrac{1000+8}{(1000+1)\cdot 7} = \dfrac{1008}{7007}$.

V.49. *Determinaţi numărul tripletelor $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$ dacă $3a + 2b + c = 598$ şi $a + 2b + 3c = 602$. Dacă în plus $a < b < c$, determinaţi a, b şi c.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Avem că $(a + 2b + 3c) - (3a + 2b + c) = 602 - 598$, deci $c - a = 2$. De aici, $c = a + 2$ şi apoi $b = 298 - 2a$, unde $a \in \{0, 1, 2, \ldots, 149\}$. Prin urmare, există 150 de triplete, având forma $(a, 298 - 2a, a + 2)$. Dacă în plus $a < b < c$, atunci $a < 298 - 2a < a + 2$, de unde $296 < 3a < 298$, deci $a = 99$ şi apoi $b = 100$, $c = 101$.

V.50. *Câte numere de 7 cifre se pot scrie folosind cifrele 1, 2 şi 3, astfel încât 1 să apară de 2 ori, 2 să apară de 3 ori şi 3 să apară de 2 ori? Dar dacă în locul cifrelor 1, 2 şi 3 considerăm cifrele 0, 1 şi respectiv 2?*

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. Dacă prima cifră 1 se găseşte pe primul loc, a doua cifră 1 poate ocupa locurile 2, 3, $\ldots$, 7, deci 6 poziţii. Dacă prima cifră 1 se găseşte pe locul al doilea, a doua cifră 1 poate ocupa locurile 3, 4, $\ldots$, 7, deci 5 poziţii etc. În total, cele 2 cifre 1 pot fi aşezate în $6 + 5 + \cdots + 1 = 21$ moduri. Pentru fiecare poziţionare a cifrelor 1, rămân 5 locuri libere care pot fi ocupate în $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ moduri de cifra 3, rămânând astfel exact trei locuri libere pentru cifrele 2. Folosind regula produsului, obţinem $21 \cdot 10 \cdot 1 = 210$ numere de 7 cifre.

În al doilea caz, cifrele 0 pot fi aşezate în $5+4+3+2+1=15$ moduri, cifrele 2 în $4+3+2+1=10$ moduri, rămânând libere exact trei poziţii pentru 1; obţinem $15 \cdot 10 \cdot 1 = 150$ numere.

Clasa a VI-a

VI.46. *Suma dintre opusul unui număr natural şi inversul altui număr natural este* $-119,992$. *Să se determine numerele.*

Ciprian Baghiu, Iaşi

Soluţie. Fie $n \in \mathbb{N}$ şi $k \in \mathbb{N}^*$ cele două numere, adică $-n + \dfrac{1}{k} = -119,992$. Atunci $k \neq 1$ şi $\dfrac{1}{k} - 0,008 = n - 120$, de unde $\left|\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{125}\right| \in \mathbb{N}$. Însă

$$\left|\frac{1}{k} - \frac{1}{125}\right| \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{125} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{125} < 1,$$

deci $\dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{125}$, adică $n = 120$, $k = 125$.

VI.47. *Aflaţi restul împărţirii numărului* $N = 2844^{2844} + 4107^{4107} + 6398^{6398}$ *prin* 79.

Tamara Culac, Iaşi

Soluţie. Se ştie că $(a+b)^n = \mathcal{M}a + b^n$; atunci $2844^{2844} = \mathcal{M}79$, $4107^{4107} = (4108-1)^{4107} = \mathcal{M}79 - 1$, iar $6398^{6398} = (6399-1)^{6398} = \mathcal{M}79 + 1$. Prin urmare, $N = \mathcal{M}79$, deci restul cerut este 0.

VI.48. a) *Într-o proporţie cu termeni nenuli, un extrem este suma celorlalţi trei termeni dacă şi numai dacă celălalt extrem are inversul egal cu suma inverşilor celorlalţi trei termeni.*

b) *Dacă din patru numere raţionale nenule distincte unul este suma celorlalţi trei, iar altul are inversul egal cu suma inverselor celorlaltor trei, atunci numerele sunt termeni ai unei proporţii.*

Claudiu - Ştefan Popa, Iaşi

Soluţie. a) În condiţiile $a, b, c, d \in \mathbb{Q}^*$, $ad = bc$, avem că $a = b + c + d \Leftrightarrow a - d = b + c \Leftrightarrow \dfrac{a-d}{ad} = \dfrac{b+c}{bc} \Leftrightarrow \dfrac{1}{d} - \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{b} \Leftrightarrow \dfrac{1}{d} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$.

b) Dacă $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ şi $a = b + c + d$, $\dfrac{1}{d} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$, atunci $a - d = b + c \neq 0$ şi $\dfrac{1}{d} - \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$, adică $a - d = b + c \neq 0$ şi $\dfrac{a-d}{ad} = \dfrac{b+c}{bc}$, deci $ad = bc$, i.e. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$.

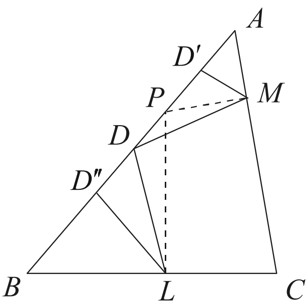
VI.49. *Să se arate că orice număr natural relativ prim cu* 10 *admite un multiplu care se scrie folosind numai cifra* 3.

Lucian - Georges Lăduncă, Iaşi

Soluţie. Fie $n \in \mathbb{N}$ cu $(n, 10) = 1$. Considerăm numerele 3, 33, 333, $\ldots$, $\underbrace{33\ldots3}_{n+1}$; există printre acestea măcar două care dau acelaşi rest la împărţirea prin n, conform principiului cutiei. Evident că n divide diferenţa acestor numere, iar această diferenţă este de forma $\overline{33\ldots3} \cdot 10^k$. Deoarece $\left(n, 10^k\right) = 1$, urmează că $n \mid \overline{33\ldots3}$.

VI.50. *Fie $\triangle ABC$ cu $[AC] \equiv [BC]$, D mijlocul lui $[AB]$, P un punct pe dreapta AB, iar M şi L picioarele perpendicularelor din P pe AC, respectiv BC. Să se arate că $[DM] \equiv [DL]$.*

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)



Soluţie. Deosebim trei cazuri, după cum $P \in [AB]$, $P \in [BA \setminus [AB]$ sau $P \in [AB \setminus [AB]$. Vom trata numai prima situaţie, celelalte rezolvându-se asemănător. Ne situăm cu $P \in [DA]$, ca în figură şi fie D', D'' mijloacele segmentelor $[PA]$, respectiv $[PB]$; demonstrăm că $\triangle DD'M \equiv \triangle LD''D$. Avem că $DD' = \frac{1}{2}(AB - PA) = \frac{1}{2}PB = D''L$, iar $DD'' = \frac{1}{2}(AB - PB) = \frac{1}{2}PA = D'M$. În plus, $m(\widehat{DD'M}) = 2\,m(\widehat{BAC}) = 2\,m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{LD''D})$ şi atunci congruenţa de triunghiuri anunţată urmează conform LUL. Rezultă că $[DM] \equiv [DL]$.

Clasa a VII-a

VII.46. *Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţiile:*

a) $x^{100} + x^{77} + x^{50} + x^{21} + x^{10} + x^5 + 1 > 0$;

b) $x^{100} - x^{77} + x^{50} - x^{21} + x^{10} - x^5 + 2 < 0$.

Vasile Solcanu, Bogdăneşti (Suceava)

Soluţie. *a)* Fie $E(x) = x^{100} + x^{77} + x^{50} + x^{21} + x^{10} + x^5 + 1$. Dacă $x \geq 0$, evident că $E(x) > 0$. Pentru $x \in (-1, 0)$, avem $x^{2k} > 0$ şi $x^{2k+1} + 1 > 0$, deci $E(x) = x^{100} + x^{50}\left(x^{27} + 1\right) + x^{10}\left(x^{11} + 1\right) + x^5 + 1 > 0$. Dacă $x = -1$, atunci $E(-1) = 1 > 0$. În sfârşit, dacă $x \in (-\infty, -1)$, atunci $x^{2k+1} + 1 < 0$, $x^{2k+1} < 0$, deci $E(x) = x^{77}\left(x^{23} + 1\right) + x^{21}\left(x^{29} + 1\right) + x^5\left(x^5 + 1\right) + 1 > 0$. În concluzie, $E(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Dacă $F(x) = x^{100} - x^{77} + x^{50} - x^{21} + x^{10} - x^5 + 2$, atunci $F(x) = E(-x) + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci inecuaţia dată nu are soluţie în $\mathbb{R}$.

VII.47. *Să se rezolve în $\mathbb{Z}^2$ ecuaţia $u^2v + uv^2 = 2u^2 + 2v^2 - 40$.*

Mihai Crăciun, Paşcani

Soluţie. Ecuaţia se scrie echivalent $uv(u+v) = 2(u+v)^2 - 4uv - 40 \Leftrightarrow uv(u+v+4) = 2\left[(u+v)^2 - 16\right] - 8 \Leftrightarrow (u+v+4)(uv - 2u - 2v + 8) = -8$, iar $uv - 2u - 2v + 8 = (u-2)(v-2) + 4$. Considerând toate cazurile posibile, găsim în final soluţiile $(u, v) \in \{(2, -8), (-8, 2)\}$.

VII.48. *Dacă $a_i = i + \sqrt{i}$, $\forall i = \overline{1, 2004}$, precizaţi dacă numărul*

$$N = a_1 - a_2 - a_3 + a_4 + a_5 - a_6 - a_7 + a_8 + \cdots + a_{2001} - a_{2002} - a_{2003} + a_{2004}$$

este negativ, pozitiv sau nul.

Viorel Cornea şi Dan Ştefan Marinescu, Hunedoara

Soluţie. Avem că $N = N_1 + N_2$, unde

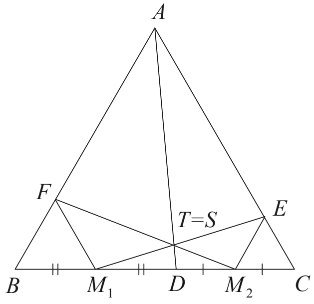
$$N_1 = (1 - 2 - 3 + 4) + (5 - 6 - 7 + 8) + \cdots + (2001 - 2002 - 2003 + 2004), \quad \text{iar}$$

$$N_2 = \left(\sqrt{1} - \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4}\right) + \left(\sqrt{5} - \sqrt{6} - \sqrt{7} + \sqrt{8}\right) + \cdots + \left(\sqrt{2001} - \sqrt{2002} - \sqrt{2003} + \sqrt{2004}\right).$$

Evident că $N_1 = 0$ şi cum vom arăta că fiecare paranteză din scrierea lui N_2 este negativă, va rezulta că $N < 0$. Pentru a demonstra că $\sqrt{p} + \sqrt{p+3} < \sqrt{p+1} + \sqrt{p+2}$, $\forall p \geq 1$, este suficient să ridicăm la pătrat în ambii membri, obţinând după reduceri $p^2 + 3p < p^2 + 3p + 2$, fapt adevărat.

VII.49. *Fie $\triangle ABC$ echilateral şi $D \in (BC)$. Notăm cu M_1, M_2 mijloacele segmentelor $[BD]$, respectiv $[CD]$. Paralela prin M_1 la AC intersectează AB în F, iar paralela prin M_2 la AB intersectează AC în E. Să se arate că dreptele AD, M_1E şi M_2F sunt concurente.*

Nicolae Gross şi Lucian Tuţescu, Craiova



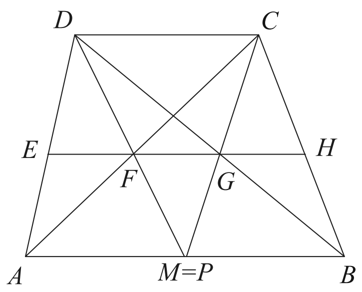
Soluţie. Deoarece $\triangle BFM_1$ şi $\triangle CEM_2$ sunt echilaterale, avem $BM_1 = BF = FM_1$, $CE = CM_2 = EM_2$, $AF = CM_1$ şi $AE = BM_2$. Fie $\{S\} = AD \cap EM_1$, $\{T\} = AD \cap FM_2$. Aplicând teorema lui Menelaus în $\triangle ABC$ cu transversala $M_1 - S - E$ şi în $\triangle ABD$ cu transversala $F - T - M_2$, obţinem

$$\frac{M_1D}{M_1C} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AS}{SD} = 1 = \frac{M_2D}{M_2B} \cdot \frac{BF}{FA} \cdot \frac{AT}{TD},$$

de unde $\dfrac{AS}{SD} = \dfrac{AT}{TD}$, adică $S = T$.

VII. 50. *Fie $ABCD$ un trapez cu bazele $[AB]$ şi $[CD]$. O paralelă la baze intersectează AD, AC, BD şi BC în punctele E, F, G şi respectiv H. Să se arate că $EH = 3FG$ dacă şi numai dacă DF, CG şi AB sunt drepte concurente.*

Adrian Zanoschi, Iaşi



Soluţie. Aplicăm teorema fundamentală a asemănării în $\triangle ADC$ şi în $\triangle BDC$, obţinem că $\dfrac{EF}{DC} = \dfrac{AE}{AD}$ şi $\dfrac{GH}{DC} = \dfrac{BH}{BC}$ de unde, având în vedere că $\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{BH}{BC}$, rezultă că $EF = GH = u$. Notăm încă $v = FG$ şi să presupunem că $EH = 3FG$; atunci $2u + v = 3v$, adică $u = v$. Astfel, în $\triangle DEG$ avem DF mediană şi $AB \parallel EG$, deci DF intersectează AB în mijlocul M al segmentului $[AB]$. Analog rezultă că CG intersectează AB în M, de unde urmează că DF, CG şi AB sunt concurente. Reciproc, dacă cele trei drepte sunt concurente în P, notăm $AP = a$, $PB = b$ şi obţinem că $\dfrac{u}{v} = \dfrac{a}{b}$ şi $\dfrac{v}{u} = \dfrac{a}{b}$, de unde $u = v$, adică $EH = 2u + v = 3v = 3FG$.

Clasa a VIII-a

VIII.46. *Să se demonstreze că nu există $m, n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $\dfrac{m}{n} + \dfrac{n}{m} = 2003$.*

Alexandru Negrescu, elev, Botoşani

Soluţie. Relaţia dată se scrie $t^2 - 2003t + 1 = 0$, unde $t = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. În aceste condiţii, discriminantul ecuaţiei în t trebuie să fie pătratul unui număr raţional, chiar pătrat perfect. Însă $\Delta = 2003^2 - 4 = 2001 \cdot 2005$ nu este pătrat perfect.

Notă. Se poate arăta că relaţia $\dfrac{m}{n}+\dfrac{n}{m}\in\mathbb{N}^*$ implică $\dfrac{m}{n}+\dfrac{n}{m}=2$.

VIII.47. *Pentru $\forall x\in(0,\infty)$, să se demonstreze inegalitatea*

$$\frac{\left(x^5+x^3+x^2+1\right)\left(x^3+x^2+2\right)+\left(x^4+x^3+x+1\right)\left(x^3+x+2\right)+\left(x^3+x^2+x+1\right)\left(x^2+x+2\right)}{x^6+x^5+x^4+2x^3+x^2+x+1}\geq 6.$$

Mircea Coşbuc, elev, Iaşi

Soluţie. Cu notaţiile $a=x+1$, $b=x^2+1$, $c=x^3+1$, inegalitatea se scrie succesiv

$$\frac{ac\,(a+c)+bc\,(b+c)+ab\,(a+b)}{abc}\geq 6\Leftrightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 6.$$

Ultima inegalitate rezultă din cunoscutele $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geq 2$ şi analoagele.

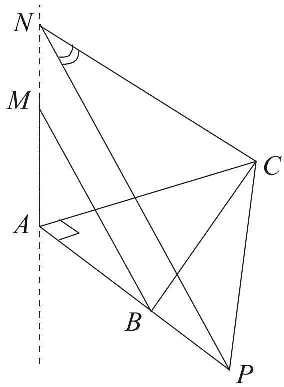
VIII.48. *Găsiţi numerele prime p şi q pentru care $p^2+q=37q^2+p$.*

Liviu Smarandache, Craiova

Soluţie. Evident $p\neq q$ şi scriem ipoteza sub forma $p\,(p-1)=q\,(37q-1)$, unde $(p,q)=1$. Urmează că $37q-1=tp$, $t\in\mathbb{N}^*$, deci $p\,(p-1)=qtp$, adică $p=qt+1$ şi înlocuind în ipoteză găsim că $qt^2+t=37q-1$. De aici, $q\left(37-t^2\right)=t+1\geq 2$, deci $37-t^2\geq 0$, prin urmare $t\in\{1,2,3,4,5,6\}$. După încercări, singurul caz favorabil rămâne $t=6$, când $q=7$, $p=43$.

VIII.49. *Fie $\triangle ABC$ dreptunghic în A cu $AB=AC=a$. Considerăm $MA\perp(ABC)$, $MA=a\sqrt{2}$ şi $N\in AM$ astfel încât $m(\widehat{CN,BM})=60^\circ$. Să se afle lungimea segmentului $[AN]$.*

Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă, Blaj



Soluţie. Fie N de aceeaşi parte a planului (ABC) ca şi M; notăm $AN=x$. Construim $d\parallel MB$, cu $N\in d$; evident că $NP\subset(AMB)$ şi fie $\{P\}=AB\cap d$. Din $\triangle ABM\sim\triangle APN$, obţinem $AP=\dfrac{x\sqrt{2}}{2}$, $NP=\dfrac{x\sqrt{6}}{2}$. Cu teorema lui Pitagora în $\triangle APC$ şi $\triangle NAC$, găsim $PC=\sqrt{a^2+\dfrac{x^2}{2}}$, $NC=\sqrt{a^2+x^2}$. Deoarece $m(\widehat{PNC})=$ $=m(\widehat{CN,BM})=60^\circ$, teorema cosinusului în $\triangle NPC$ duce la o ecuaţie în x, cu soluţia admisibilă $x=\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. Analog se tratează cazul când N se află de cealaltă parte a planului (ABC), obţinând acelaşi rezultat.

VIII.50. *Fie patrulaterul convex $ABCD$ cu $AB=BC$, $m(\widehat{A})=m(\widehat{C})=90^\circ$, $m(\widehat{B})\leq 90^\circ$ şi fie O mijlocul lui $[BD]$. Pe perpendiculara în O pe planul (ABC) se ia un punct V astfel încât $OV=OB$. Să se arate că $d\,(D,(VAB))=2\,d\,(D,(VAC))$ dacă şi numai dacă $m(\widehat{ABC})=60^\circ$.*

Monica Nedelcu, Iaşi

Soluţie. Observăm că $ABCD$ este patrulater înscris în cercul de diametru $[BD]$ şi fie $r=OA=OB=OC=OD=OV$. Notăm $\{P\}=AC\cap BD$ şi $x=OP$; evident că $AP=PC$ şi $AP\perp BD$. Calculând în două moduri volumul tetraedrului

$VABD$, obţinem că $h_1 = d\left(D, (VAB)\right) = VO \cdot \dfrac{S_{ABD}}{S_{VAB}} = \dfrac{2r\sqrt{5}}{5}$.

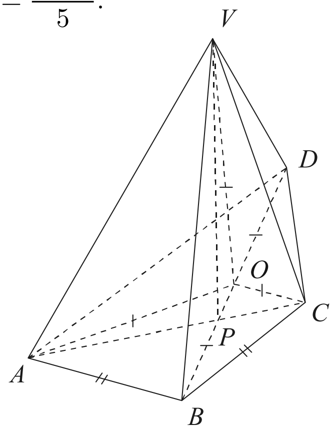
Deoarece $VP \perp AC$, $VP = \sqrt{r^2 + x^2}$ şi $AC = 2\sqrt{r^2 - x^2}$, calculând în două moduri volumul lui $VDAC$, găsim

$$h_2 = d\left(D, (VAC)\right) = \frac{VO \cdot S_{DAC}}{S_{VAC}} = \frac{2r\left(r - x\right)}{\sqrt{r^2 + x^2}}.$$

Atunci $h_1 = 2h \Leftrightarrow \sqrt{5}\left(r - x\right) = \sqrt{r^2 + x^2} \Leftrightarrow$ $2x^2 - 5rx + 2r^2 = 0$ şi $x \in [0, r] \Leftrightarrow x = \dfrac{r}{2} \Leftrightarrow BP = \dfrac{3r}{2}$ şi

$$AP = \frac{r\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \widehat{ABD} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$$

$$m(\widehat{ABD}) = 30^\circ \Leftrightarrow m(\widehat{ABC}) = 60^\circ.$$



Clasa a IX-a

IX.46. *Să se rezolve ecuaţia* $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} - \sqrt[2n]{x-2} = 2$, *unde* $n \in \mathbb{N}^*$.

Dan Popescu, Suceava

Soluţie. Din condiţiile de existenţă a radicalilor obţinem $x \in [2, 3]$, de unde $t = \sqrt[2n]{x-2} \in [0, 1]$. Ecuaţia se scrie atunci $\sqrt{t^{2n} + 1} + \sqrt{1 - t^{2n}} = 2 + t$. Însă $\sqrt{a} + \sqrt{b} \le \sqrt{2} \cdot \sqrt{a + b}$, deci $2 + t \le \sqrt{2} \cdot \sqrt{t^{2n} + 1 + 1 - t^{2n}} = 2$, adică $t = 0$. În consecinţă, singura soluţie a ecuaţiei este $x = 2$.

IX.47. *Să se determine şirul* $\left(a_n\right)_{n \ge 1}$ *de numere strict pozitive pentru care*

$$a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - \cdots + \left(-1\right)^{n-1} a_n^2 = \left(-1\right)^{n-1}\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right), \quad \forall n \ge 1.$$

Marian Ursărescu, Roman

Soluţie. Pentru $n = 1$, obţinem $a_1^2 = a_1$, adică $a_1 = 1$. Pentru $n = 2$, obţinem $a_1^2 - a_2^2 = -a_1 - a_2$, deci $a_2^2 - a_2 - 2 = 0$ şi, cum $a_2 > 0$, găsim $a_2 = 2$. Intuim că $a_n = n$, $\forall n \ge 1$, fapt care se demonstrează prin inducţie matematică. Presupunem că $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $\ldots$, $a_k = k$, avem că

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + \left(-1\right)^{k-1} k^2 + \left(-1\right)^k a_{k+1}^2 = \left(-1\right)^k \left(1 + 2 + \cdots + k\right) + \left(-1\right)^k a_{k+1},$$

de unde, după calcule, folosind faptul că $\sum\limits_{i=1}^{k} \left(-1\right)^{i-1} i^2 = \left(-1\right)^{k-1} \dfrac{k\left(k+1\right)}{2}$, iar $\sum\limits_{i=1}^{k} i = \dfrac{k\left(k+1\right)}{2}$, obţinem că $a_{k+1}^2 - a_{k+1} - k\left(k+1\right) = 0$. Unica soluţie pozitivă a acestei ecuaţii de grad II este $a_{k+1} = k + 1$, ceea ce încheie demonstraţia.

IX.48. *Fie* $a, b, c \in (0, \infty)$ *cu* $a + b + c + \sqrt{abc} = 4$. *Să se arate că*

$$\frac{a^2}{a + \sqrt{bc}} + \frac{b^2}{b + \sqrt{ca}} + \frac{c^2}{c + \sqrt{ab}} \ge \frac{3}{2}.$$

Cezar Lupu, elev, Constanţa

Soluţie. Conform inegalităţii mediilor, $4 = a + b + c + \sqrt{abc} \geq 4\sqrt[4]{abc\sqrt{abc}}$, de unde $abc \leq 1$, prin urmare $a + b + c \geq 3$. Folosind acum inegalitatea Cauchy - Schwartz şi cunoscuta $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ac)$, avem:

$$\left[(a+\sqrt{bc})+(b+\sqrt{ca})+(c+\sqrt{ab})\right]\left[\frac{a^2}{a+\sqrt{bc}}+\frac{b^2}{b+\sqrt{ca}}+\frac{c^2}{c+\sqrt{ab}}\right] \geq (a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow \sum \frac{a^2}{a+\sqrt{bc}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{\sum a + \sum \sqrt{bc}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)} \geq \frac{3}{2}\,.$$

IX.49. *Să se arate că $\triangle ABC$ este isoscel în fiecare din ipotezele:*
a) $2m_a + b = 2m_b + a$; *b)* $2m_a + a = 2m_b + b$.

Marius Pachiţariu, elev, Iaşi

Soluţie. Folosind torema medianei, avem că

$$4\left(m_a^2 - m_b^2\right) = \left[2\left(b^2+c^2\right) - a^2\right] - \left[2\left(a^2+c^2\right) - b^2\right] = 3\left(b^2 - a^2\right).$$

În ipoteza *a*), obţinem că $(a-b)\left[2m_a + 2m_b + 3(a+b)\right] = 0$ şi, cum paranteza pătrată ia valori strict pozitive, rămâne că $a = b$. În ipoteza *b*), găsim $(a-b)\left[2m_a + 2m_b - 3(a+b)\right] = 0$. Însă $2m_a < b + c$, $2m_b < a + c$, deci $2(m_a + m_b) < a + b + 2c$. În plus, $c < a + b$, prin urmare $2(m_a + m_b) < 3(a+b)$, adică paranteza pătrată ia valori strict negative şi din nou $a = b$.

IX.50. *Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ascuţitunghic ABC. Dacă A, B, C sunt măsurile în radiani ale unghiurilor triunghiului, iar $A \cdot \overrightarrow{IA} + B \cdot \overrightarrow{IB} + C \cdot \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$, să se arate că $\triangle ABC$ este echilateral.*

Constantin Micu, Melineşti (Dolj)

Soluţie. Deoarece $a\,\overrightarrow{IA} + b\,\overrightarrow{IB} + c\,\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$, relaţia din ipoteză arată că $\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}$. Pe de altă parte, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, prin urmare $\frac{\sin A}{A} = \frac{\sin B}{B} = \frac{\sin C}{C}$. Considerăm funcţia $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; vom demonstra că f este strict descrescătoare. Fie $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $x < y$; avem:

$$f(y) - f(x) = \frac{\sin y}{y} - \frac{\sin x}{x} = \frac{x(\sin y - \sin x) - (y-x)\sin x}{xy} =$$

$$= \frac{2x \sin\frac{y-x}{2}\cos\frac{x+y}{2} - (y-x)\sin x}{xy} <$$

$$< \frac{2x\,\frac{y-x}{2}\cos x - (y-x)\sin x}{xy} = \frac{(y-x)(x - \operatorname{tg} x)\cos x}{xy} < 0.$$

(Am folosit faptul că $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, apoi că $\frac{x+y}{2} > x \Rightarrow \cos\frac{x+y}{2} < \cos x$, deoarece funcţia cosinus este descrescătoare pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.) Urmează că f este injectivă şi atunci faptul că $f(A) = f(B) = f(C)$ conduce la $A = B = C$, deci $\triangle ABC$ este echilateral.

Clasa a X-a

X.46. *Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia* $2^{x-1} + 2^{x^2-1} = \dfrac{y^2+ay+a^2}{y^2+a^2}$ *să aibă soluţii în $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.*

Petru Răducanu, Iaşi

Soluţie. Observăm că pentru orice $a \in \mathbb{R}$ ecuaţia dată are soluţii în $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ (de exemplu, perechea $(0,0)$ pentru $a \neq 0$ şi perechile $(0,y)$, $y \in \mathbb{Z}^*$, pentru $a=0$).

X.47. *Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ distincte, cu $z_2+z_3=2$ şi astfel încât $|z_1-1| = |z_2-1| = |z_3-1|$. Să se arate că $(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_3)$ este număr complex pur imaginar.*

Lidia Nicola, Craiova

Soluţia I. Să observăm întâi că $(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_3) \neq 0$, dat fiind faptul că z_1, z_2, z_3 sunt distincte. Atunci faptul că $(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_3)$ este pur imaginar este succesiv echivalent cu:

$$(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_3)+(\bar{z}_1-\bar{z}_2)(z_1-z_3)=0 \Leftrightarrow$$
$$(z_1-z_2)\left[(\bar{z}_1-\bar{z}_2)+(\bar{z}_2-\bar{z}_3)\right]+\left[(\bar{z}_1-\bar{z}_3)+(\bar{z}_3-\bar{z}_2)\right](z_1-z_3)=0 \Leftrightarrow$$
$$(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)+(\bar{z}_1-\bar{z}_3)(z_1-z_3)=z_2\bar{z}_2-z_2\bar{z}_3-\bar{z}_2z_3+z_3\bar{z}_3 \Leftrightarrow$$
$$|z_1-z_2|^2+|z_1-z_3|^2=|z_2-z_3|^2. \tag{1}$$

Fie A_1, A_2, A_3, C punctele de afixe z_1, z_2, z_3 şi respectiv 1. Deoarece $z_2+z_3=2$ implică $(z_2-1)+(z_3-1)=0 \Rightarrow \overrightarrow{CA_2}+\overrightarrow{CA_3}=\overrightarrow{0}$, rezultă că $[A_2A_3]$ este diametru şi, deci $\triangle A_1A_2A_3$ este dreptunghic în A_1. Atunci $A_1A_2{}^2+A_1A_3{}^2=A_2A_3{}^2$, adică tocmai relaţia de demonstrat scrisă sub forma (1).

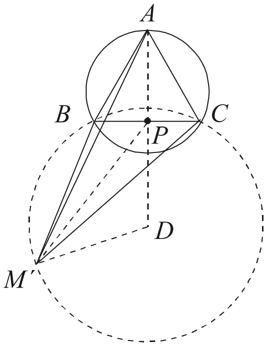
Soluţia a II-a (prof. **Dumitru Găleată**, Iaşi; **Diana Timofte**, elevă, Iaşi). Din condiţia $z_2+z_3=2$ rezultă că $z_3=2-z_2$ şi, deci, $|z_3-1| = = |2-z_2-1| = |z_2-1|$; aşadar, egalitatea a 2-a din condiţie este superfluă. Notând $z_k=a_k+ib_k$, $k=\overline{1,3}$, din $z_2+z_3=2$ deducem că $a_2+a_3=2$ şi $b_2+b_3=0$, iar din $|z_1-1|=|z_2-1|$ obţinem $a_1^2-2a_1+1+b_1^2 = = a_2^2-2a_2+1+b_2^2$. Ţinând seama de aceste relaţii, prin calcul direct, se arată că $\mathrm{Re}\,(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_3)=0$.

X.48. *Se consideră planele paralele α şi β aflate la distanţa h unul de celălalt şi $\triangle ABC$ echilateral inclus în planul β.*

a) Să se afle locul geometric al punctelor $M \in \alpha$ pentru care $MA^2+h^2=MB^2+MC^2$.

b) Să se determine $M \in \alpha$ astfel încât suma MA^2+ $+MB^2+MC^2$ să fie minimă.

Viorel Cornea şi
Dan Ştefan Marinescu, Hunedoara



Soluţie. *a*) Fie $M'=\mathrm{Pr}_\beta\, M$; atunci $MA^2=h^2+M'A^2$ şi analoagele, deci relaţia care caracterizează pe M devine $M'A^2=M'B^2+M'C^2$. Fie D simetricul lui A faţă de BC şi fie a latura $\triangle ABC$. Aplicând teorema medianei în $\triangle M'AD$ şi în $\triangle M'BC$, obţinem

$$4M'P^2=2\left(M'A^2+M'D^2\right)-AD^2=2\left(M'B^2+M'C^2\right)-BC^2,$$

de unde, după calcule, $M'D^2=a^2$. Atunci locul punctului M' este inclus în cercul de centru D şi rază a. Se arată uşor că orice punct de pe acest cerc aparţine locului lui M'. Rezultă că locul lui M este proiecţia locului lui M' pe planul α.

b) Dacă T este punctul lui Torricelli al $\triangle ABC$, avem:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = h^2 + M'A^2 + h^2 + M'B^2 + h^2 + M'C^2 \geq$$
$$\geq 3h^2 + \frac{(M'A + M'B + M'C)^2}{3} \geq 3h^2 + \frac{(TA + TB + TC)^2}{3},$$

cu egalitate dacă $M' = O$ - centrul cercului circumscris şi, pe de altă parte, $M' = T$. Însă $\triangle ABC$ este echilateral, deci $O = T$ şi atunci suma este minimă dacă $M = \mathrm{Pr}_\alpha O$.

X.49. *Să se arate că* $\sin^3 x + \sin^3 y + \sin^3 z - 3\sin x \sin y \sin z \geq$

$$\geq \frac{3}{4}\left[\sin x\left(1 - \cos(y - z)\right) + \sin y\left(1 - \cos(z - x)\right) + \sin z\left(1 - \cos(x - y)\right)\right],$$

$\forall x, y, z \in [0, \pi/3]$.

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Funcţia sinus este concavă pe intervalul $[0, \pi]$; aplicând inegalitatea lui Jensen cu argumentele $3x, 3y, 3z \in [0, \pi]$, obţinem că

$$\sin 3x + \sin 3y + \sin 3z \leq 3\sin(x + y + z) \Leftrightarrow$$
$$3\sum \sin x - 4\sum \sin^3 x \leq 3\sum \sin x \cos y \cos z - 3\sin x \sin y \sin z \Leftrightarrow$$
$$4\sum \sin^3 x - 12\sin x \sin y \sin z \geq 3\sum \sin x - 3\sum \sin x \cos y \cos z - 9\sin x \sin y \sin z.$$

După rearanjarea termenilor în membrul drept şi împărţirea prin 4, obţinem inegalitatea dorită. Egalitate se obţine pentru $x = y = z$.

X.50. *Fie* $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{N}$, $k \in \overline{1, n}$; *notăm cu* $f(p)$ *numărul tripletelor* (A, B, C) *de submulţimi (nu neapărat nevide) cu reuniunea* $M = \{1, 2, \ldots, n\}$, *oricare două disjuncte şi astfel încât numărul* $\sum\limits_{i \in M \setminus A} a_i + \sum\limits_{i \in M \setminus B} b_i + \sum\limits_{i \in M \setminus C} c_i - p$ *să fie multiplu de* 3 *(convenim ca* $\sum\limits_{i \in \emptyset} x_i = 0$*). Arătaţi că dacă* $f(0) = f(1) = f(2)$*, atunci există* i *pentru care* $a_i + b_i + c_i \,\vdots\, 3$.

Gabriel Dospinescu, student, Bucureşti

Soluţie. Vom folosi metoda descrisă în articolul *Combinatorică ... algebrică* publicat de autorul problemei în nr. 2/2003 al revistei. Fie $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$; avem că

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\varepsilon^{a_i + b_i} + \varepsilon^{b_i + c_i} + \varepsilon^{c_i + a_i}\right) = \sum_{\substack{A \cup B \cup C = M \\ A \cap B = B \cap C = C \cap A = \emptyset}} \varepsilon^{\sum\limits_{i \in C}(a_i + b_i) + \sum\limits_{i \in B}(a_i + c_i) + \sum\limits_{i \in A}(c_i + b_i)},$$

fapt care se obţine desfăcând parantezele în stânga şi grupând termenii. Însă $\varepsilon^p = \varepsilon^{p(\bmod 3)}$ şi atunci, utilizând ipoteza, obţinem că

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\varepsilon^{a_i + b_i} + \varepsilon^{b_i + c_i} + \varepsilon^{c_i + a_i}\right) = f(0) + f(1)\varepsilon + f(2)\varepsilon^2.$$

Dacă $f(0) = f(1) = f(2)$,produsul din stânga este zero, deci există $i \in M$ pentru care $\varepsilon^{a_i + b_i} + \varepsilon^{b_i + c_i} + \varepsilon^{c_i + a_i} = 0$. Aceasta este posibil dacă şi numai dacă numerele

$a_i + b_i \pmod 3$, $b_i + c_i \pmod 3$ şi $c_i + a_i \pmod 3$ reprezintă o permutare a numerelor $0, 1, 2$ şi atunci $3 \mid a_i + b_i + b_i + c_i + c_i + a_i$, deci $3 \mid a_i + b_i + c_i$.

Clasa a XI-a

XI.46. *Determinaţi* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ *pentru care* $\det(A+B) = 2$ *şi* $\det(A+3B) = 5$.

Cezar Lupu, elev, Constanţa

Soluţie. Fie A, B ca în enunţ şi fie $P(X) = \det(A + XB) \in \mathbb{Z}[X]$, polinom de grad n. Din ipoteză, $P(1) = 2$ şi $P(3) = 5$. Se ştie că, dacă $P \in \mathbb{Z}[X]$ şi $a, b \in \mathbb{Z}$ sunt distincte, atunci $P(a) - P(b) \vdots a - b$; în cazul nostru, $P(3) - P(1) \vdots 3 - 1$, deci $3 \vdots 2$, absurd. În concluzie, nu există matrice cu proprietăţile dorite.

XI.47. *Fie* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *matrice cu* $a_{ij} = \begin{cases} a, \text{ dacă } i = j \\ b, \text{ dacă } i \neq j \end{cases}$, *unde* $b \neq 0$ *şi* $\dfrac{a}{b} \notin \mathbb{Z}$. *Arătaţi că* A *este inversabilă şi determinaţi* A^{-1}.

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Adunând toate liniile la prima şi apoi scăzând, pe rând, coloana 1 din celelalte coloane, obţinem că $\det A = [a + (n-1)b](a-b)^{n-1} \neq 0$, deoarece $a + (n-1)b = 0 \Rightarrow \dfrac{a}{b} = 1 - n \in \mathbb{Z}$, iar $a - b = 0 \Rightarrow \dfrac{a}{b} = 1 \in \mathbb{Z}$, situaţii contradictorii. Rezultă că A este inversabilă. Pentru determinarea inversei, fie $A = (a-b)I + bB$, unde I este matricea unitate, iar B matricea având toate elementele egale cu 1. Avem:

$$\begin{aligned} A^2 &= (a-b)^2 I + 2b(a-b)B + b^2B^2 = \\ &= (a-b)^2 I + 2b(a-b)\cdot\frac{1}{b}[A - (a-b)I] + b^2\cdot n\cdot\frac{1}{b}[A-(a-b)I] = \\ &= I\cdot\left[(a-b)^2 - 2(a-b)^2 - bn(a-b)\right] + A\cdot[2(a-b)+bn] = \\ &= [2a + b(n-2)]\cdot A - (a-b)[a+b(n-1)]\cdot I \Rightarrow \\ A &= [2a+b(n-2)]\cdot I - (a-b)[a+b(n-1)]\cdot A^{-1} \Rightarrow \\ A^{-1} &= \frac{2a+b(n-2)}{(a-b)(a+bn-b)}\cdot I - \frac{1}{(a-b)(a+bn-b)}\cdot A \end{aligned}$$

XI.48. *Se defineşte şirul* $(x_n)_{n\geq 0}$ *prin* $x_n = x_{n-1}^2 - [x_{n-1}]$, $\forall n \geq 1$; $x_0 \in \left[0, \left(1+\sqrt{5}\right)/2\right)$. *Să se arate că* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Cătălin Ţigăeru, Suceava

Soliţie. Dacă $x_0 \in [0,1)$, atunci $[x_0] = 0$ şi se demonstrează uşor prin inducţie că $x_n = x_0^{2^n}$; prin urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Dacă $x_0 = 1$, se observă imediat că $x_n = 0$, $\forall n \geq 1$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ şi în acest caz.

Presupunem că $x_0 \in \left(1, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Se arată prin inducţie că $x_n \in \left(0, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $\forall n \geq 1$. În plus, x_n poate lua valorile x_{n-1}^2, 0 sau $x_{n-1}^2 - 1$, după cum $x_{n-1} \in [0,1)$, $x_{n-1} = 1$, respectiv $x_{n-1} \in \left(1, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$; în fiecare caz, $x_n - x_{n-1} \leq 0$, deci şirul este descrescător. Rezultă că şirul este convergent şi fie l limita sa. Vom demonstra că există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $[x_{n_0}] = 0$; atunci $x_n = x_{n_0}^{2^{n-n_0}}, \forall n \geq n_0$ (prin inducţie), de unde concluzia. Să presupunem deci prin absurd că $x_n \in \left(1, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. În acest caz, $x_n = x_{n-1}^2 - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi, trecând la limită în această relaţie, obţinem că $l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Aceasta contrazice însă faptul că şirul este descrescător, ceea ce încheie demonstraţia.

XI.49. *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}$, $(a_n)_{n\geq 0}$ *şiruri de numere reale astfel încât* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, $|x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}| + |x_{n+1} - 3x_n + 2x_{n-1}| \leq a_n$, $\forall n \geq 1$. *Să se arate că* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este convergent.*

Paul Georgescu şi Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Demonstrăm întâi că, dacă $(z_n)_{n\geq 0}$ şi $(a_n)_{n\geq 0}$ sunt şiruri de numere reale cu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, astfel încât $|z_{n+1} - z_n| \leq a_n$, $\forall n \geq 0$, atunci $(z_n)_{n\geq 0}$ este convergent. Într-adevăr, deoarece $|z_n| \leq |z_0| + \sum\limits_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k| \leq |z_0| + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k$, obţinem că $(z_n)_{n\geq 0}$ este mărginit. Apoi, fiindcă $-a_n \leq z_{n+1} - z_n \leq a_n$, $\forall n \geq 0$, atunci $z_{n+1} + \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq z_n + \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$, deci şirul $y_n = z_n + \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$ este monoton descrescător şi mărginit, adică $(y_n)_{n\geq 0}$ este convergent. Însă şirul $\left(\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k\right)_{n\geq 0}$ este convergent la 0, deci $(z_n)_{n\geq 0}$ este şir convergent.

Aplicăm acest rezultat şirurilor $z_n^1 = x_{n+1} - x_n$ şi $z_n^2 = x_{n+1} - 2x_n$ şi rezultă convergenţa lor; atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent ca diferenţă de şiruri convergente.

XI.50. *Fie* $n \in 2\,\mathbb{N}$, *iar* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *o funcţie cu proprietatea că* $f\left(\dfrac{nx+y}{n+1}\right) \geq$ $\geq f\left(\sqrt[n+1]{x^n y}\right)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. *Să se arate că funcţia este descrescătoare pe* $(-\infty, 0]$ *şi crescătoare pe* $[0, \infty)$. (În legătură cu *Problema 2819* din *Crux Mathematicorum*, nr. 2/2003.)

Titu Zvonaru, Bucureşti

Soluţie. Fie $a, b \in [0, \infty)$ astfel încât $a > b$. Deoarece

$$\frac{nx+y}{n+1} = \frac{x+x+\cdots+x+y}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{x^n y}, \quad \forall x, y > 0,$$

încercăm să găsim x, y astfel încât $a = \dfrac{nx+y}{n+1}$, $b = \sqrt[n+1]{x^n y}$. Prin substituţie, x trebuie să fie soluţie a ecuaţiei $nx^{n+1} - (n+1)\,ax^n + b^{n+1} = 0$. Cu notaţia $g(x) = nx^{n+1} - (n+1)\,ax^n + b^{n+1}$, avem că g este funcţie continuă de x, $g(a) =$ $= b^{n+1} - a^{n+1} < 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} g(x) = \infty$, deci ecuaţia $g(x) = 0$ admite o unică soluţie $x_0 > a > 0$; corespunzător găsim pe y_0. În aceste condiţii,

$$f(a) = f\left(\frac{nx_0+y}{n+1}\right) \geq f\left(\sqrt[n+1]{x_0^n y_0}\right) = f(b),$$

adică f este crescătoare pe $[0, \infty)$.

Dacă $a, b \in (-\infty, 0]$ cu $a > b$ procedăm asemănător, cu observaţia că în acest caz $\dfrac{nx+y}{n+1} \leq \sqrt[n+1]{x^n y}$, iar radicalul are sens dat fiind faptul că n este par.

Clasa a XII-a

XII.46. *Să se determine funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dacă $(\mathbb{R}, *)$ este grup abelian cu proprietatea că simetricul oricărui element $x \in [-1, 1]$ se află în $[-1, 1]$, unde $x * y = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.*

Ioan Săcăleanu, Hârlău

Soluţie. Notăm cu e elementul neutru al grupului şi cu x' simetricul lui x. Din $x = x * e$, $\forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că $f(x) = x - f(e)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Pentru $x = e$, obţinem $f(e) = \dfrac{e}{2}$, deci $f(x) = x - \dfrac{e}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Deoarece $x * x' = e$, avem că $f(x) + f(x') = e$, prin urmare $x' = 2e - x$. Pentru $x = 1$, $x' = 2e - 1 \in [-1, 1]$, de unde $e \in [0, 1]$. Dacă $x = -1$, $x' = 2e + 1 \in [-1, 1]$, de unde $e \in [-1, 0]$. Rămâne că $e = 0$, deci $f(x) = x$, funcţie care verifică toate condiţiile din problemă.

XII.47. *Fie $G = (a, b)$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, iar "$\cdot$" înmulţirea numerelor reale. Să se determine a, b astfel încât $(\mathbb{R}_+^*, \cdot) \cong (G, \cdot)$ printr-un izomorfism de forma $f : \mathbb{R}_+^* \to G$, $f(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, cu $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.*

Alexandru Blaga şi Ovidiu Pop, Satu Mare

Soluţie. Deoarece $(G, \cdot)$ este grup şi 1 este unitatea faţă de înmulţire, rezultă că $a < 1 < b$ şi $f(1) = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = \gamma + \delta$.

Dacă $b \in \mathbb{R}$, fie $x, y \in G$, $1 < x < b$, $1 < y < b$. Cum $(G, \cdot)$ este grup, urmează că $xy < b^2 \leq b$, de unde $b^2 \leq b$ sau $b \in (0, 1)$, ceea ce este în contradicţie cu $1 < b$. Rezultă că $b \notin \mathbb{R}$, deci $b = +\infty$.

Deoarece $f'(x) = \dfrac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma x + \delta)^2}$, funcţia f este strict monotonă pe $(0, \infty)$.

Cazul I. f strict crescătoare pe $(0, \infty) \Leftrightarrow \alpha\delta - \beta\gamma > 0$. Este necesar ca $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = a$ şi $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$, adică $\dfrac{\beta}{\delta} = a$ şi $\gamma = 0$, $\dfrac{\alpha}{\delta} > 0$. Aşadar,

$$f(x) = \frac{\alpha x + a\delta}{\delta} = (1 - a)x + a, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$$

(am utilizat faptul că relaţia $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ revine la $\alpha = (1 - a)\delta$. Cum pentru $x = y = 2$ în condiţia de morfism obţinem $f(4) = [f(2)]^2$, rezultă că

$$4 - 3a = (2 - a)^2 \Leftrightarrow a^2 - a = 0 \Leftrightarrow a \in \{0, 1\}.$$

Convine doar $a = 0$. În concluzie, $a = 0$, $b = +\infty$ şi $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

Cazul II. f strict descrescătoare pe $(0, \infty) \Leftrightarrow \alpha\delta - \beta\gamma < 0$. Urmăm pas cu pas aceeaşi cale şi obţinem $a = 0$, $b = +\infty$ şi $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

XII.48. *Fie $(G, \cdot)$ grup de element neutru e şi $x, y \in G$ penrtru care avem:*

a) $\exists k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ *a. î.* $x^k = e$; *b)* $\exists p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ *a. i.* $xy = y^p x$.

Să se arate că:

1) $xy^n x^{k-1} = y^{np}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$; 2) $xy = yx \Leftrightarrow y^{n(p-1)} = e$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Mihai Haivas, Iaşi

Soluţie. 1) Demonstrăm afirmaţia prin inducţie după n. Pentru $n=1$, $xyx^{k-1} = = y^p x x^{k-1} = y^p x^k = y^p$. Presupunem concluzia adevărată pentru n şi să o justificăm pentru $n+1$; avem:

$$xy^{n+1}x^{k-1} = (xy)\left(y^n x^{k-1}\right) = y^p x \cdot y^n x^{k-1} = y^p y^{np} = y^{(n+1)p}.$$

2) Dacă $xy = yx$, atunci $y^p x = yx$, deci $y^p = y$ şi prin urmare $y^{p-1} = e$; evident avem şi $y^{n(p-1)} = e^n = e$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Reciproc, dacă $y^{n(p-1)} = e$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, în particular $y^{p-1} = e$, deci $xy = y^p x = y^{p-1} \cdot yx = e \cdot yx = yx$, ceea ce încheie rezolvarea.

XII.49. *Se consideră numerele reale $b > a \geq 0$, $c \geq 1$ şi funcţiile continue $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{na}^{nb} g(x)\,dx = d \in \mathbb{R}$. Să se arate că şirul $(u_n)_{n\geq 1}$, $u_n = \int_a^b \frac{1}{c + f(x) + g(nx)}\,dx$ este convergent şi să se afle limita sa.*

D. M. Bătineţu - Giurgiu, Bucureşti

Soluţie. Din ipotezele problemei, avem că

$$0 \leq \frac{1}{c+f(x)} - \frac{1}{c+f(x)+g(nx)} = \frac{g(nx)}{[c+f(x)][c+f(x)+g(nx)]} \leq g(nx)$$

pentru $x \in [a,b]$ şi $n \in \mathbb{N}^*$. Prin integrare, deducem că

$$0 \leq \int_a^b \frac{1}{c+f(x)} - u_n \leq \int_a^b g(nx)\,dx.$$

Însă

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \int_a^b g(nx)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{an}^{bn} g(t)\,dt = d \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

prin urmare există limita şirului $(u_n)_{n\geq 1}$, egală cu $\int_a^b \frac{1}{c+f(x)}\,dx$.

XII.50. *Fie $s(n)$ suma cifrelor numărului natural n. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s(n!)}{\ln^k \ln n}$, unde $k \in \mathbb{N}$ este fixat.*

Gabriel Dospinescu, student, Bucureşti

Soluţie. Vom arăta întâi că orice multiplu nenul al lui $A = \underbrace{11\ldots1}_{m}$ are suma cifrelor cel puţin m. Într-adevăr, să presupunem că există B cel mai mic multiplu nenul al lui A cu $s(B) < m$. Cum $s(iA) \geq m$, $\forall i \in \overline{1,9}$ se impune să avem $B \geq 10A > 10^m$; fie $B = a_r 10^r + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$, unde $r \geq m$. Considerăm numărul $C = B - 10^{r-m}(10^m - 1)$.

Evident că $C < B$ şi A divide C. În plus, dacă $a_{r-m} < 9$ atunci $s(C) = s(B)$, iar dacă $a_{r-m} = 9$, atunci $s(C) < s(B)$, prin urmare C este un număr mai mic decât B şi având proprietăţile acestuia, absurd. Rămâne deci că $s(nA) \geq m$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Acum, deoarece $\underbrace{11\ldots1}_{[\lg n]} \mid 10^{[\lg n]} - 1$, iar $10^{[\lg n]} - 1 \mid n!$ fiindcă $10^{[\lg n]} - 1 < n$, aplicând rezultatul demonstrat mai sus urmează că $s(n!) \geq [\lg n]$. Se ştie însă că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{[\lg n]}{\ln^k \ln n} = \infty$, prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s(n!)}{\ln^k \ln n} = \infty$.

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor din nr. 1 / 2004

A. Nivel gimnazial

G56. *Fie* $m \in \mathbb{Z}$, $n \in 2\mathbb{Z}+1$ *fixate. Să se arate că ecuaţia* $nx+y=m$, $x, y \in \mathbb{Z}$ *are o unică soluţie* (x_0, y_0) *cu proprietatea că* $|y_0| < |n|/2$.

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. Pentru existenţa soluţiei, să observăm că există $q, r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < |n|$ cu $m = nq + r$ (din teorema împărţirii cu rest). Dcaă $0 \leq r < \dfrac{|n|}{2}$, luăm $x_0 = q$, $y_0 = r$. Dacă $\dfrac{|n|}{2} < r < n$, luăm $x_0 = q + \operatorname{sgn}(n)$ şi $y_0 = r - |n|$; avem evident că

$$nx_0 + y_0 = n\left(q + \operatorname{sgn}(n)\right) + r - |n| = nq + |n| + r - |n| = nq + r = m,$$

iar $|y_0| = |n| - r < |n| - \dfrac{|n|}{2} = \dfrac{|n|}{2}$.

Pentru demonstrarea unicităţii, fie încă (x_1, y_1) soluţie a ecuaţiei cu $|y_1| < \dfrac{|n|}{2}$; atunci $n(x_0 - x_1) = y_0 - y_1$, de unde

$$|n| \cdot |x_0 - x_1| = |y_0 - y_1| \leq |y_0| + |y_1| < |n|$$

şi cum $|x_0 - x_1| \in \mathbb{N}$, în mod necesar trebuie să avem $|x_0 - x_1| = 0$, adică $x_1 = x_0$ şi apoi $y_1 = y_0$.

G57. *Un şeic a lăsat moştenire celor doi fii ai săi cinci cămile, cu condiţia ca unul să primească jumătate, iar celălalt o treime. Moştenitorii nu şi-au putut împărţi averea, aşa că au apelat la un înţelept care trecea pe acolo, călare pe o cămilă. Cum a procedat înţeleptul?*

Câte probleme asemănătoare mai putem formula (în care moştenirea este de n *cămile, iar fiii primesc a* p*-a şi a* q*-a parte)?*

Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Problema este clasică, dar cu 3 fii şi 17 cămile. Totul se bazează pe faptul că $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{6} \neq 1$. Înţeleptul aşează cămila sa lângă cele cinci lăsate moştenire de şeic. Primul fiu ia $\dfrac{1}{2}$ din cele 6 cămile, adică 3; al doilea ia $\dfrac{1}{3}$, adică 2 cămile, iar înţeleptului îi rămâne cămila sa.

Pentru a formula alte asemenea probleme, trebuie să găsim trei numere nenule p, q, n astfel încât p şi q să dividă $n+1$, iar $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{n}{n+1}$. Evident că $p, q \geq 2$, măcar unul cu inegalitate strictă; atunci $\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} \leq \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{6}$, deci $n \leq 5$. Considerând cazurile posibile, obţinem că $(n, p, q) \in \{(5, 2, 3); (3, 2, 4)\}$, bineînţeles în ipoteza $p \leq q$. Afară de problema dată, mai putem formula încă una.

Generalizare (**Petru Asaftei**, Iaşi)**.** Dacă înţeleptul are r cămile, $r \geq 1$ putem formula o infinitate de probleme. Mai precis, *pentru* $p, q \geq 2$ *numere naturale fixate,* $p + q \neq 4$, *vom determina* $n, r \in N^*$, $p \nmid n$, $q \nmid n$, *astfel încât* $\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}\right)(n + r) = n$.

Dacă $(p,q)=1$, atunci $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)(n+r)=n \Leftrightarrow \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{n}{n+r} \Leftrightarrow \frac{pq-p-q}{pq}=\frac{n}{n+r}$. Deoarece $(pq-p-q,pq)=1$, avem $r=k(pq-p-q)$, $n+r=pqk \Leftrightarrow n=k(p+q)$, cu $k\in\mathbb{N}^*$, k nefiind multipli de p sau q. Dacă $(p,q)=d>1$, atunci $\frac{pq-p-q}{pq}=\frac{p_1q_1d^2-p_1d-q_1d}{p_1q_1d^2}=\frac{p_1q_1d-p_1-q_1}{p_1q_1d}$, cu $(p_1,q_1)=1$. Deoarece $(p_1q_1d-p_1-q_1,p_1q_1d)=1$, atunci $r=k(p_1q_1d-p_1-q_1)$, $n+r=p_1q_1dk \Leftrightarrow n=k(p_1+q_1)$, cu $k\in\mathbb{N}^*$, k nefiind multiplu de p sau q. Condi'tia $p+q\neq 4$ exclude cazul $p=q=2$, care ar conduce la $n+r=n \Leftrightarrow r=0$.

G58. *Să se rezolve în $\mathbb{N}^2$ ecuaţia $2^x+1=5^y$.*

Irina Mustaţă, elevă, şi Valentina Blendea, Iaşi

Soluţie. Dacă x, y sunt ambele pare, $x=2p$ şi $y=2q$, $p,q\in\mathbb{N}$, atunci $2^x+1=4^p+1=(3+1)^p+1=\mathcal{M}3+2$, iar $5^y=25^q=(\mathcal{M}3+1)^q=\mathcal{M}3+1$, deci $2^x+1\neq 5^y$. Dacă x, y sunt ambele impare $x=2p+1$, $y=2q+1$, $p,q\in\mathbb{N}$, atunci $2^x+1=2\neq 5^y$ pentru $p=0$ şi $2^x+1=2\cdot 4^p+1=\mathcal{M}8+1$, $5^y=5\cdot 25^q=\mathcal{M}8+5$, deci $2^x+1\neq 5^y$ şi pentru $p\geq 1$. Dacă $x=2p+1$, $y=2q$, $p,q\in\mathbb{N}$, atunci $2^x+1=2\cdot 4^p+1=2(\mathcal{M}3+1)+1=\mathcal{M}3$ iar $5^y=\mathcal{M}3+1$, deci $2^x+1\neq 5^y$. În sfârşit, pentru $x=2p, y=2q+1$, $p,q\in\mathbb{N}$, avem în cazul $p\geq 2$ că $2^x+1=4^p+1=\mathcal{M}8+1$, iar $5^y=\mathcal{M}8+5$, adică $2^x+1\neq 5^y$. Dacă $p\leq 1$, prin verificări obţinem unica soluţie a ecuaţiei $(2,1)$.

G59. *Fie $A=\{n\in\mathbb{N}^* \mid s(2000n)+s(2002n)=2s(2001n)\}$, unde prin $s(x)$ am notat suma cifrelor lui x. Demonstraţi că orice număr natural nenul are un multiplu ce aparţine lui A.*

Gabriel Dospinescu, student, Bucureşti

Soluţie. Notăm $N(k,p)=\underbrace{11\ldots 1}_{p}\underbrace{00\ldots 0}_{k}$; atunci pentru orice $p>3$ şi orice $k\in\mathbb{N}$ avem că $2000\cdot N(k,p)=\underbrace{22\ldots 2}_{p}\underbrace{00\ldots 0}_{k+3}$, $2002\cdot N(k.p)=222\underbrace{44\ldots 4}_{p-3}222\underbrace{00\ldots 0}_{k}$, $2001\cdot N(k,p)=222\underbrace{33\ldots 3}_{p-3}111\underbrace{00\ldots 0}_{k}$, deci

$$s(2000\cdot N(k,p))+s(2002\cdot N(k,p))=2p+6+4(p-3)+6=6p=2s(2001\cdot N(k,p)),$$

adică $N(k,p)\in A$. Fie acum $m\in\mathbb{N}^*$ oarecare; considerând numerele $1,11,111,\ldots$, conform principiului cutiei rezultă că putem găsi $i<j$ astfel încât m să dividă diferenţa $\underbrace{11\ldots 1}_{j}-\underbrace{11\ldots 1}_{i}$, deci $m\mid N(j-i,i)$ ceea ce încheie soluţia.

G60. *Să se demonstreze că pentru orice $a,b,c\in(0,\infty)$ are loc*

$$\frac{ab}{(a+b)^2}+\frac{bc}{(b+c)^2}+\frac{ca}{(c+a)^2}\leq\frac{1}{4}+\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Gabriel Dospinescu, student, Bucureşti

Soluţie. Să observăm că

$$\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{2\left[(a+b)(b+c)(c+a)-ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c+a)\right]}{(a+b)(b+c)(c+a)}=$$

$$=2-\frac{\left(a^2+bc\right)(b+c)+\left(b^2+ac\right)(a+c)+\left(c^2+ab\right)(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=$$

$$=2-\left(\frac{a}{a+b}\frac{c}{b+c}+\frac{a}{a+b}\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}\frac{b}{a+b}+\frac{b}{b+c}\frac{a}{a+c}+\frac{c}{c+a}\frac{c}{b+c}+\frac{c}{c+a}\frac{b}{a+b}\right)=$$

$$=2-\left[\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\right)\left(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}\right)-\frac{ab}{(a+b)^2}-\frac{bc}{(b+c)^2}-\frac{ac}{(a+c)^2}\right].$$

Aplicăm inegalitatea mediilor numerelor $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}$ şi $\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}$, a căror sumă este 3; obţinem că

$$\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\right)\left(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}\right)\le\frac{9}{4}.$$

Înlocuind în identitatea demonstrată, obţinem concluzia. Egalitatea este atinsă atunci când două dintre numerele a, b, c sunt egale.

G61. *Să se demonstreze că pentru orice $a,b,c\in(0,\infty)$ are loc*

$$\left(\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\right)^3\ge54\sqrt{2}\frac{\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}{abc}\ge27\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}.$$

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Prima inegalitate se scrie succesiv

$$\left[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\right]^3\ge54\sqrt{2}\,a^2b^2c^2\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)}\Leftrightarrow$$

$$\left[a\left(b^2+c^2\right)+b\left(a^2+c^2\right)+c\left(a^2+b^2\right)\right]^3\ge54\sqrt{2}\,a^2b^2c^2\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)}.$$

Pentru a demonstra această inegalitate, vom intercala între cele două cantităţi pe $27abc\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)$. Faptul că

$$\left[a\left(b^2+c^2\right)+b\left(a^2+c^2\right)+c\left(a^2+b^2\right)\right]^3\ge27abc\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)$$

rezultă din inegalitatea mediilor aplicată numerelor $a\left(b^2+c^2\right)$, $b\left(a^2+c^2\right)$ şi $c\left(a^2+b^2\right)$. Apoi, avem

$$27abc\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)\ge54\sqrt{2}\,a^2b^2c^2\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)}\Leftrightarrow$$

$$\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)\ge8a^2b^2c^2,$$

fapt care rezultă prin înmulţirea membru cu membru a inegalităţilor $a^2+b^2\ge2ab$, $b^2+c^2\ge2bc$, $c^2+a^2\ge2ac$.

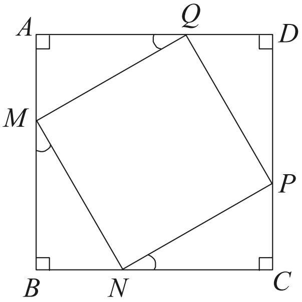
În ce priveşte a doua inegalitate, ce rezultă prin înmulţirea membru cu membru a inegalităţilor cunoscute $\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}\ge a+b$, $\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}\ge b+c$, $\sqrt{2\left(c^2+a^2\right)}\ge 2ac$. Egalitatea se atinge pentru $a=b=c$.

G62. *Fie $ABCD$ un patrulater convex în care se poate înscrie pătratul $MNPQ$ de centru O ($M\in(AB)$, $N\in(BC)$, $P\in(CD)$, $Q\in(AD)$). Să se arate că $AB+BC+CD+DA\ge\sqrt{2}\,(AO+BO+CO+DO)$. Când are loc egalitatea?*

Lucian Tuţescu, Craiova şi Ioan Şerdean, Orăştie

Soluţie. Conform inegalităţii lui Ptolomeu aplicată în patrulaterul $AMOQ$, avem $AQ \cdot MO + AM \cdot OQ \geq AO \cdot MQ$, adică $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}(AQ + AM) \geq a \cdot AO$, unde a este latura pătratului $MNPQ$; prin urmare, $AQ + AM \geq \sqrt{2} \cdot AO$. Scriind celelalte trei inegalităţi analoage şi adunându-le, urmează concluzia. Egalitatea are loc dacă cele patru patrulatere în care s-a aplicat Ptolomeu sunt inscriptibile, fapt care se întâmplă dacă $ABCD$ este dreptunghi. Însă în $ABCD$ trebuie să se poată înscrie pătratul $MNPQ$, deci $ABCD$ este el însuşi pătrat.

Justificare: $ABCD$ - dreptunghi, $MNPQ$ - pătrat $\Rightarrow ABCD$ - pătrat.



$$\left.\begin{array}{r} m(\widehat{MNB}) + m(\widehat{CNP}) = 90^\circ \\ m(\widehat{MNB}) + m(\widehat{NMB}) = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{BMN} \equiv \widehat{CNP}$$

$$\left.\begin{array}{r} m(\widehat{BMN}) + m(\widehat{AMQ}) = 90^\circ \\ m(\widehat{AMQ}) + m(\widehat{AQM}) = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{BMN} \equiv \widehat{AQM}$$

Considerăm $\triangle NCP$, $\triangle MBN$ şi $\triangle QAM$ $(m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = 90^\circ)$

$$\left.\begin{array}{c} [NP] \equiv [MN] \equiv [MQ] \\ \widehat{CNP} \equiv \widehat{BMN} \equiv \widehat{AQM} \end{array}\right\} \overset{IU}{\Rightarrow} \triangle NCP \equiv \triangle MBN \equiv \triangle QAM \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c} [BN] \equiv [AM] \\ [NC] \equiv [MB] \end{array}\right\} \Rightarrow [BC] \equiv [AB] \Rightarrow ABCD \text{ - pătrat.}$$

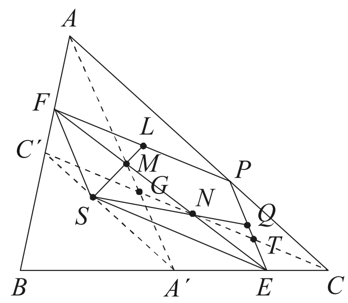
G63. *În $\triangle ABC$ cu $m(\widehat{A}) = 10^\circ$ şi $m(\widehat{B}) = 100^\circ$ construim $M \in (AB)$ şi $N \in (AC)$ astfel ca $m(\widehat{MCB}) = 40^\circ$ şi $m(\widehat{NBC}) = 75^\circ$. Să se afle $m(\widehat{AMN})$.*

Octavian Bondoc, Piteşti

Soluţie. Fie $P \in (AC)$ astfel încat $m(\widehat{PBC}) = 40^\circ$. Obţinem atunci $\triangle BPC$ isoscel, deci $[BP] \equiv [BC]$, apoi $\triangle MBC$ isoscel cu $[BM] \equiv [BC]$, de unde $[BP] \equiv [BM]$. Însă $m(\widehat{MBP}) = 60^\circ$, deci $\triangle MBP$ este echilateral şi $[MP] \equiv [MB]$, iar $m(\widehat{BMP}) = 60^\circ$. Pe de altă parte, tot din congruenţe de unghiuri, $\triangle NPB$ este isoscel cu $[NP] \equiv [PB]$, prin urmare $[NP] \equiv [PM]$ şi cum $m(\widehat{NPM}) = 50^\circ$, găsim $m(\widehat{NMP}) = 65^\circ$. În final, $m(\widehat{AMN}) = 180^\circ - 65^\circ - 60^\circ = 55^\circ$.

G64. *Prin punctul P al laturii (AC) a $\triangle ABC$ se duc paralele la medianele AA' şi CC', care intersectează laturile (BC) şi (AB) în E, respectiv F. Fie $\{M\} = EF \cap AA'$, $\{N\} = EF \cap CC'$, iar L şi Q mijloacele segmentelor $[FP]$, respectiv $[PE]$. Să se arate că dreptele ML, NQ şi $A'C'$ sunt concurente.*

Andrei Nedelcu, Iaşi



Soluţie. Fie G centrul de greutate al $\triangle ABC$ şi $\{T\} = PE \cap CC'$. Deoarece $TN \parallel PF$, avem $\dfrac{EN}{NF} = \dfrac{ET}{TP}$. Însă $\dfrac{ET}{TP} = \dfrac{GA'}{GA} = \dfrac{1}{2}$, de unde $2EN = NF$. Analog se arată că $2MF = ME$, prin urmare $FM = MN = NE$. Fie acum

$FS \parallel AA'$, $S \in A'C'$; atunci $\dfrac{FS}{AA'} = \dfrac{C'F}{C'A} = \dfrac{PC}{AC} = \dfrac{PE}{AA'}$, deci $FS = PE$, adică $FPES$ este paralelogram. În $\triangle FSP$, M se află pe mediana din F la $\dfrac{2}{3}$ de vârf, deci M este centrul de greutate al $\triangle FSP$ şi atunci SM este mediană şi va trece prin L. Analog, $Q \in SN$, de unde concluzia.

G65. *Fie $SABCD$ o piramidă cu baza $ABCD$ dreptunghi, M proiecţia lui D pe SB şi N proiecţia lui C pe SA, iar $\{P\} = AM \cap NB$. Ştiind că $M \in (SB)$ şi $N \in (SA)$, să se arate că $NP \cdot SA \cdot MB = SM \cdot AN \cdot PB$.*

Daniel Ştefan Ninu, elev, Iaşi

Soluţie. Fie $\{O\} = AC \cap BD$ şi $a = OA = OB = OC = OD$. Avem că $NO = MO = a$, ce mediane corespunzătoare ipotenuzelor în triunghiuri dreptunghice. Prin urmare, punctele A, B, M, N aparţin sferei de centru O şi rază a. Însă cele patru puncte sunt coplanare, iar un plan taie o sferă după un cerc, deci patrulaterul $ABMN$ este inscriptibil. Atunci $\triangle NPA \sim \triangle MPB$ şi $\triangle NPM \sim \triangle APB$, de unde $\dfrac{NP}{MP} = \dfrac{NA}{MB}$, respectiv $\dfrac{PM}{PB} = \dfrac{MN}{AB}$, prin urmare $\dfrac{NP}{MP} \cdot \dfrac{PM}{PB} = \dfrac{NM \cdot NA}{MB \cdot AB}$, adică $\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{MB \cdot NP}{PB \cdot NA}$. Pe de altă parte, $\triangle SMN \sim \triangle SAB$, deci $\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{SM}{SA}$. Comparând ultimele două relaţii, rezultă concluzia.

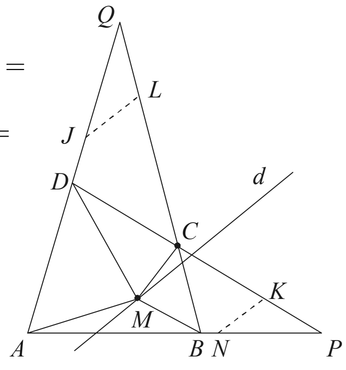
B. Nivel liceal

L56. *Fie $ABCD$ patrulater convex şi $\{P\} = AB \cap CD$, $\{Q\} = AD \cap BC$. Considerăm $J \in (AQ)$, $L \in (BQ)$, $K \in (DP)$, $N \in (AP)$ astfel încât $QJ = AD$, $QL = CB$, $PK = DC$ şi $PN = AB$. Să se arate că $JL \parallel NK$.*

Carmen Nejneru, Iaşi

Soluţie. Fie $M \in \operatorname{Int} ABCD$, avem:

$$S_{MAD} + S_{MBC} = \frac{AD \cdot d(M, AD)}{2} + \frac{BC \cdot d(M, BC)}{2} = \frac{QJ \cdot d(M, QJ)}{2} + \frac{QL \cdot d(M, QL)}{2} = S_{MJQ} + S_{MQL} = S_{QJL} + S_{MJL}$$



şi cum S_{QJL} este constantă, locul geometric al punctelor M pentru care $S_{MAD} + S_{MBC} = k$ este o porţiune dintr-o dreaptă d paralelă cu JL. Analog se arată că locul geometric al punctelor M pentru care $S_{MAB} + S_{MCD} = k'$ este o porţiune dintr-o dreaptă d' paralelă cu NK. Luând $k = k' = \dfrac{1}{2} S_{ABCD}$ cele două locuri geometrice coincid, prin urmare $JL \parallel NK$.

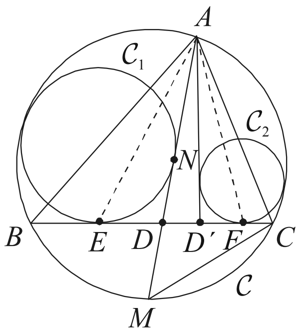
Notă. Soluţie corectă au dat următorii elevi: **Andrei-Codruţ Onofrei**, **Lucian Rotaru**, **Cosmin-Alexandru Spînu**.

L57. *Fie $\triangle ABC$ înscris în cercul $\mathcal{C}$ şi punctele $D \in (CB$, $D' \in (BC$ astfel încât $\widehat{CAD} \equiv \widehat{ABC}$, $\widehat{BAD'} \equiv \widehat{ACB}$. Se mai consideră cercul $\mathcal{C}_1$ tangent la AD, BD şi la*

$\mathcal{C}$, cercul $\mathcal{C}_2$ tangent la AD', CD' şi la $\mathcal{C}$, iar $\{E\} = \mathcal{C}_1 \cap [BD]$, $\{F\} = \mathcal{C}_2 \cap [D'C]$. Să se arate că cercul circumscris $\triangle AEF$ şi cercul înscris în $\triangle ABC$ sunt concentrice.

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

Soluţie. Fie $\{N\} = AD \cap \mathcal{C}_1$, $\{M_1 A\} = AD \cap \mathcal{C}$. Avem că $\widehat{CAD} \equiv \widehat{ABC} \equiv \widehat{AMC}$, deci $[AC] \equiv [MC]$. Aplicăm teorema lui Casey cercurilor cele A, C, M (degenerate) şi $\mathcal{C}_1$, tangente interior cercului $\mathcal{C}$; obţinem succesiv:



$$AC \cdot MN + AN \cdot MC = AM \cdot CE \Leftrightarrow$$
$$AC \cdot MN + AN \cdot AC = AM \cdot CE \Leftrightarrow$$
$$AC\,(MN + AN) = AM \cdot CE \Leftrightarrow AC = CE.$$

Rezultă că $\triangle ACE$ este isoscel, deci mediatoarea lui $[AE]$ este bisectoarea unghiului $\widehat{ACB}$. Analog se arată că mediatoarea lui $[AF]$ este bisectoarea lui $\widehat{ABC}$, de unde concluzia.

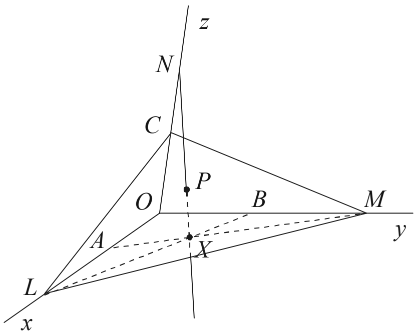
L58. *Pe muchiile $(Ox$, $(Oy$ şi $(Oz$ ale unui triedru oarecare se consideră punctele $A, L \in (Ox$, $B, M \in (Oy$ şi $C, N \in (Oz$ astfel încât $OA = OB = OC = a$ şi $OL = OM = ON = b$ $(a < b)$. Notăm $\alpha = m(\widehat{Oy, Oz})$, $\beta = m(\widehat{Oz, Ox})$, $\gamma = m(\widehat{Ox, Oy})$ şi $\{P\} = (AMN) \cap (BNL) \cap (CLM)$, $\{Q\} = (LBC) \cap (MCA) \cap (NAB)$. Să se calculeze distanţa PQ în funcţie de a, b, α, β, γ.*

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Existenţa punctului P (ca şi a lui Q) se arată uşor; într-adevăr, $(AMN) \cap (BNL) = NX$, unde $\{X\} = AM \cap BL$, iar $NX \cap (CLM) = \{P\}$.

Notăm $\overrightarrow{OA} = \vec{r}_A$ etc. În planul (AMN) putem scrie

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AM} + \mu \overrightarrow{AN} \Leftrightarrow$$
$$\vec{r}_P - \vec{r}_A = \lambda\,(\vec{r}_M - \vec{r}_A) + \mu\,(\vec{r}_N - \vec{r}_A) \Leftrightarrow$$
$$\vec{r}_P = (1 - \lambda - \mu)\,\vec{r}_A + \lambda \vec{r}_M + \mu \vec{r}_N\ . \quad (1)$$



Procedând similar în planele (BNL) şi (CLM) obţinem şi relaţiile

$$\vec{r}_P = \left(1 - \lambda' - \mu'\right) \vec{r}_B + \lambda' \vec{r}_N + \mu' \vec{r}_L, \quad \vec{r}_P = \left(1 - \lambda'' - \mu''\right) \vec{r}_C + \lambda'' \vec{r}_L + \mu'' \vec{r}_M\ . \ (2)$$

Notând cu $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ versorii pe $(Ox$, $(Oy$ şi $(Oz$, relaţiile (1) şi (2) se pot scrie

$$\vec{r}_P = (1 - \lambda - \mu)\, a\vec{u}_1 + \lambda b \vec{u}_2 + \mu b \vec{u}_3 = \left(1 - \lambda' - \mu'\right) a\vec{u}_2 + \lambda' b \vec{u}_3 + \mu' b \vec{u}_1 =$$
$$= \left(1 - \lambda'' - \mu''\right) a\vec{u}_3 + \lambda'' b \vec{u}_1 + \mu'' b \vec{u}_2\ . \quad (3)$$

Motive de simetrie ne sugerează să considerăm $\lambda = \lambda' = \lambda''$ şi $\mu = \mu' = \mu''$ şi să căutăm λ, μ pentru care au loc egalităţile precedente. Egalând coordonatele corespunzătoare versorilor $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, obţinem sistemul

$$(1 - \lambda - \mu)\, a = \mu b = \lambda b, \quad \lambda b = (1 - \lambda - \mu)\, a = \mu b, \quad \mu b = \lambda b = (1 - \lambda - \mu)\, a$$

care are soluţia unică $\lambda = \mu = \dfrac{a}{2a+b}$. Ca urmare, relaţiile (3) devine

$$\vec{r}_P = \overrightarrow{OP} = \frac{ab}{2a+b}\left(\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3\right). \tag{4}$$

În mod analog, în privinţa punctului Q găsim

$$\vec{r}_Q = \overrightarrow{OQ} = \frac{ab}{a+2b}\left(\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3\right). \tag{5}$$

În sfârşit, avem următoarele

$$\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{ab}{a+2b} - \frac{ab}{2a+b}\right)\left(\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3\right),$$

$$PQ^2 = \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{ab}{a+2b} - \frac{ab}{2a+b}\right)^2 \left(\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3\right)\left(\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3\right) =$$

$$= \frac{a^2b^2\left(a-b\right)^2}{\left(a+2b\right)\left(2a+b\right)}\left(3 + 2\cos\alpha + 2\cos\beta + 2\cos\gamma\right),$$

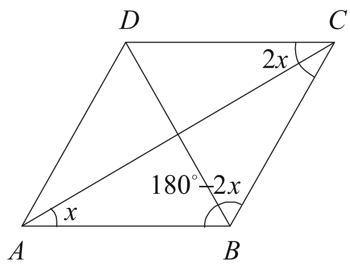
deci

$$PQ = \frac{ab\left(a-b\right)}{\sqrt{\left(a+2b\right)\left(2a+b\right)}}\sqrt{3 + 2\left(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma\right)}.$$

L59. *Care este probabilitatea ca latura şi diagonalele unui romb, luat la întâmplare, să fie laturile unui triunghi?*

Petru Minuţ, Iaşi

Soluţie. Proprietatea de a putea construi un triunghi cu laturile congruente cu latura şi diagonalele unui romb este adevărată sau nu pentru toate romburile din plan dintr-o clasă de romburi asemenea. Este suficient să rezolvăm problema pentru romburile a căror laturi au lungimea egală cu 1. Un asemenea romb este determinat de unghiul pe care îl formează diagonala cea mai lungă cu una dintre laturile rombului; notăm măsura acestui unghi cu x. Mulţimea cazurilor posibile este $D = \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.



Din triunghiul BCD, conform teoremei cosinusului, avem

$$d_1^2 = BD^2 = BC^2 + DC^2 - 2\,BC\,CD\,\cos 2x =$$
$$= 2 - 2\cos 2x = 4\sin^2 x \Rightarrow d_1 = 2\sin x.$$

Analog, din $\triangle ABC$, se obţine că $d_2 = AC = 2\cos x$. Din $0 < x \le \dfrac{\pi}{4}$ rezultă că $d_1 = 2\sin x \le \sqrt{2}$ şi $d_2 = 2\cos x \ge \sqrt{2}$. Dintre numerele $l = 1$, $d_1 = 2\sin x$, $d_2 = 2\sin x$ cel mai mare este d_2. Putem construi un triunghi cu laturile având aceste lungimi, dacă şi numai dacă $l + d_1 > d_2 \Leftrightarrow 1 + 2\sin x > 2\cos x$. Notând $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$, avem

$$1 + \frac{4t}{1+t^2} > \frac{1-t^2}{1+t^2} \Leftrightarrow 3t^2 + 4t - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}-2}{3}, \frac{\pi}{4}\right].$$

Domeniul valorilor posibile este $D_0 = \left(2\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{7}-2}{3}, \dfrac{\pi}{4}\right]$. Proprietatea cerută este

$$p = \frac{\text{mes}\, D_0}{\text{mes}\, D} = \frac{\dfrac{\pi}{4} - 2\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{7}-2}{3}}{\dfrac{\pi}{4}} = 1 - \frac{8\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{7}-2}{3}}{\pi}.$$

L60. *Fie $A_1A_2\ldots A_n$ şi $B_1B_2\ldots B_n$ $(n>2)$ două poligoane înscrise în acelaşi cerc de centru O şi având centrele de greutate tot în O. Să se arate că putem renumerota vârfurile poligonului $A_1A_2\ldots A_n$ pentru a obţine un nou poligon $A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_n}$ în care $A_{i_j} \neq B_j$ pentru $j \in \{1,2,\ldots,n\}$.*

Gabriel Dospinescu, student, Bucureşti

Soluţie. Trebuie să arătăm că există o permutare $\sigma \in S_n$ astfel încât $A_{\sigma(1)} \neq B_i$ pentru $i \in M = \{1,2,\ldots,n\}$. Să definim matricea $T = (t_{ij})_{i,j\in M}$, $t_{ij} = A_iB_j^2$. Vom arăta că sumele elementelor de pe orice linie şi coloană în T sunt egale. Putem presupune că poligoanele sunt înscrise în cercul unitate (O fiind originea planului complex) şi fie a_i, b_i afixele punctelor A_i, B_i. Suma elementelor de pe linia i în matricea T este

$$\sum_{j=1}^{n} |a_i - b_j|^2 = \sum_{j=1}^{n}\left(|a_i| + |b_j|^2 - a_i\bar{b}_j - \bar{a}_i b_j\right) = 2n - a_i\overline{\sum_{j=1}^{n} b_j} - \bar{a}_i\sum_{j=1}^{n} b_j = 2n$$

(am folosit faptul că centrul de greutate al poligonului $B_1B_2\ldots B_n$ este O, deci $\sum\limits_{j=1}^{n} b_j = 0$).

Analog, suma elementelor de pe coloana j a matricei T este $2n$. Să presupunem că pentru orice permutare $\sigma \in S_n$ există i astfel încât $t_{i\sigma(i)} = 0$. Vom spune: *"coloana R_i place linia S_j"* dacă elementul de la intersecţia liniei si coloanei este nenul în matricea T. Rezultă că nu putem asocia câte o linie distinctă fiecărei coloane astfel încât coloanele respective să placă liniile asociate lor. Deci, din lema mariajelor, rezultă că există $k>0$ şi k coloane ce plac cel mult $k-1$ linii. Prin permutări de linii şi coloane, putem presupune că aceste linii şi coloane sunt primele din matricea T. Să facem suma elementelor dreptunghiului determinat de aceste $k-1$ linii şi k coloane. În dreptunghiul determinat de primele k coloane şi ultimele $n-k+1$ linii avem numai zerouri (căci cele k coloane nu plac nici una dintre liniile k, $k+1$, $\ldots$, n), deci suma elementelor din dreptunghi este egală cu suma elementelor de pe primele k coloane, adică $2nk$. Pe de altă parte, evident, suma este cel mult cât suma elementelor de pe primele $k-1$ linii, adică $2n(k-1)$. Deducem că $2n(k-1) \geq 2nk$, contradicţie.

L61. *Fie $n \geq 3$. Să se determine maximul expresiei*

$$E = x_1^3x_2^2 + x_2^3x_3^2 + \cdots + x_n^3x_1^2 + (n-1)^{2(n-1)}x_1^3x_2^3\cdots x_n^3,$$

când numerele nenegative x_1, x_2, $\ldots$, x_n au suma 1.

Gabriel Dospinescu, student, Bucureşti

Soluţie. Pentru $x_1 = \dfrac{3}{5}$, $x_2 = \dfrac{2}{5}$, $x_k = 0$, $\forall k \in \overline{3,n}$, obţinem pentru E valoarea $\dfrac{108}{3125} = \dfrac{2^2\,3^3}{5^5}$, deci maximul cerut este cel puţin $\dfrac{108}{3125}$. Să demonstrăm că maximul lui E este cel mult $\frac{108}{3125}$. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ cu suma 1, fixate. Permutând ciclic variabilele, putem presupune că $x_1 = \max x_k$. Conform inegalităţii mediilor, avem

$$1 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_1}{3} + \frac{x_1}{3} + \frac{x_2 + \cdots + x_n}{2} + \frac{x_2 + \cdots + x_n}{2} \geq 5 \sqrt[5]{\frac{x_1^3 \left(x_2 + \cdots + x_n\right)^2}{3^3\, 2^2}},$$

deci este suficient să demonstrăm că

$$x_1^3 \left(x_2 + \cdots + x_n\right)^2 \geq x_1^3 x_2^2 + \cdots + x_n^3 x_1^2 + (n-1)^{2(n-1)}\, x_1^3 x_2^3 \cdots x_n^3\ . \tag{1}$$

Însă

$$\begin{aligned} x_1^3 \left(x_2 + \cdots + x_n\right)^2 &\geq 2\left(x_1^3 x_2 x_3 + \cdots + x_1^3 x_{n-1} x_n\right) + x_1^3 x_2^2 + x_1^3 x_n^2 \geq \\ &\geq \left(x_1^3 x_2 x_3 + \cdots + x_1^3 x_{n-1} x_n\right) + \left(x_2^3 x_3^2 + \cdots + x_{n-1}^3 x_n^2\right) + x_1^3 x_2^2 + x_1^3 x_n^2 \geq \\ &\geq x_1^3 x_2 x_3 + x_1^3 x_2^2 + \left(x_2^3 x_3^2 + \cdots + x_{n-1}^3 x_n^2\right) + x_1^3 x_n^2 \geq \\ &\geq x_1^3 x_2 x_3 + x_1^3 x_2^2 + \left(x_2^3 x_3^2 + \cdots + x_{n-1}^3 x_n^2\right) + x_n^3 x_1^2, \end{aligned}$$

unde de fiecare dată am folosit faptul că $x_1 = \max x_k$. În aceste condiţii, pentru a demonstra (1) este suficient să arătăm că

$$x_1^3 x_2 x_3 \geq (n-1)^{2(n-1)}\, x_1^3 x_2^3 \cdots x_n^3\ . \tag{2}$$

Pentru $n = 3$, aceasta se scrie $x_2 x_3 \leq \frac{1}{4}$ şi rezultă din $x_2 x_3 \leq \left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$, iar pentru $n > 3$, (2) se scrie sub forma

$$x_2^2 x_3^2 x_4^3 \cdots x_n^3 \leq \frac{1}{(n-1)^{2(n-1)}}$$

şi rezultă din

$$x_2^2 x_3^2 x_4^3 \cdots x_n^3 \leq \left(x_2 x_3 \cdots x_n\right)^2 \leq \left(\frac{x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n-1}\right)^{2(n-1)} \leq \frac{1}{(n-1)^{2(n-1)}}\ .$$

Rezolvarea este astfel încheiată.

L62. *Rezolvaţi ecuaţia* $2x^2 = y\,(y+1)$*;* $x, y \in \mathbb{N}$.

Mircea Bîrsan, Iaşi

Soluţia I. *Cazul* $y = 2h$, $h \in \mathbb{N}$. Ecuaţia dată devine $x^2 = h\,(2h+1)$ şi, întrucât $(h, 2h+1) = 1$, urmează că h, $2h+1$ sunt pătrate perfecte, adică $\exists m, n \in \mathbb{N}$ a.î. $h = n^2$ şi $2h + 1 = m^2$. De aici rezultă că m şi n trebuie să satisfacă ecuaţia Pell

$$m^2 - 2n^2 = 1, \tag{1}$$

iar soluţiile ecuaţiei iniţiale sunt date de

$$x = mn, \quad y = 2n^2. \tag{2}$$

Observăm că $(3, 2)$ este cea mai mică soluţie nebanală a ecuaţiei (1) şi, după cum este cunoscut, soluţiile ecuaţiei (1) în $\mathbb{N}$ sunt perechile $(m_k, n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ cu

$$m_k = \frac{1}{2}\left[\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^k + \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^k\right], \quad n_k = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^k - \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^k\right]. \tag{3}$$

În conformitate cu (2), soluţiile ecuaţiei date, în cazul y par, sunt perechile $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}}$; unde

$$x_k = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)^{2k} - \left(3-2\sqrt{2}\right)^{2k}\right], \quad y_k = \frac{1}{4}\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)^{2k} + \left(3-2\sqrt{2}\right)^{2k} - 2\right]. \tag{4}$$

Cazul $y = 2l-1$, $l\in\mathbb{N}^*$. Urmăm calea din cazul precedent. Ecuaţia din enunţ se scrie $x^2 = l\,(2l-1)$. Deoarece $(l, 2l-1) = 1$, aceste numere sunt de forma $l = \bar{m}^2$, $2l-1 = \bar{n}^2$. Rezultă că $\bar{m}$ şi $\bar{n}$ verifică următoarea ecuaţie Pell conjugată ecuaţiei (1)

$$2\bar{m}^2 - \bar{n}^2 = 1, \tag{5}$$

iar pentru ecuaţia dată avem

$$x = \bar{m}\,\bar{n}, \quad y = 2\bar{m}^2 - 1. \tag{6}$$

Cum $(1,1)$ este cea mai mică soluţie nebanală a ecuaţiei (5), soluţiile acestei ecuaţii sunt perechile $(\bar{m}_k, \bar{n}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ cu

$$\bar{m}_k = m_k + n_k, \quad \bar{n}_k = m_k + 2n_k,$$

unde $(m_k, n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sunt soluţiile ecuaţiei (1) date de relaţiile (3) (**T. Andreescu, D. Andrica** - *Asupra rezolvării în numere naturale a ecuaţiei* $ax^2 - by^2 = 1$, GM - 4/1980, p. 146-148). Ţinând seama de (6), ecuaţia din enunţ are, în cazul y impar, soluţiile $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ cu

$$\bar{x}_k = (m_k + n_k)(m_k + 2n_k), \quad \bar{y}_k = 2\,(m_k+n_k)^2 - 1, \tag{7}$$

unde m_k, n_k sunt date de (3).

În concluzie, mulţimea soluţiilor este formată din $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ şi $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ cu x_k, y_k, $\bar{x}_k$, $\bar{y}_k$ date de (4), (7) şi (3).

Soluţia II. Observăm că ecuaţia dată admite soluţiile banale $x = y = 0$ şi $x = y = 1$. Căutăm soluţiile (x,y) cu $x, y \notin \{0,1\}$.

Cazul $y = 2h$, $h\in\mathbb{N}^*$. Ca mai sus, $\exists m, n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $h = n^2$ şi $2h+1 = m^2$; deci m, n satisfac relaţia $2n^2 + 1 - m^2$. Rezultă că m este impar şi n este par, adică $m = 2k+1$, $n = 2l$ cu $k, l\in\mathbb{N}^*$. Înlocuind în relaţia precedentă, obţinem $2l^2 = k\,(k+1)$. Aşadar, dacă (x,y) este o soluţie nenulă a ecuaţiei date cu y par, atunci există o altă soluţie nenulă (l,k) astfel încât

$$x = 2l\,(2k+1), \quad y = 8l^2, \quad \text{şi} \quad x > l,\ y > k. \tag{1}$$

Cazul $y = 2h+1$, $h\in\mathbb{N}^*$. Procedând asemănător, dar după calcule puţin mai complicate, ajungem la concluzia că pentru orice soluţie nebanală (x,y) a ecuaţiei date, cu y impar, există o soluţie nenulă (u,v) a acesteia astfel încât

$$x = (4u+2v+1)(2u+2v+1), \quad y = (4u+2v+1)^2 \quad \text{şi} \quad x > u,\ y > v. \tag{2}$$

Rezultă că oricare ar fi o soluţie (x,y) a ecuaţiei date diferită de $(0,0)$ şi $(1,1)$, după un număr finit de paşi în care se găsesc, recursiv, soluţii mai mici determinate prin relaţii de tipul (1) sau (2), vom obţine soluţia $(1,1)$. Cu alte cuvinte, mulţimea S a soluţiilor este dată de $S = \{(0,0)\} \cup \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} S_n$, unde $S_0 = \{(1,1)\}$ şi $S_{n+1} = \left\{\left(2i\,(2j+1), 8i^2\right), \left((4i+2j+1)(2i+2j+1), (4i+2j+1)^2\right) \mid (i,j)\in S_n\right\}$, $n\in\mathbb{N}$. Mai observăm că S_m şi S_n sunt disjuncte pentru $m\neq n$ şi $\operatorname{card}(S_n) = 2^n$.

L63. *Fie $G \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un grup netrivial în raport cu produsul uzual al matricelor. Presupunem că există $X \in G$ astfel încât pe fiecare linie, respectiv coloană a sa să existe cel mult un element nenul şi acesta egal cu 1. Să se demonstreze că există $k \in \{1, 2, \ldots n\}$ astfel încât G este izomorf cu un subgrup al lui $GL_k(\mathbb{R})$ (s-a notat $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$).*

Ovidiu Munteanu, Braşov

Soluţie. Vom spune că o matrice A are proprietatea (P), dacă pe fiecare linie, respectiv coloană a sa există cel mult un element nenul, şi acesta egal cu 1. Cum produsul a două matrici cu proprietatea (P) are proprietatea (P) rezultă că şi X^2, X^3, X^4, ... au proprietatea (P). Dar, cum există un număr finit de matrici de ordin n cu elemente 0 sau 1 rezultă că mulţimea $\left\{X, X^2, X^3, \ldots\right\}$ este finită, deci $\exists k, h \geq 1$, $k > h$, astfel încât $X^k = X^h$. Acum, simplificând în G, vom obţine $X^{k-h} = E$, unde E este elementul neutru în G. Avem deci că E are proprietatea (P) şi $E^2 = E$. Fie $E = (e_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$; să presupunem că $\exists i, j$ astfel ca $e_{ij} = 1$; rezultă că $1 = \sum\limits_{k=\overline{1,n}} e_{ik}e_{kj}$, deci $\exists s$ astfel ca $e_{is} = e_{sj} = 1$. Dar, pe linia i a lui E nu se află două elemente egale cu 1, deci $s = j$. Totodată, pe coloana j nu se află două elemente egale cu 1, deci $s = i$. Rezultă $i = j$, adică eventualele elemente nenule ale lui E sunt pe diagonala principală. Evident $E \neq O_n$ deoarece G este netrivial. Vom presupune acum că elementele nenule ale lui E sunt $e_{i_1 j_1} = 1, \ldots, e_{i_r j_r} = 1$. (1)

Fie $A \in G$ oarecare; $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$. Din $A = AE = EA$ rezultă că $a_{ij} = \sum\limits_{k=\overline{1,n}} a_{ik}e_{kj} = \sum\limits_{k=\overline{1,n}} e_{ik}a_{kj}$. Folosind (1) va rezulta că singurele elemente nenule ale lui A pot fi din mulţimea $\{A_{i_s j_t}\}_{s,t=\overline{1,r}}$. Fie aplicaţia Φ care asociază matricei A matricea $\widetilde{A} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, $\widetilde{A} = (a_{i_s j_t})_{s,t=\overline{1,r}}$. Evident, $\widetilde{E} = I_r$ şi $\Phi : G \to \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ este morfism injectiv şi unitar de monoizi. Întrucât $(G, \cdot)$ este grup şi Φ este unitar, rezultă că $\Phi(G) \subset GL_r(\mathbb{R})$. Prin urmare, G este izomorf cu $\Phi(G)$, care este subgrup al lui $GL_r(\mathbb{R})$.

L64. *Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin: $x_1, x_2 \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+2} = \dfrac{[x_{n+1}, x_n]}{x_{n+1}}$, $n \geq 1$. Dacă $x_{2003} = 2004$, demonstraţi că şirul nu este convergent.*

Iuliana Georgescu şi Paul Georgescu, Iaşi

Soluţie. Se observă că $x_n \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \geq 1$. În plus, $x_{n+2} \leq \dfrac{x_{n+1}x_n}{x_{n+1}} = x_n$, deci $(x_{2n})_{n\geq 1}$ şi $(x_{2n-1})_{n\geq 1}$ sunt monoton descrescătoare şi, cum sunt şiruri de numere naturale, sunt constante de la un loc încolo, egale cu a, respectiv cu b. Astfel, pentru n suficient de mare, $b = \dfrac{[a,b]}{a}$, deci $(a,b) = 1$. Să presupunem prin absurd că $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent; atunci $a = b = 1$. Fie i_0 indicele primului termen din şir care este egal cu 1; avem că $i_0 > 1$ deoarece $x_1 \geq x_{2003} > 1$ şi fie $x_{i_0 - 1} = a > 1$. Avem că $x_{i_0+1} = \dfrac{[1,a]}{1} = a$, $x_{i_0+2} = \dfrac{[a,1]}{a} = 1$ şi, prin inducţie, $x_{i_0+2k+1} = a$, $x_{i_0+2k} = 1$, $\forall k \geq 0$. Acest fapt intră în contradicţie cu convergenţa şirului, fapt ce încheie rezolvarea.

L65. *Fie $n \in \mathbb{N}$ şi funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde $f(x) = x^{2n}\cos(1/x)$, $\forall x < 0$, $f(0) = 0$, $f(x) = x^{2n}\sin(1/x)$, $\forall x > 0$, iar $g(x) = x^{2n+1}\sin(1/x)$, $\forall x < 0$,*

$g(0) = 0$ şi $g(x) = x^{2n+1}\cos(1/x)$, $\forall x > 0$. Să se afle cel mai înalt ordin de derivabiliate al acestor funcţii şi să se studieze problema continuităţii acestor derivate în origine.

Gheorghe Costovici, Iaşi

Soluţie. Se arată că f şi g sunt derivabile de ordin n, $f^{(n)}$ este discontinuă în origine şi $g^{(n)}$ este continuă în origine. Aceste afirmaţii decurg din următorul rezultat cunoscut (*American Mathematical Monthly*; 54(1947), p. 224 şi 55(1948), p. 97): *funcţia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $h(0) = 0$ şi $h(x) = x^k \sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, este derivabilă de m ori dacă $k = 2m$ sau $k = 2m+1$ şi $h^{(m)}$ este discontinuă sau continuă în $x = 0$ după cum $k = 2m$ sau $k = 2m+1$.* Pentru demonstraţia acestuia se stabileşte prin inducţie completă că

$$h^{(r)}(x) = P_r(x)\sin\frac{1}{x} + Q_r(x)\cos\frac{1}{x}, \quad x \neq 0,\ 0 \leq r \leq m,$$

unde P_r, Q_r sunt funcţii polinomiale cu proprietăţile:

1) sunt de grad $k - 2r$,
2) $f^{(r)}(0) = 0$, $0 \leq r \leq m$,
3) dacă $k = 2m$, atunci sau P_m sau Q_m are termen liber nenul,
4) dacă $k = 2m+1$, atunci P_m şi Q_m au termenii liberi nuli.

Recreaţii ... matematice

Truelul (răspuns la întrebarea pusă la p. 20)

Să examinăm posibilităţile lui X. Prima ar fi ca X să tragă asupra lui Y. Dacă Y este ucis, atunci următoarea lovitură revine lui Z. Dar Z nu mai are decât un singur adversar şi, cum Z este trăgător prefect, X va fi un om mort.

O opţiune mai bună este să ţintească asupra lui Z. Dacă îl doboară, atunci următoarea lovitură va reveni lui Y. Cum Y nimereşte ţinta de două ori din trei, există o şansă ca X să tragă la rândul lui asupra lui Y şi eventual să câştige truelul.

Exista însă o a treia opţiune pe care o poate adopta X, mai bună decât precedentele: X poate să tragă în aer. Va urma Y, care va ţinti asupra lui Z, căci acesta este adversarul cel mai periculos. Dacă Z supravieţueşte, el va trage în Y, fiindcă acesta este adversarul mai periculos. Ca urmare, trăgând în aer, X îi permite lui Y să-l elimine pe Z şi invers.

Aceasta este cea mai bună strategie a lui X: în cele din urmă Y sau Z va muri şi X va trage asupra supravieţuitorului, oricare ar fi el. X a manevrat astfel încât, în loc de prima lovitură într-un truel, să aibă prima lovitură într-un duel.