Soluţiile problemelor propuse în nr. 1 / 2003

Clasele primare

P.44. *Un vecin al unui vecin al numărului* 81 *este egal cu un vecin al unui vecin al numărului* 77. *Despre ce număr este vorba?*

(*Clasa I*) **Mihaela Rusu, elevă, Iaşi**

Soluţie. Acest număr trebuie să fie mai mare ca 77 şi mai mic decât 81. Numărul se află în secvenţa 77□□□81. Este vorba despre numărul 79.

P.45. *Adunând trei numere naturale* a, b, c *obţinem suma* 62. *Primul număr este mai mare decât al treilea şi împreună au suma* 12. *Care sunt cele trei numere?*

(*Clasa* a *II-a*) **Înv. Maria Racu, Iaşi**

Soluţie. Numărul $b = 62 - 12 = 50$. Perechea (a, c) poate fi: $(12, 0)$; $(11, 1)$; $(10, 2)$; $(9, 3)$; $(8, 4)$ sau $(7, 5)$. Tripletul (a, b, c) poate lua valorile: $(12, 50, 0)$; $(11, 50, 1)$; $(10, 50, 2)$; $(9, 50, 3)$; $(8, 50, 4)$ sau $(7, 50, 5)$.

P.46. *Mihai, Dan şi Petru practică fiecare un alt fel de sport şi anume: tenis, fotbal sau volei. Mihai şi voleibalistul locuiesc în acelaşi bloc. Cel care joacă volei şi cel care joacă fotbal l-au urmărit pe Petru la un meci. Ce sport practică fiecare?*

(*Clasa a II-a*) **Adina Dohotaru, elevă, Iaşi**

Soluţie. Din textul problemei se deduce că Petru nu joacă volei sau fotbal, deci el joacă tenis. Mihai şi voleibalistul locuiesc în acelaşi bloc. Aceasta înseamnă că Mihai nu joacă volei. Soluţia problemei este: Petru joacă tenis, Mihai joacă fotbal şi Dan joacă volei.

P.47. *Diferenţa a două numere este* 48. *Această diferenţă este cu* 22 *mai mare decât jumătatea unuia dintre ele. Determinaţi numerele.*

(*Clasa a III-a*) **Înv. Rodica Rotaru, Bârlad**

Soluţie. Fie $a - b = 48$. Avem două cazuri: 1) $48 = b : 2 + 22$ de unde obţinem $b = 52$ şi $a = 100$. 2) $48 = a : 2 + 22$ de unde obţinem $a = 52$ şi $b = 4$.

P.48. *Un agricultor împarte un teren în trei parcele. În fiecare an, fiecare parcelă este cultivată numai cu una din culturile: grâu, porumb sau legume. Începând cu anul* 2003, *agricultorul se hotărăşte ca pe fiecare parcelă să fie altă cultură în trei ani consecutivi.*

a) Care este primul an după 2003 *în care se repetă culturile pe cele trei parcele?*

b) Se poate preciza care este ordinea culturilor pe cele trei parcele în anul 2019*?*

(*Clasa a III-a*) **Andreea Surugiu, elevă, Iaşi**

Soluţie. Presupunem că în anul 2003 avem ordinea (grâu, legume, porumb). În anul 2004 putem avea (legume, porumb, grâu) sau (porumb, grâu, legume). În anul 2005 putem avea (porumb, grâu, legume) sau (legume, porumb, grâu). În 2006 avem din nou ordinea (grâu, legume, porumb). Răspunsul la a) este anul 2006. b) Ordinea culturilor se mai repetă în 2009, 2012, 2015, 2018. Nu putem preciza ordinea culturilor în anul 2019.

P.49. *La un moment dat, cerând unei persoane anul naşterii, aceasta răspunde: "anul acesta împlinesc* 25 *ani, iar dacă aş scrie toate numerele începând cu* 1 *şi terminând cu anul naşterii şi apoi toate numerele începând cu* 1 *şi terminând cu*

anul în care ne aflăm mi-ar trebui 13710 *cifre. În ce an ne aflam când am pus întrebarea?*
(*Clasa a III-a*) **Prof. Cătălin - Cristian Budeanu, Iaşi**

Soluţie. Pentru scrierea numerelor de la $1-999$ sunt necesare 2889 cifre. Rezultă că anul naşterii nu poate fi format din trei cifre. Într-adevăr, $2\cdot 2889+25\cdot n<13710$, $n\leq 4$. Anul naşterii este de forma $\overline{abcd}$. Fie x numărul cifrelor pentru scrierea numerelor de la 1 la $\overline{abcd}$. Transpunând în ecuaţie ceea ce a spus persoana, obţinem: $x+(x+4\cdot 25)=13710$, cu soluţia $x=6805$. Pentru scrierea numerelor de la 1000 la $\overline{abcd}$ sunt necesare $6805-2889=3916$ cifre, ceea ce înseamnă că de la 100 la $\overline{abcd}$ sunt $3916:4=979$ numere. Înseamnă că anul $\overline{abcd}$ este 1978. Întrebarea a fost pusă în anul $1978+25=2003$.

P.50. *a*) *Câte numere trebuie adăugate şirului* $1,2,4,5,7,8,\ldots,97,98$ *pentru a obţine toate numerele de la* 1 *la* 98*?*

b) *Efectuaţi* $1+2+4+5+7+8+\cdots+97+98-2\cdot(3+4+5+\cdots+34)$.
(*Clasa a IV-a*) **Georgiana Ciobanu, elevă, Iaşi**

Soluţie. *a*) Lipsesc numerele: $3,6,9,\ldots 96$ care pot fi scrise: $3\cdot 1$, $3\cdot 2$, $3\cdot 3,\ldots$, $3\cdot 32$. Se observă că lipsesc 32 numere.

b) Expresia de calculat se poate scrie:

$$1+2+(4-3)+(5-3)+(7-4)+(8-4)+\cdots+(97-34)+(98-34)=$$
$$=1+2+(1+2+3+4+\cdots+63+64)=3+64\cdot 65:2=3+2080=2083.$$

P.51. *Produsul a două numere naturale este* 913 368. *Unul din numere are cifra unităţilor şi cifra zecilor mai mare ca* 2 *şi mai mică decât* 8. *Dacă la acest număr mărim cifra zecilor cu* 2 *şi micşorăm cifra unităţilor cu* 1, *obţinem un produs egal cu* 951 425. *Aflaţi cele două numere.*
(*Clasa a IV-a*) **Înv. Elena Zărnescu, Iaşi**

Soluţie. Fie a şi b numerele căutate. Obţinem

$$(a+20-1)\cdot b=951425\Leftrightarrow ab+19b=951425\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 913368+19b=951425\Leftrightarrow b=2003\Rightarrow a=913368:2003=456.$$

P.52. *În trei cutii sunt* 212 *bile. Din prima cutie se scoate un număr de bile, din a doua de* 2 *ori mai mult şi încă două bile, din a treia se scoate cât triplul numărului de bile scos din a doua cutie. În fiecare cutie rămâne un număr de bile egal cu numărul total al bilelor scos din cele trei cutii la un loc. Câte bile au fost în fiecare cutie?*
(*Clasa a IV-a*) **Înv. Maria Racu, Iaşi**

Soluţie. Notăm cu p numărul bilelor scos din prima cutie. Rezultă că în fiecare cutie rămân $9p+8$ bile. Deducem că în toate cutiile au fost $36p+32$ bile. Aşadar, $36p+32=212$, de unde $p=5$. În cele trei cutii au fost 58, 65, respectiv 89 bile.

P.53. *Efectuând o singură cântărire, să se ia* 475 *g dintr-un kilogram de zahăr utilizând două greutăţi, una de* 200 *g şi cealaltă de* 150 *g.*
(*Clasa a IV-a*) **Prof. Petru Asaftei, Iaşi**

Soluţie. Utilizăm o balanţă cu braţe egale. Distribuim kilogramul de zahăr şi câte una din cele două greutăţi, pe cele două talere, până realizăm poziţia de echilibru. Pe fiecare taler vom avea 675 g. Masa căutată este pe talerul în care se află greutatea de 200 g: 675 g − 200 g = 475 g zahăr.

Clasa a V-a

V.36. *Fie n un număr impar, iar $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$ numere care împărţite la n dau câturi distincte şi resturi distincte. Arătaţi că valoarea minimă a sumei $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ este multiplu de 12.*

Dragoş Ungureanu, elev, Iaşi

Soluţie. Conform ipotezei, avem: $a_1 = nc_1 + r_1$, $a_2 = nc_2 + r_2, \ldots, a_n = nc_n + r_n$, unde $\{r_1, r_2, \ldots, r_n\} = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Astfel, suma

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n(c_1 + c_2 + \cdots + c_n) + \frac{n(n-1)}{2}$$

este minimă dacă $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\} = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, deci

$$S_{\min} = n\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)(n+1)}{2}.$$

Cum n este impar, rezultă că $(n-1)(n+1) \,\vdots\, 8$, deci $S_{\min} \,\vdots\, 4$. Pe de altă parte, deoarece n, $n-1$, $n+1$ sunt numere consecutive, rezultă că $S_{\min} \,\vdots\, 3$. Prin urmare, $S_{\min}$ este multiplu de 12.

V.37. *Comparaţi fracţiile $a = \frac{333331}{333334}$ şi $b = \frac{222221}{222223}$.*

Maria Cojocaru, Iaşi

Soluţie. Avem $\frac{1}{a} = 1 + \frac{3}{333331}$ şi $\frac{1}{b} = 1 + \frac{2}{222221}$. Cum $3 \cdot 222221 > 2 \cdot 333331$, rezultă că $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, deci $b > a$.

V.38. *Să se arate că $2^a + 2^b + 2^c + 2^d + 2^e \neq 2003$, $\forall a, b, c, d, e \in \mathbb{N}$.*

Irina Ispas, studentă, Iaşi

Soluţie. Presupunem că există cinci numere naturale $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ astfel încât

$$2^a + 2^b + 2^c + 2^d + 2^e = 2003. \tag{1}$$

Dacă $a \neq 0$, atunci termenul din stânga al egalităţii (1) este par şi atunci avem o contradicţie. Pentru $a = 0$, relaţia (1) devine: $2^b + 2^c + 2^d + 2^e = 2002$. Deoarece $2^{10} = 1024$, rezultă că numai e ar putea avea, eventual, valoarea 10.

Dacă $e = 10$, atunci $2^b + 2^c + 2^d = 978$. În acest caz, dacă $b, c, d \leq 8$, atunci $2^b + 2^c + 2^d \leq 3 \cdot 256 < 978$. Aşadar, $d = 9$ şi $2^b + 2^c = 466$, ceea ce nu este posibil.

Dacă toate numerele b, c, d, e sunt strict mai mici ca 10, se observă că cel mult trei numere pot fi 9 (altfel avem $2^b + 2^c + 2^d + 2^e \geq 4 \cdot 512 > 2002$) şi cel puţin trei trebuie să fie 9 (deoarece, în caz contrar, avem $2^b + 2^c + 2^d + 2^e < 2^9 + 2^9 + 2^8 + 2^8 < 2002$). Prin urmare, $c = d = e = 9$ şi atunci $2^b = 2002 - 3 \cdot 2^9 = 476$, absurd.

V.39. *Să se determine numerele prime $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$ astfel încât numerele $p_1 + p_2 + p_3 + p_4$, $p_3 - p_2$, $p_4 - p_3$ să fie, de asemenea, prime.*

Petru Minuţ, Iaşi

Soluţie. Deoarece $p_1 + p_2 + p_3 + p_4$ este un număr prim mai mare ca 2, rezultă că el este impar şi atunci unul dintre numerele p_1, p_2, p_3, p_4 trebuie să fie par, deci $p_1 = 2$. Cum p_2, p_3 şi p_4 sunt impare, înseamnă că $p_3 - p_2$ şi $p_4 - p_3$ sunt pare şi având în vedere că sunt prime, rezultă că $p_3 - p_2 = p_4 - p_3 = 2$. De aici, deducem că $p_3 = p_2 + 2$ şi $p_4 = p_2 + 4$. Se observă că $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ şi $p_4 = 7$ este o soluţie a problemei ($2 + 3 + 5 + 7 = 17$ este număr prim). Dacă $p_2 > 3$, atunci $p_2 = 3k + 1$ sau $p_2 = 3k + 2$, $k \in \mathbb{N}^*$. În cazul $p_2 = 3k + 1$, avem $p_3 = 3k + 3$ care nu este prim, iar în cazul $p_2 = 3k + 2$, avem $p_4 = 3k + 6$, care nu este prim. Aşadar, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$ este singura soluţie.

V.40. *Este posibilă o partiţionare a mulţimii* $\{1, 2, \ldots, 12n + 9\}$ *în* $4n + 3$ *submulţimi disjuncte, fiecare cu câte trei elemente, astfel încât în fiecare submulţime un element să fie suma celorlaltor două?*

Titu Zvonaru, Bucureşti

Soluţia I. Fie $\{a, b, c\}$ o mulţime astfel încât $a = b + c$. De aici, rezultă că elementele mulţimii $\{a, b, c\}$ sunt ori toate pare, ori două impare şi unul par. Aşadar, pentru ca să fie posibilă o partiţie ca în problemă, trebuie ca mulţimea dată să conţină un număr par de numere impare. Deoarece mulţimea dată are $6n+5$ numere impare, rezultă că partiţionarea nu este posibilă.

Soluţia II. Să presupunem că ar fi posibilă o partiţie în condiţiile impuse. Atunci, fiecare din cele $4n + 3$ submulţimi de trei elemente are suma elementelor egală cu un număr par, deci suma elementelor mulţimii $\{1, 2, \ldots, 12n + 9\}$ ar trebui să fie număr par. Cum, $1 + 2 + \cdots + 12n + 9 = \dfrac{(12n + 10)(12n + 9)}{2} = (6n + 5)(12n + 5)$, care este un număr impar, rezultă că partiţionarea cerută nu este posibilă.

Clasa a VI-a

VI.36. *Fie* $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$. *Arătaţi că printre valorile naturale ale lui* n *care fac adevărată propoziţia* $n^2 + k \,\vdots\, n + k$, *există cel puţin trei pătrate perfecte.*

Claudiu Ştefan Popa, Iaşi

Soluţie. Din $n^2 + k = n^2 - k^2 + k^2 + k = (n - k)(n + k) + k^2 + k$, rezultă că $n^2+k \,\vdots\, n+k$ dacă şi numai dacă $k^2+k \,\vdots\, n+k$. Cum $A = \left\{k, k + 1, k^2 + k\right\} \subset D_{k^2+k}$, putem lua $n + k$ din mulţimea A şi atunci obţinem $n \in \left\{0, 1, k^2\right\}$. Astfel, am găsit trei pătrate perfecte care verifică cerinţa problemei.

VI.37. *Numerele* 1160, 1604 *şi* 2270 *dau acelaşi rest la împărţirea prin* n. *Aflaţi împărţitorul* n.

Cristian Lazăr, Iaşi

Soluţie. Conform ipotezei, avem: $1160 = nc_1 + r$, $1604 = nc_2 + r$, $2270 = nc_3 + r$, unde $r < n$ şi $r, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{N}$. Scăzând aceste egalităţi două câte două, obţinem $444 = n(c_2 - c_1)$, $666 = n(c_3 - c_2)$ şi $1110 = n(c_3 - c_1)$, deci n este divizor comun al numerelor 444, 666, 1110. Cum $(444, 666, 1110) = 222$ rezultă că $n \in \{1, 2, 3, 6, 37, 74, 111, 222\}$, valori care verifică ipoteza problemei.

VI.38. *Demonstraţi că nu există numere naturale* x, y, z *direct proporţionale cu trei numere naturale consecutive, astfel încât* $x + y + z$ *să fie număr prim.*

Alexandru Negrescu, elev, Botoşani

Soluţie. Dacă presupunem contrariul, avem

$$\frac{x}{n} = \frac{y}{n+1} = \frac{z}{n+2} = \frac{x+y+z}{3n+3}, \quad \text{cu } n \in \mathbb{N}^*. \tag{1}$$

De aici, obţinem că $3y = x + y + z$, deci $3 \,|\, x + y + z$, care împreună cu faptul că $x + y + z$ este prim ne conduce la concluzia că $x + y + z = 3$ şi deci $y = 1$. Înlocuind în relaţia (1), găsim $\dfrac{x}{n}=\dfrac{1}{n+1}$, adică $x=\dfrac{n}{n+1}$, care nu aparţine lui $\mathbb{N}$.

VI.39. *Radu şi Mihai joacă de mai multe ori un joc în urma căruia câştigătorul primeşte a puncte, iar cel care pierde primeşte b puncte* $(a,b\in N^*,\ a>b)$. *Dacă scorul final este* $61-49$ *în favoarea lui Radu, iar Mihai a câştigat* 4 *partide, aflaţi a şi b.*

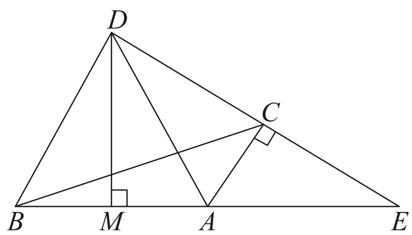
Adrian Zanoschi, Iaşi

Soluţie. Dacă notăm cu x numărul partidelor câştigate de Radu, avem: $xa+4b=$ $=61$, $4a+xb=49$, de unde obţinem că $(x+4)(a+b)=110$. De aici, având în vedere că $x+4\geq 9$ şi $a+b\geq 3$, rezultă că $x+4=22$ şi $a+b=5$ sau $x+4=11$ şi $a+b=10$ sau $x+4=10$ şi $a+b=11$. În primul caz, avem $x=18$, dar atunci $xa+4b$ este un număr par, diferit de 61, deci această situaţie nu convine. Procedând la fel, constatăm că nici al treilea caz nu convine. În al doilea caz, găsim $x=7$, $a=7$ şi $b=3$, care este soluţia problemei.

VI.40. *Fie* $\triangle ABC$ *cu* $m(\widehat{A})=120^\circ$. *Perpendiculara în C pe AC intersectează mediatoarea lui* $[AB]$ *în D; notăm* $\{E\}=CD\cap AB$. *Să se arate că* $AB=2AC$ *dacă şi numai dacă* $m(\widehat{BDE})=90^\circ$ *şi* $BE=2AB$.

Ioan Săcăleanu, Hârlău

Soluţie. Fie M mijlocul lui AB.



Presupunem că $AB=2AC$. În acest caz rezultă că $AM=AC$, deci $\widehat{CDA}=\widehat{ADM}=$ $=\widehat{MDB}=\alpha$. Cum suma unghiurilor patrulaterului $DMAC$ este 360°, obţinem că $\alpha=30^\circ$, deci $\widehat{BDE}=90^\circ$. Triunghiul DAB este isoscel şi are unghiul $\widehat{BDA}$ de 60°, adică este echilateral şi, prin urmare, $DA=AB$. În plus $\widehat{DBA}=60^\circ$, deci $\widehat{AEC}=30^\circ$. Atunci $\triangle ACD\equiv\triangle ACE$ (C.U.), de unde $AD=AE$. În concluzie, $BA=AD=AE$, adică $BE=2AB$.

Fie acum $\widehat{BDC}=90^\circ$ şi A mijlocul lui BE. Cum $AC\parallel BD$, rezultă că $[AC]$ este linie mijlocie în triunghiul BDE, deci $AC=\dfrac{1}{2}BD$. Din $\widehat{CAE}=60^\circ$ şi $CA\parallel BD$, obţinem că $\widehat{DBA}=60^\circ$, deci triunghiul DBA este echilateral, ceea ce conduce la concluzia $BD=AB$. Aşadar, avem $AC=\dfrac{1}{2}AB$ sau $AB=2AC$.

Clasa a VII-a

VII.36. *Să se arate că* $\sqrt{\dfrac{1}{n}}+\sqrt{\dfrac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\dfrac{2n-1}{n}}<2n-1$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

Cătălin Calistru, Iaşi

Soluţia I (un grup de elevi de la **Colegiul Naţional** din Iaşi şi **Alexandru Negrescu**, elev, Botoşani). Avem $\sqrt{\dfrac{k}{n}}<\dfrac{1+k/n}{2}=\dfrac{k+n}{2n}$, $\forall k=\overline{1,2n-1}$. Ca urmare,

$$\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{2n-1}{n}}<\frac{1}{2}\left[2n-1+\frac{1}{n}\left(1+\cdots+(2n-1)\right)\right]=$$

$$= \frac{1}{2}\left[2n-1+\frac{1}{n}\cdot\frac{(2n-1)\,2n}{2}\right] = 2n-1.$$

Soluţia II. Membrul din stânga al inegalităţii date se poate scrie grupând termenii de forma $\sqrt{\frac{n-k}{n}}$, $\sqrt{\frac{n+k}{n}}$, $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. În acest fel, obţinem $n-1$ paranteze şi termenul $\sqrt{\frac{n}{n}} = 1$. Deoarece

$$\left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}+\sqrt{\frac{n+k}{n}}\right)^2 = 2+2\sqrt{\frac{n-k}{n}}\sqrt{\frac{n+k}{n}} < 2+2\,\frac{\frac{n-k+n+k}{n}}{2} = 4,$$

rezultă că $\sqrt{\frac{n-k}{n}}+\sqrt{\frac{n+k}{n}} < 2$, de unde concluzia.

VII.37. *Arătaţi că în baza de numeraţie 7 printre numerele ce se scriu cu cifrele* $0, 1, 2$ *există o infinitate care sunt pătrate perfecte şi o infinitate ce nu sunt pătrate perfecte. Aceste afirmaţii rămân valabile dacă se folosesc cifrele* $3, 5, 6$*?*

Ruxandra Ioana Vâlcu, elevă, Iaşi

Soluţie. Se observă că $\underbrace{100\ldots01}_{n+1 \text{ cifre}}{}^2_{(7)} = (7^n+1)^2 = 7^{2n}+2\cdot 7^n+1 = \underbrace{10\ldots020\ldots1}_{2n+1 \text{ cifre}}{}_{(7)}$ este pătrat perfect, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, iar $\underbrace{10\ldots020\ldots2}_{2n+1 \text{ cifre}}{}_{(7)} = \underbrace{10\ldots020\ldots1}_{2n+1 \text{ cifre}}{}_{(7)}+1$ nu este pătrat perfect pentru nici un $n \in \mathbb{N}^*$, deoarece este cuprins între $(7^n+1)^2$ şi $(7^n+2)^2$.

Dacă $n \in \mathbb{N}$, atunci putem scrie $n = 7k+r$, unde $k, r \in \mathbb{N}$, $r < 7$. Deoarece $n^2 = 7k'+r'$, cu $r' \in \{0, 1, 2, 4\}$, rezultă că nici un pătrat perfect scris în baza 7 nu se termină cu 3, 5 sau 6. Prin urmare, răspunsul la ultima întrebare este negativ.

VII.38. *Fie a, b, c cifre nenule, $a \neq c$. Să se arate că dacă* $\frac{\overline{abb\ldots bc}}{\overline{cbb\ldots ba}} = \frac{\overline{ac}}{\overline{ca}}$ *(termenii primei fracţii conţinând câte 2002 cifre b), atunci $b = a+c$.*

Mihaela Bucătaru, Iaşi

Soluţie. Dacă notăm $n = \underbrace{11\ldots1}_{2002 \text{ cifre}}$, avem succesiv:

$$\frac{a\cdot 10^{2003}+10nb+c}{c\cdot 10^{2003}+10nb+a} = \frac{10a+c}{10c+a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10^{2003}\left(a^2-c^2\right)+100nb\,(c-a)+10nb\,(a-c)+10\left(c^2-a^2\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10^{2003}\,(a+c)-100nb+10nb-10\,(c+a) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a+c)\cdot 10\cdot\left(10^{2002}-1\right)-90bn = 0 \Leftrightarrow (a+c)\cdot 10\cdot 9n-90bn = 0 \Leftrightarrow a+c = b.$$

VII.39. *Dacă $x < y < z$ sunt lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic, atunci $x^n+y^n \neq z^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.*

Dumitru Neagu, Iaşi

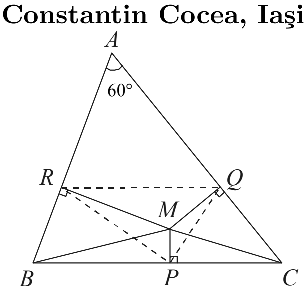
Soluţie. Din relaţia $z > y > x$, rezultă că $z^{n-2} > y^{n-2}$ şi $z^{n-2} > x^{n-2}$, oricare ar fi $n \geq 3$. De aici, obţinem că, pentru orice $n \geq 3$, avem:

$$z^n = z^{n-2}\cdot z^2 = z^{n-2}\left(x^2+y^2\right) > x^{n-2}\cdot x^2+y^{n-2}\cdot y^2 = x^n+y^n.$$

VII.40. *Fie ABC un triunghi ascuţitunghic cu $m(\widehat{A}) = 60°$, iar $M \in \mathrm{Int}\ ABC$*

astfel încât $m(\widehat{BMC}) = 150°$. *Notăm cu* P, Q, R *proiecţiile lui* M *pe* BC, CA *şi respectiv* AB. *Să se arate că* $\triangle PQR$ *este dreptunghic.*

Constantin Cocea, Iaşi



Soluţie. Deoarece patrulaterele $MPBR$ şi $MPCQ$ sunt inscriptibile, avem: $\widehat{MPR} = \widehat{RBM} = 90° - \widehat{RMB}$ şi $\widehat{MPQ} = \widehat{QCM} = 90° - \widehat{QMC}$. Astfel, obţinem:

$$\widehat{RPQ} = \widehat{MPR} + \widehat{MPQ} = 180° - (\widehat{RMB} + \widehat{QMC}) =$$
$$= 180° - (360° - \widehat{RMQ} - \widehat{BMC}) =$$
$$= 180° - (360° - 120° - 150°) = 180° - 90° = 90°.$$

Clasa a VIII-a

VIII.36. *Determinaţi cardinalul minim al unei mulţimi* B *pentru care putem defini funcţii* $f : \mathbb{R} \to B$ *astfel încât* $f(-1) < 0$ *şi* $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Iulia Zanoschi, elevă, Iaşi

Soluţie. Vom demonstra că mulţimea B trebuie să aibă cel puţin trei elemente şi că există o funcţie care are codomeniul B format din trei elemente şi îndeplineşte restul condiţiilor din enunţ.

Avem $f(1) = f((-1)(-1)) = f(-1) f(-1) > 0$. Pe de altă parte, din $f(0) = f(0 \cdot (-1)) = f(0) f(-1)$, rezultă că $f(0)[f(-1) - 1] = 0$, deci $f(0) = 0$. Prin urmare, $f(-1)$, $f(0)$ şi $f(1)$ sunt trei numere distincte, ceea ce înseamnă că B are cel puţin trei elemente. În fine, se observă că $f : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$, definită prin $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$, verifică toate condiţiile cerute.

VIII.37. *If* $a, b, c \in (0, \infty)$ *prove the following inequalities:*

a) $(a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) \geq 24$ *where* $abc = 1$;

b) $(a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) \geq \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ *where* $ab + bc + ac = 1$.

Zdravko Starc, Vršac, Serbia and Montenegro

Soluţie. *a)* Se ştie că, oricare ar fi numerele a, b, c, are loc egalitatea:

$$(a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) = 3(a+b)(b+c)(c+a). \tag{1}$$

Având în vedere identitatea (1) şi inegalitatea mediilor, putem scrie:

$$(a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) = 3(a+b)(b+c)(c+a) \geq$$
$$\geq 3 \cdot 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} = 24abc = 24.$$

b) Soluţia I (**Irina Mustaţă**, elevă, Iaşi). Prin înmulţirea ultimelor două paranteze din partea dreaptă a relaţiei (1) şi ţinând cont că $ab + bc + ca = 1$, obţinem $(a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) = 3(a+b)(c^2+1)$; similar, avem şi $(a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) = 3(b+c)(a^2+1)$ şi $(a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) = 3(c+a)(b^2+1)$. Prin adunarea acestora avem

$$(a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) = (a+b)(c^2+1) + (b+c)(a^2+1) + (c+a)(b^2+1) =$$
$$= 2(a+b+c) + ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) =$$
$$= 2(a+b+c) + (a+b+c)(ab+bc+ca) - 3abc, \text{ adică}$$

$$(a+b+c)^3-\left(a^3+b^3+c^3\right)=3\,(a+b+c)-3abc. \qquad (2)$$

Observăm că din $3=3\,(ab+bc+ca)\le(a+b+c)^2$ rezultă că $a+b+c\ge\sqrt{3}$, iar din $1=ab+bc+ca\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ deducem că $abc\le\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$. Revenind la (2) vom obţine $(a+b+c)^3-\left(a^3+b^3+c^3\right)\ge 3\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.

Soluţia II (**Marius Pachiţariu**, elev, Iaşi). Cum $ab+ac+bc=1$, avem:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right)=$$
$$=(a+b+c)\left[(a+b+c)^2-3\,(ab+ac+bc)\right]=(a+b+c)^3-3\,(a+b+c).$$

Astfel, inegalitatea de la punctul *b*) se va scrie $3\,(a+b+c)-3abc\ge\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ sau

$$a+b+c-abc\ge\frac{8\sqrt{3}}{9}. \qquad (2)$$

Pentru a justifica inegalitatea (2), vom demonstra dubla inegalitate:

$$\frac{a+b+c}{3}\ge\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}\ge\sqrt[3]{abc},\quad \forall a,b,c>0. \qquad (3)$$

Pentru prima parte a relaţiei (3), observăm că

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2\ge\frac{ab+bc+ca}{3}\Leftrightarrow(a+b+c)^2\ge 3\,(ab+ac+bc)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0,$$

evident adevărată. Pentru partea a doua, folosim inegalitatea mediilor:

$$\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}\ge\sqrt{\sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot ca}}=\sqrt{\left(\sqrt[3]{abc}\right)^2}=\sqrt[3]{abc}.$$

Revenind la inegalitatea (2), avem:

$$a+b+c-abc\ge 3\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}-\left(\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}\right)^3=\frac{8\sqrt{3}}{9}.$$

Soluţia III (dată de autor). Din inegalitatea lui Carlson:

$$\sqrt[3]{\frac{(a+b)\,(b+c)\,(c+a)}{8}}\ge\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}},\quad \forall a,b,c>0$$

şi identitatea (1), rezultă că:

$$(a+b+c)^3-\left(a^3+b^3+c^3\right)=3\,(a+b)\,(b+c)\,(c+a)\ge$$
$$\ge 3\cdot 8\left(\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}\right)^3=3\cdot 8\cdot\frac{1}{3\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

VIII.38. *Fie $n\in\mathbb{N}$ fixat. Arătaţi că există o infinitate de numere $x,y,z\in\mathbb{Z}$ astfel încât $x^{2n}+y^{2n}+z^{2n}=x^{2n+1}+y^{2n+1}+z^{2n+1}$.*

Lucian Tuţescu, Craiova

Soluţie. Dacă luăm $z=-y$, atunci din relaţia dată, obţinem:
$$2y^{2n}=x^{2n}(x-1). \qquad (1)$$
O soluţie a acestei din urmă ecuaţii putem găsi alegând $x-1=2a^{2n}$, $a\in\mathbb{Z}^*$. Într-adevăr, în acest caz egalitatea (1) devine $2y^{2n}=\left(2a^{2n}+1\right)^{2n}\cdot 2a^{2n}$, de unde găsim $y=\pm a\left(2a^{2n}+1\right)$. Deci, există o infinitate de numere cu proprietatea dată: $x=1+2a^{2n}$, $y=a\left(2a^{2n}+1\right)$, $z=-a\left(2a^{2n}+1\right)$, $a\in\mathbb{Z}^*$.

VIII.39. *Fie $ABCD$ un patrulater strâmb cu $[AD]\equiv[BC]$. Să se construiască dreptele paralele d_1,d_2,d_3,d_4 astfel încât $A\in d_1$, $B\in d_2$, $C\in d_3$, $D\in d_4$ şi* $\operatorname{dist}(d_1,d_4)=\operatorname{dist}(d_2,d_3)$.

Horia Mihail Teodorescu, elev, Iaşi

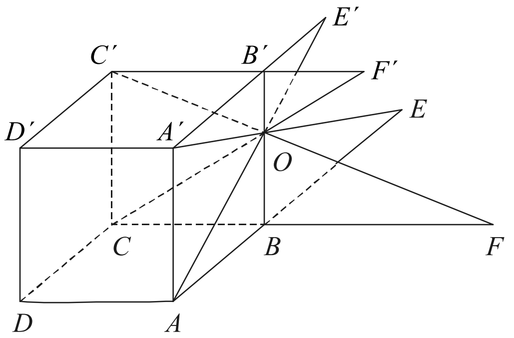
Soluţie. Fie d o dreaptă care face unghiuri egale cu AD şi BC (evident, putem găsi o astfel de dreaptă). Dreptele d_1, d_2, d_3 şi d_4, duse prin A, B, C, respectiv D şi paralele cu d, satisfac condiţiile problemei. Într-adevăr, dacă notăm cu E şi F picioarele perpendicularelor din A şi B pe d_4, respectiv d_3 avem că $\triangle AED\equiv\triangle BFC$ (I. U.), deci $AE=BF$, adică $\operatorname{dist}(d_1,d_4)=\operatorname{dist}(d_2,d_3)$.

VIII.40. *Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub, iar $O\in(BB')$. Dreptele $A'O$ şi $C'O$ intersectează (ABC) în E, respectiv F, iar AO şi CO intersectează $(A'B'C')$ în E', respectiv F'.*

a) Arătaţi că $EF\cdot E'F'$ nu depinde de poziţia lui O;

b) Arătaţi că $S_{BB'E'E}\geq S_{ABCD}$ şi determinaţi O pentru care se atinge egalitatea.

Monica Nedelcu, Iaşi



Soluţie. *a)* Cum $(A'B'C')\parallel(ABC)$ şi $(EOF)\cap(A'B'C')=A'C'$, $(EOF)\cap(ABC)=EF$, rezultă că $EF\parallel A'C'$, deci $\triangle A'OC'\sim\triangle EOF$, de unde deducem că
$$\frac{EF}{A'C'}=\frac{EO}{OA'}=\frac{BO}{B'O}. \qquad (1)$$
Analog, putem demonstra că $\triangle AOC\sim\triangle E'OF'$, deci
$$\frac{E'F'}{AC}=\frac{E'O}{OA}=\frac{B'O}{OB}. \qquad (2)$$
Din (1) şi (2), obţinem $\dfrac{EF\cdot E'F'}{AC\cdot A'C'}=1$, deci $EF\cdot E'F'=AC^2=\text{const}$.

b) Fie $B'O=x$. Atunci, avem $\dfrac{B'E'}{a}=\dfrac{x}{a-x}$ şi $\dfrac{BE}{a}=\dfrac{a-x}{x}$. De aici rezultă că
$$S_{BB'E'E}=\frac{BB'\cdot(B'E'+BE)}{2}=\frac{a^2}{2}\left(\frac{x}{a-x}+\frac{a-x}{x}\right)\geq\frac{a^2}{2}\cdot 2=a^2=S_{ABCD}\,.$$
Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $\dfrac{x}{a-x}=1$, adică $x=\dfrac{a}{2}$, ceea ce înseamnă că O este mijlocul segmentului $[BB']$.

Clasa a IX-a

IX.36. *Determinaţi $x<0<y$ astfel încât $xy+\dfrac{y}{x}=y^3-5y+2$.*

Cezar Lupu, elev, Constanţa

Soluţie. Ecuaţia dată este echivalentă cu:
$$x+\frac{1}{x}+5=y^2+\frac{2}{y}. \qquad (1)$$
Cum $x<0$, rezultă că $x+\dfrac{1}{x}+5\le -2+5=3$, cu egalitate numai pentru $x=-1$. Pe de altă parte, având în vedere că $y>0$, putem scrie:
$$y^2+\frac{2}{y}=y^2+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}\ge 3\sqrt[3]{y^2\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{y}}=3,$$
cu egalitate numai pentru $y=1$. Aşadar, egalitatea (1) este posibilă dacă şi numai dacă $x+\dfrac{1}{x}+5=3=y^2+\dfrac{2}{y}$, adică pentru $x=-1$ şi $y=1$.

IX.37. *Pentru $x\in[1,\infty)$, $n\in\mathbb{N}^*$, demonstraţi inegalitatea*
$$\left(x^{n+1}+1\right)\left(x^n-1\right)\ge 2nx^n\left(x-1\right).$$

Marius Pachiţariu, elev, Iaşi

Soluţia I. Inegalitatea dată se transformă succesiv astfel:
$$x^{2n+1}-x^{n+1}+x^n-1\ge 2nx^{n+1}-2nx^n \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^{2n+1}-1\ge(2n+1)\left(x^{n+1}-x^n\right) \qquad (1)$$
Inegalitatea (1) este adevărată pentru $x=1$, iar pentru $x>1$ este echivalentă cu $\dfrac{x^{2n+1}-1}{x-1}\ge(2n+1)\,x^n$ sau $\dfrac{1+x+x^2+\cdots+x^{2n}}{2n+1}\ge x^n$, care rezultă din inegalitatea mediilor în felul următor:
$$\frac{1+x+x^2+\cdots+x^{2n}}{2n+1}\ge\sqrt[2n+1]{1\cdot x\cdot x^2\cdots x^{2n}}=x^{\frac{(2n+1)2n}{2(2n+1)}}=x^n.$$

Soluţia II (Irina Mustaţă, elevă, Iaşi**).** Prin inducţie completă.

IX.38. *Să se arate că* $\dfrac{x^{n+1}}{y^n}+\dfrac{y^{n+1}}{z^n}+\dfrac{z^{n+1}}{x^n}\ge x+y+z$, $\forall x,y,z>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Gigel Buth, Satu Mare

Soluţie. În GM - 4/2002, p. 146, *L. Panaitopol* enunţă şi demonstrează rezultatul următor:

Dacă $p\ge 1$ şi $a_i\ge 0$, $b_i>0$ pentru $i\in\overline{1,n}$, atunci
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^p}{b_i^{p-1}}\ge\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^p}{\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^{p-1}}.$$
Inegalitatea din enunţ rezultă imediat din aceasta.

IX.39. *Să se rezolve ecuaţia* $\dfrac{1}{2\sqrt{[x]^3}}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{[x]\cdot[x+1]^3}}=\dfrac{2}{[x]\cdot[x+2]}$.

Daniel Jinga, Piteşti

Soluţie. Ecuaţia are sens dacă $[x]>0$, adică $[x]\ge 1$. Dacă facem notaţia $[x]=y\in\mathbb{N}^*$, ecuaţia dată devine:
$$\frac{1}{2y\sqrt{y}}+\frac{1}{3\,(y+1)\,\sqrt[3]{y}}=\frac{2}{y\,(y+2)}. \qquad (1)$$

Deoarece $\sqrt{y} = \sqrt{y \cdot 1} \le \frac{y+1}{2}$ (2) şi $\sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{y \cdot 1 \cdot 1} \le \frac{y+2}{3}$ (3), rezultă că $\frac{1}{2y\sqrt{y}} + \frac{1}{3(y+1)\sqrt[3]{y}} \ge \frac{1}{y(y+1)} + \frac{1}{(y+1)(y+2)} = \frac{2}{y(y+2)}$. Prin urmare, ecuaţia (1) are soluţie dacă şi numai dacă (2) şi (3) sunt simultan egalităţi, adică $y = 1$. Deci soluţia ecuaţiei date este $x \in [1, 2)$.

IX.40. *Fie $M \ne G$ în planul $\triangle ABC$ şi D, E, F mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$ şi respectiv $[AB]$. Considerăm punctele X, Y, Z astfel încât $\overrightarrow{XD} = m\overrightarrow{XM}$, $\overrightarrow{YE} = m\overrightarrow{YM}$, $\overrightarrow{ZF} = m\overrightarrow{ZM}$, $m \ne 1$.*

a) Dacă $m \ne \frac{3}{2}$, atunci AX, BY, CZ sunt concurente în S, cu $\overrightarrow{SG} = \frac{2m}{3}\overrightarrow{SM}$.

b) Dacă $m = \frac{3}{2}$, atunci AX, BY, CZ sunt paralele cu GM.

Virgil Nicula, Bucureşti

Soluţie. *a*) Avem:

$$\overrightarrow{SG} = \frac{2m}{3}\overrightarrow{SM} \Leftrightarrow \overrightarrow{SM} + \overrightarrow{MG} = \frac{2m}{3}\overrightarrow{SM} \Leftrightarrow \frac{2m-3}{3}\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{MG} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MS} = \frac{3}{3-2m}\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow \overrightarrow{MS} = \frac{1}{3-2m}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right).$$

Fie punctul S' definit prin egalitatea $\overrightarrow{MS'} = \frac{1}{3-2m}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)$. Se poate verifica, prin calcul, faptul că S' aparţine dreptelor AX, BY, CZ, deci acestea vor fi concurente în $S' \equiv S$ şi atunci este adevărată şi egalitatea $\overrightarrow{SG} = \frac{2m}{3}\overrightarrow{SM}$. Să demonstrăm, de exemplu, că $S' \in AX$. Pentru aceasta vom demonstra că vectorii $\overrightarrow{XS'}$ şi $\overrightarrow{S'A}$ sunt coliniari:

$$\overrightarrow{XS'} = \overrightarrow{MS'} - \overrightarrow{MX} = \frac{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}}{3-2m} - \frac{\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}}{2-2m} =$$

$$= \frac{(2-2m)\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}}{(3-2m)(2-2m)},$$

$$\overrightarrow{S'A} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MS'} = \overrightarrow{MA} - \frac{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}}{3-2m} = (2-2m)\overrightarrow{XS'}.$$

b) Pentru $m = \frac{3}{2}$, avem:

$$\overrightarrow{XD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{XM} \Leftrightarrow \overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{XM} \Leftrightarrow \overrightarrow{MX} = -2\overrightarrow{MD} = -(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$$

şi atunci $\overrightarrow{XA} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MX} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$. Analog se obţine $\overrightarrow{YB} = \overrightarrow{ZC} = 3\overrightarrow{MG}$, deci dreptele AX, BY, CZ sunt paralele.

Clasa a X-a

X.36. *Să se rezolve inecuaţia $a^{\log_b^2 x} + x^{\log_b x} \le a + b$, unde $a, b \in (1, \infty)$.*

Daniela Dodan, elevă, Iaşi

Soluţie. Din egalitatea $x = b^{\log_b x}$, $x > 0$, rezultă că $x^{\log_b x} = b^{\log_b^2 x}$, $x > 0$. Deci, inecuaţia dată este echivalentă cu

$$a^{\log_b^2 x} + b^{\log_b^2 x} \le a + b. \qquad (1)$$

Dacă facem notaţia $\log_b^2 x = \alpha \geq 0$ şi avem în vedere obsevaţiile $\alpha > 1 \Rightarrow a^\alpha + b^\alpha > a + b$, $\alpha \leq 1 \Rightarrow a^\alpha + b^\alpha \leq a + b$, obţinem că inecuaţia (1) este echivalentă cu $\log_b^2 x \leq 1$, deci $x \in \left[b^{-1}, b\right]$.

X.37. *Fie $a, b \in (0,1) \cup (1, \infty)$ şi funcţia injectivă $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(a^x) + f(b^x)$ este constantă. Să se arate că $ab = 1$ şi că există funcţii f care satisfac ipotezele problemei.*

Dan Popescu, Suceava

Soluţie. Fie $g(x) = f(a^x) + f(b^x) = k$, $\forall x \in \mathbb{R}$, unde $k \in \mathbb{R}$. Atunci, avem $k = f(x) + f\left(b^{\log_a x}\right) = f\left(a^{\log_b x}\right) + f(x)$, $\forall x > 0$, de unde rezultă că $f\left(b^{\log_a x}\right) = f\left(a^{\log_b x}\right)$. Cum f este funcţie injectivă, deducem că $b^{\log_a x} = a^{\log_b x}$, $x > 0$, deci $\log_a^2 b = 1$, adică $a = b$ sau $ab = 1$. Dacă $a = b$, atunci $f(a^x) = \dfrac{g(x)}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, sau $f(x) = \dfrac{k}{2}$, $x > 0$, ceea ce contrazice injectivitatea funcţiei f. Pentru $b = \dfrac{1}{a}$ şi $f(x) = \log_a x$, se obţine $g(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

X.38. *Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ cu $a > b > c > d$. Să se arate că a, b, c, d sunt în progresie aritmetică dacă şi numai dacă $(a-b)(b-c)(c-d) = \left(\dfrac{a-d}{3}\right)^3$.*

A. V. Mihai, Bucureşti

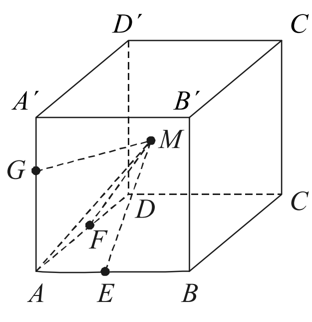
Soluţie. Dacă a, b, c, d sunt în progresie aritmetică de raţie r, atunci egalitatea dată este echivalentă cu $r \cdot r \cdot r = \left(\dfrac{3r}{3}\right)^3$, care este, evident, adevărată.

Reciproc, dacă are loc egalitatea din enunţ, atunci $a - d = 3\sqrt[3]{(a-b)(b-c)(c-d)}$, sau $(a-b) + (b-c) + (c-d) = 3\sqrt[3]{(a-b)(b-c)(c-d)}$, adică media aritmetică a numerelor $a-b$, $b-c$ şi $c-d$ este egală cu media lor geometrică. De aici rezultă că $a - b = b - c = c - d$, deci a, b, c, d sunt în progresie aritmetică.

X.39. *Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$. Dacă $M \in \operatorname{Int} A'B'C'D'$, notăm cu α, β, γ măsurile unghiurilor pe care AM le face cu AB, AD şi respectiv AA'. Să se arate că*

$$AM < a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma < AC'.$$

Cătălin Calistru, Iaşi



Soluţie. Fie E, F şi G proiecţiile punctului M pe laturile AB, AD şi respectiv AA'. Astfel avem $\cos\alpha = \dfrac{AE}{AM}$, $\cos\beta = \dfrac{AF}{AM}$ şi $\cos\gamma = \dfrac{AG}{AM}$, de unde deducem că $AE\cos\alpha + AF\cos\beta + AG\cos\gamma = \dfrac{AE^2 + AF^2 + AG^2}{AM} = \dfrac{AM^2}{AM} = AM$. De aici, având în vedere că $AE < AB = a$, $AF < AD = b$, $AG < AA' = c$ şi $\cos\alpha > 0$, $\cos\beta > 0$, $\cos\gamma > 0$, rezultă că $AM < a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma$. Pentru a doua parte a inegalităţii vom folosi inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski-Schwarz şi identitatea $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$:

$$a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma < \sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = AC'.$$

X.40. *a) Pentru $x, y, z \geq 0$, demonstraţi inegalitatea*

$$\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x+z}+\sqrt{y+z}\right)\cdot\sqrt{xy+xz+yz}\geq 3\sqrt{6xyz}.$$

b) Cu notaţiile uzuale, în orice triunghi are loc inegalitatea

$$\frac{R}{r}-2\geq\frac{9}{4}\cdot\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}.$$

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. *a)* Din relaţiile

$$\sqrt{x+y}+\sqrt{x+z}+\sqrt{y+z}\geq 3\sqrt[6]{(x+y)(x+z)(y+z)}\geq 3\sqrt[6]{8xyz}=3\sqrt{2}\sqrt[6]{xyz} \text{ şi}$$

$$\sqrt{xy+xz+yz}\geq\sqrt{3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}}=\sqrt{3}\sqrt[6]{x^2y^2z^2}$$

rezultă că

$$\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x+z}+\sqrt{y+z}\right)\sqrt{xy+xz+yz}\geq 3\sqrt{6}\sqrt{xyz}=3\sqrt{6xyz}.$$

b) Vom aplica inegalitatea de la punctul *a)* pentru $x=p-a$, $y=p-b$ şi $z=p-c$. Cu notaţiile făcute, avem:

$$x+y=c,\quad x+z=b,\quad y+z=a,$$

$$xy+xz+yz=\sum(p-a)(p-b)=\sum\left(p^2-(a+b)p+ab\right)=$$

$$=3p^2-4p^2+\sum ab=-p^2+\left(p^2+r^2+4Rr\right)=r^2+4Rr,$$

$$xyz=(p-a)(p-b)(p-c)=\frac{S^2}{p}=pr^2.$$

Astfel, inegalitatea de la *a)* devine $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\sqrt{r^2+4Rr}\geq 3\sqrt{6pr^2}$ sau $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2\left(r^2+4Rr\right)\geq 54pr^2$, deci $1+4\,\dfrac{R}{r}\geq\dfrac{27(a+b+c)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}$. De aici obţinem că

$$\frac{R}{r}-2\geq\frac{27(a+b+c)}{4\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}-\frac{9}{4}=\frac{9}{4}\,\frac{3(a+b+c)-\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}=$$

$$=\frac{9}{4}\,\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}.$$

Clasa a XI-a

XI.36. *Fie D, M două matrice nesingulare de ordin n, D diagonală, iar M triunghiulară. Dacă $D={}^tMDM$, să se arate că M este tot o matrice diagonală, având ±1 pe diagonala principală.*

Adrian Corduneanu, Iaşi

Soluţie.

Fie $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$, cu $\lambda_i \neq 0$, $i = \overline{1,n}$, $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ 0 & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_{nn} \end{pmatrix}$, $m_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1,n}$ şi M_{ij} complementul algebric al lui m_{ij} în matricea M. Notăm cu $d = \det M \neq 0$. Relaţia dată este echivalentă cu $DM^{-1} = {}^tMD$. Deoarece

$$DM^{-1} = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{11} & M_{21} & \dots & M_{n1} \\ 0 & M_{22} & \dots & M_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & M_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{d} \begin{pmatrix} \lambda_1 M_{11} & \lambda_1 M_{21} & \dots & \lambda_1 M_{n1} \\ 0 & \lambda_2 M_{22} & \dots & \lambda_2 M_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n M_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{şi}$$

$${}^tMD = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & \dots & 0 \\ m_{12} & m_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{1n} & m_{2n} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 m_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_1 m_{12} & \lambda_2 m_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1 m_{1n} & \lambda_2 m_{2n} & \dots & \lambda_n m_{nn} \end{pmatrix}$$

rezultă că $m_{ij} = 0$, oricare ar fi $i < j$ şi $\dfrac{\lambda_i M_{ii}}{d} = \lambda_i m_{ii}$, $i = \overline{1,n}$. Din $m_{ij} = 0$, pentru $i < j$, deducem că M este matrice diagonală şi atunci $\dfrac{M_{ii}}{d} = \dfrac{1}{m_{ii}}$, $i = \overline{1,n}$, deci avem $m_{ii}^2 = 1$, $i = \overline{1,n}$, adică $m_{ii} = \pm 1$, $i = \overline{1,n}$. Cazul în care M este inferior triunghiulară se tratează în mod analog.

XI.37. *Fie* $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ *astfel încât* $\det(A + \alpha\, {}^tA) = 0$, *unde* $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{-1, 0, 1\}$. *Să se arate că* $\det(A + {}^tA) = \dfrac{-2(\alpha - 1)^2}{\alpha} \det A$.

Marian Ionescu, Piteşti şi Lucian Tuţescu, Craiova

Soluţie. $P(x) = \det(A + x\, {}^tA)$, $x \in \mathbb{C}^*$ este o funcţie polinominală cu gradul mai mic sau egal cu 3. Deoarece

$$P(x) = \det\left(x\left(\frac{1}{x}A + {}^tA\right)\right) = x^3 \det\left(\frac{1}{x}A + {}^tA\right) =$$
$$= x^3 \det\left(\frac{1}{x}{}^tA + A\right) = x^3 P\left(\frac{1}{x}\right), \quad \forall x \in \mathbb{C}^*,$$

rezultă că P este polinom reciproc, deci $P(x) = (\det A)\, x^3 + ax^2 + ax + \det A$. Cum, prin ipoteză, $P(\alpha) = 0$, înseamnă că şi $P\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) = 0$. De aici, având în vedere că $P(-1) = 0$, obţinem că $P(x) = (\det A)(x - \alpha)\left(x - \dfrac{1}{\alpha}\right)(x + 1)$. Aşadar,

$$\det\left(A+{}^tA\right)=P\left(1\right)=\left(\det A\right)\left(1-\alpha\right)\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\cdot 2=\frac{-2\left(\alpha-1\right)^2}{\alpha}\det A.$$

XI.38. *Să se determine funcţiile continue* $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ *pentru care* $f\left(f\left(x\right)\right)+2f\left(x\right)=3x$, $\forall x\geq 0$.

Mihail Bencze, Braşov

Soluţie. Fie $f_n\left(x\right)=\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n\text{ ori}}\left(x\right)$, $x\geq 0$, $n\in\mathbb{N}^*$. Pentru orice $n\geq 3$ şi $x\geq 0$, avem că $f_k\left(x\right)+2f_{k-1}\left(x\right)=3f_{k-2}\left(x\right)$, $\forall k=\overline{2,n}$, de unde prin sumare deducem că $f_n\left(x\right)+3f_{n-1}\left(x\right)=f_1\left(x\right)+3x$, $\forall n\geq 3$, $\forall x\geq 0$. De aici, obţinem:

$$\begin{aligned}
&f_3\left(x\right)+3f_2\left(x\right)=f_1\left(x\right)+3x,\\
&f_4\left(x\right)+3f_3\left(x\right)=f_1\left(x\right)+3x,\\
&f_5\left(x\right)+3f_4\left(x\right)=f_1\left(x\right)+3x,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&f_n\left(x\right)+3f_{n-1}\left(x\right)=f_1\left(x\right)+3x,\ \forall n\geq 3,\ \forall x\geq 0.
\end{aligned}$$

Mai departe, înmulţind prima ecuaţie cu $\left(-\frac{1}{3}\right)^0$, a doua cu $\left(-\frac{1}{3}\right)^1$, a treia cu $\left(-\frac{1}{3}\right)^2$ etc. şi apoi adunându-le, găsim relaţia

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-3}f_n\left(x\right)+3f_2\left(x\right)=\left(f_1\left(x\right)+3x\right)\cdot\left(1+\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-3}\right)$$

sau

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-3}f_n\left(x\right)+9x-6f\left(x\right)=\frac{3}{4}\left(f_1\left(x\right)+3x\right)\cdot\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right),\forall n\geq 3,\forall x\geq 0. \tag{1}$$

Din ipoteză rezultă că $f\left(x\right)\leq\frac{3x}{2}$, $\forall x\geq 0$, şi atunci $f_n\left(x\right)\leq\left(\frac{3}{2}\right)^n x$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\geq 0$. De aici, obţinem că $0\leq\frac{f_n\left(x\right)}{3^n}\leq\frac{x}{2^n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\geq 0$, adică

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n\left(x\right)}{3^n}=0,\quad\forall x\geq 0. \tag{2}$$

Din (1) şi (2), rezultă că $9x-6f\left(x\right)=\frac{3}{4}\left(f\left(x\right)+3x\right)$, $\forall x\geq 0$, deci $f\left(x\right)=x$, $\forall x\geq 0$.

Observaţie. Nu este nevoie de *continuitatea* funcţiei f.

XI.39. *Fie şirul* $\left(y_n\right)_{n\geq 1}$ *astfel încât şirul* $\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)_{n\geq 1}$ *este convergent. Dacă* $\left(x_n\right)_{n\geq 1}\subset\mathbb{R}_+^*$ *are proprietatea că* $x_n\leq x_{n+1}\left(1+x_ny_{n+1}\right)$, $\forall n\geq 1$, *arătaţi că şirul* $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\geq 1}$ *este convergent.*

Gheorghe Molea, Curtea de Argeş

Soluţie. Deoarece $x_n>0,\forall n\geq 1$, rezultă că inegalitatea din enunţ este echivalentă cu $\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} \leq y_{n+1}$, $\forall n \geq 1$, de unde deducem că

$$\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_1} \leq y_2 + y_3 + \cdots + y_n = \sum_{i=1}^{n} y_i - y_1, \quad \forall n \geq 1.$$

Cum în partea dreaptă a ultimei relaţii este un şir convergent, deci mărginit, rezultă că şirul $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\geq 1}$ este şi el mărginit.

Pe de altă parte, relaţia $\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}} \leq y_n = \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n-1} y_i$ este echivalentă cu $\frac{1}{x_n} - \sum_{i=1}^{n} y_i \leq \frac{1}{x_{n-1}} - \sum_{i=1}^{n-1} y_i$, $\forall n \geq 2$, sau, cu notaţia $z_n = \frac{1}{x_n} - \sum_{i=1}^{n} y_i$, $z_n \leq z_{n-1}$, $\forall n \geq 2$. De aici, având în vedere că şirul $(z_n)_{n\geq 1}$ este mărginit, fiind diferenţa a două şiruri mărginite, rezultă că şirul $(z_n)_{n\geq 1}$ este convergent. Prin urmare, şirul cu termenul general $\frac{1}{x_n} = z_n + \sum_{i=1}^{n} y_i$ este convergent.

XI.40. *Fie $x_0 \in [-1,1]$; arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, ecuaţia $3x - 4x^3 = x_n$ are o singură soluţie $x_{n+1} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Demonstraţi că şirurile $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(3^n x_n)_{n\geq 0}$ sunt convergente şi calculaţi limitele lor.*

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Să arătăm, pentru început, că dacă $a \in [-1,1]$, atunci ecuaţia $3x - 4x^3 = a$ are o singură soluţie în intervalul $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Pentru aceasta, considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = 3x - 4x^3 - a$. Deoarece $f\left(-\frac{1}{2}\right) f\left(\frac{1}{2}\right) =$ $= (-1-a)(1-a) \leq 0$ şi f este continuă, rezultă că f se anulează cel puţin o dată în intervalul $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Cum $f'(x) = 3\left(1-4x^2\right) \geq 0$, $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, înseamnă că f este strict crescătoare pe $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, deci ecuaţia $f(x) = 0$ are o singură soluţie în intervalul $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Mai putem observa că, dacă $\alpha = \arcsin a$, avem $3\sin\frac{\alpha}{3} - 4\sin^3\frac{\alpha}{3} = \sin\alpha = a$ şi $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ implică $\sin\frac{\alpha}{3} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Deci $\sin\frac{\alpha}{3}$ este tocmai soluţia din intervalul $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ a ecuaţiei $3x - 4x^3 = a$. Astfel, am demonstrat că, pentru orice $a \in [-1,1]$, ecuaţia $3x - 4x^3 = a$ are o singură soluţie în intervalul $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ şi anume $\sin\frac{\alpha}{3} = \sin\frac{\arcsin a}{3}$.

Revenind la problema noastră, rezultă, din cele arătate mai sus, că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, x_{n+1} este bine definit şi $x_{n+1} = \sin\frac{\arcsin x_n}{3}$. De aici, obţinem că

$\arcsin x_{n+1} = \dfrac{\arcsin x_n}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, deci $\arcsin x_n = \dfrac{\arcsin x_0}{3^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Astfel avem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sin(\arcsin x_n) = 0$ şi

$$\lim_{n\to\infty} 3^n x_n = \lim_{n\to\infty} (3^n \arcsin x_n) \cdot \frac{x_n}{\arcsin x_n} = \arcsin x_0.$$

Clasa a XII-a

XII.36. *Să se determine $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ pentru care ecuaţia $x^2 = x + \widehat{1}$ are soluţie unică în $\mathbb{Z}_n$; rezolvaţi ecuaţia în acest caz.*

Andrei Nedelcu, Iaşi

Soluţie. Dacă $\widehat{a} \in \mathbb{Z}_n$ este soluţie a ecuaţiei $x^2 = x + \widehat{1}$, atunci şi $\widehat{1} - \widehat{a}$ este soluţie a acestei ecuaţii $((\widehat{1} - \widehat{a})^2 = \widehat{1} - \widehat{2a} + \widehat{a}^2 = \widehat{1} - \widehat{2a} + \widehat{a} + \widehat{1} = (\widehat{1} - \widehat{a}) + \widehat{1})$. Cum ecuaţia trebuie să aibă soluţie unică, este necesar să avem $\widehat{a} = \widehat{1} - \widehat{a}$, sau $\widehat{2a-1} = \widehat{0}$. Deoarece $\widehat{a}^2 = \widehat{a} + 1$ implică $\widehat{4}\widehat{a}^2 = \widehat{4}\widehat{a} + \widehat{4}$, sau $(\widehat{2a} - \widehat{1})^2 = \widehat{5}$, rezultă că $\widehat{5} = \widehat{0}$. De aici, obţinem că $n = 5$ şi atunci ecuaţia dată are soluţia unică $\widehat{a} = \widehat{3}$.

XII.37. *Fie $(G, +)$ un subgrup al grupului $(\mathbb{R}, +)$. Să se determine morfismele crescătoare de la $(G, +)$ la $(\mathbb{R}, +)$.*

Dan Ştefan Marinescu şi Viorel Cornea, Hunedoara

Soluţie. Dacă $G = \{0\}$, atunci $f : G \to \mathbb{R}$, $f(0) = 0$ este funcţia căutată.

Dacă $G \neq \{0\}$, atunci există $x_0 \in G \setminus \{0\}$ şi atunci dacă notăm $a = \dfrac{f(x_0)}{x_0}$, observăm că $a \geq 0$. Folosind definiţia morfismului de grupuri se poate demonstra prin inducţie că $f(nx) = nf(x)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in G$. De aici, deducem că $f(nx_0) = nf(x_0) = nax_0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Fie un element oarecare $y \in G$. Dacă $x_0 > 0$, avem succesiv:

$$\left[\frac{n(y+x_0)}{x_0}\right] \leq \frac{n(y+x_0)}{x_0} < \left[\frac{n(y+x_0)}{x_0}\right] + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \Rightarrow$$

$$f\left(\left[\frac{n(y+x_0)}{x_0}\right] x_0\right) \leq f(n(y+x_0)) \leq f\left(\left(\left[\frac{n(y+x_0)}{x_0}\right] + 1\right) x_0\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \Rightarrow$$

$$\left[\frac{n(y+x_0)}{x_0}\right] ax_0 \leq n(f(y) + ax_0) \leq \left(\left[\frac{n(y+x_0)}{x_0}\right] + 1\right) ax_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{n}\left[\frac{n(y+x_0)}{x_0}\right] ax_0 \leq f(y) + ax_0 \leq \left(\frac{1}{n}\left[\frac{n(y+x_0)}{x_0}\right] + \frac{1}{n}\right) ax_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

de unde, trecând la limită pentru $n \to \infty$, obţinem

$$ax_0 \frac{y+x_0}{x_0} \leq f(y) + ax_0 \leq ax_0 \frac{y+x_0}{x_0},$$

deci $f(y) = ay$. Dacă $x_0 < 0$, se ajunge, în mod analog, la acelaşi rezultat.

În sfârşit, observăm că funcţia $f : G \to \mathbb{R}$, $f(y) = ay$, $a > 0$, este un morfism crescător de grupuri.

XII.38. *Determinaţi funcţiile derivabile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $f'(x) = g(x) + x$ şi $g'(x) = f(x) - x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Adunând cele două relaţii date, obţinem $(f+g)'(x) = (f+g)(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, sau $\left(e^{-x}(f+g)\right)'(x) = 0$, de unde găsim $f(x)+g(x) = Ce^{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, unde $C \in \mathbb{R}$ este o constantă arbitrară. Revenind la prima ecuaţie, avem

$$f'(x) = Ce^{x} + x - f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

sau $(e^{x} f(x))' = Ce^{2x} + xe^{x}$,$\forall x \in \mathbb{R}$, deci $f(x) = \dfrac{C}{2} e^{x} + k_1 e^{-x} + x - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Analog, obţinem $g(x) = \dfrac{C}{2} e^{x} - k_2 e^{x} - x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Se verifică uşor că aceste funcţii satisfac sistemul de ecuaţii dat.

XII.39. *Fie $f, g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$, iar $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \beta \in \mathbb{R}$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{g(n)}}{x+\alpha} dx$, unde $\alpha \in [1,\infty)$.*

Adrian Sandovici, Piatra Neamţ

Soluţie. Din ipoteză rezultă că există n_0 astfel încât $f(n) > 0$ şi $g(n) > 0$, $\forall n \geq n_0$. Pentru $n \geq n_0$, avem:

$$I_n = f(n) \int_0^1 \frac{x^{g(n)} dx}{x+\alpha} = \frac{f(n)}{g(n)} \int_0^1 \left(x^{g(n)}\right)' \frac{x}{x+\alpha} dx =$$

$$= \frac{f(n)}{g(n)} \left[\left. \frac{x^{g(n)+1}}{x+\alpha} \right|_0^1 - \alpha \int_0^1 \frac{x^{g(n)}}{(x+\alpha)^2} dx \right].$$

Deoarece

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{g(n)} dx}{(x+\alpha)^2} \leq \int_0^1 x^{g(n)} dx = \frac{1}{g(n)+1}$$

şi $\lim\limits_{n\to\infty} g(n) = \infty$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{g(n)} dx}{(x+\alpha)^2} = 0$. Aşadar, avem $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \dfrac{\beta}{1+\alpha}$.

XII.40. *Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă cu derivata continuă astfel încât $xf'(x) \geq f(x)$, $\forall x \in [0,1]$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f(x)}{x}$ există şi este finită. Să se arate că*

$$f(1) \geq \min\left(2\int_0^1 f(x)\, dx, \int_0^1 \frac{f(x)}{x} dx\right).$$

Marcel Chiriţă, Bucureşti

Soluţie. Din $xf'(x) \geq f(x)$, $\forall x \in [0,1]$ rezultă că $\displaystyle\int_0^1 xf'(x)\, dx \geq \int_0^1 f(x)\, dx$, sau $\left. xf(x)\right|_0^1 - \displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx \geq \int_0^1 f(x)\, dx$, deci $f(1) \geq 2\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$ (1).

Deoarece $\lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{f(x)}{x}$ există şi este finită, rezultă că $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = 0$. Astfel, avem

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{f(x)}{x}\, dx \leq \lim_{\varepsilon\searrow 0} \int_\varepsilon^1 f'(x)\, dx = \lim_{\varepsilon\searrow 0} (f(1) - f(\varepsilon)) = f(1),$$

ceea ce, împreună cu relaţia (1), conduce la inegalitatea din enunţ.

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor din nr. 1 / 2003

A. Nivel gimnazial

G36. *Fie $x, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât x divide $10^n - 1$, însă x nu divide $10^k - 1$ pentru $k < n$. Să se arate că x divide $10^m - 1$ dacă şi numai dacă $m \,\vdots\, n$.*

N. N. Hârţan, Iaşi

Soluţie. Dacă $m \,\vdots\, n$, atunci $m = 0$ sau există $q \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $m = nq$. În primul caz, avem $10^m - 1 = 0 \,\vdots\, x$, iar în al doilea avem:

$$10^m - 1 = (10^n)^q - 1 = (10^n - 1)\left((10^n)^{q-1} + \cdots + 1\right) \vdots\, x.$$

Să presupunem acum că $10^m - 1 \,\vdots\, x$, $m \neq 0$ şi $m = nq + r$, cu $0 < r < n$. De aici şi din ipoteză, obţinem că $x \mid 10^m - 1 - (10^{nq} - 1) = 10^{nq+r} - 10^{nq} = 10^{nq}(10^r - 1)$. Deoarece din $x \mid 10^n - 1$ rezultă că $(x, 10) = 1$, deci $(x, 10^{nq}) = 1$, din relaţia precedentă deducem că $x \mid 10^r - 1$, ceea ce contrazice ipoteza. Prin urmare, dacă $10^m - 1 \,\vdots\, x$, atunci $m \,\vdots\, n$.

G37. *$2n$ muzicieni ($n > 2$) participă la un festival. La fiecare concert, o parte dintre ei cântă iar ceilalţi ascultă. Să se determine numărul minim de concerte astfel încât fiecare muzician să-i asculte pe toţi ceilalţi.*

Titu Zvonaru, Bucureşti

Soluţie. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ cei $2n$ muzicieni. Dacă la un concert, unul dintre ei ascultă pe un coleg care cântă, spunem că are loc o "audiţie". Astfel, la un concert la care cântă p muzicieni, există $p(2n-p)$ audiţii. Deoarece $\sqrt{p(2n-p)} \leq$ $\leq \dfrac{p + 2n - p}{2} = n$, adică $p(2n-p) \leq n^2$, rezultă că numărul maxim de audiţii are loc atunci când n muzicieni cântă şi n ascultă.

Să presupunem că la primul concert cântă muzicienii $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pentru a putea fi ascultat de $a_2, a_3, \ldots, a_n$, muzicianul a_1 trebuie să mai cânte la un concert în care să nu cânte $a_2, a_3, \ldots, a_n$, apoi a_2 trebuie să cânte într-un concert în care nu cântă $a_1, a_3, \ldots, a_n$ şi aşa mai departe. Deci, numărul minim de concerte este cel puţin $n+1$. Să arătăm că acest număr este $n+1$ indicând o aranjare a celor $n+1$ concerte astfel încât să fie îndeplinită cerinţa problemei. Pentru aceasta, facem notaţiile:

$$A_k = \{a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{2n}\} - \{a_{n+k}\}, \quad B_k = \{a_1, a_2, \ldots a_n\} - \{a_k\}, \quad k = \overline{1, n}$$

şi repartizăm muzicienii astfel:

	Muzicieni care cântă	Muzicieni care ascultă
1)	$a_1, a_2, \ldots, a_n$	$a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{2n}$
2)	a_1, A_1	B_1, a_{n+1}
3)	a_2, A_2	B_2, a_{n+2}
$\ldots$	....	....
n)	a_{n-1}, A_{n-1}	B_{n-1}, a_{2n-1}
$n+1$)	a_n, A_n	B_n, a_{2n}

G38. *Mulţimea $A \subset \mathbb{Z}$ are cinci elemente. Adunând în toate modurile posibile* *câte trei elemente din mulţime, obţinem următoarele* 10 *sume:* 3*,* 6*,* 8*,* 10*,* 11*,* 13*,* 15*,* 16*,* 18*,* 20*. Determinaţi mulţimea A.* (*În legătură cu o problemă de concurs din Iugoslavia.*)

Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Fie $A = \{a, b, c, d, e\}$ cu $a < b < c < d < e$ şi fie $S = a + b + c + d + e$. Adunând cele 10 sume din enunţ obţinem 120. Deoarece în această sumă fiecare element al mulţimii A apare exact de 6 ori, rezultă că $6S = 120$, deci $S = 20$. Prin urmare, adunând în toate modurile posibile câte două elemente din mulţime, obţinem următoarele 10 rezultate: 17 $(= 20 - 3)$, 14 $(= 20 - 6)$, 12, 10, 9, 7, 5, 4, 2, 0. Acum, din $a + b = 0$ şi $a + c = 2$, găsim $b = -a$ şi $c = 2 - a$. Apoi, din $e + d = 17$ şi $e + c = 14$, deducem că $d = -e + 17$ şi $c = -e + 14$, deci $e = a + 12$. Aşadar, putem scrie $A = \{a, -a, -a + 2, -a + 5, a + 12\}$. A treia sumă (în ordine crescătoare) este $a + d$ sau $b + c$ şi este egală cu 4. Cum $a + d = a - a + 5 = 5$, rămâne doar $b + c = -a - a + 2 = -2a + 2 = 4$, de unde rezultă că $a = -1$. În concluzie, avem $A = \{-1, 1, 3, 6, 11\}$.

G39. *Fie* $x_i \in \mathbb{R}$*,* $i = \overline{1, n}$*, unde* $n \geq 2003$*, astfel încât*

$$\begin{cases} x_1 - (n+1)\,x_2 + nx_3 \geq n - 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-2} - (n+1)\,x_{n-1} + nx_n \geq n - 1 \\ x_{n-1} - (n+1)\,x_n + nx_1 \geq n - 1 - n^2 \\ x_n - (n+1)\,x_1 + nx_2 \geq 2n - 1. \end{cases}$$

Dacă $x_1 = 1$*, să se calculeze* x_{2003}*.*

Romeo Cernat, Iaşi

Soluţie. Cu notaţiile $y_k = x_k - k + 1$, $k = \overline{1, n}$, sistemul dat devine:

$$y_1 - (n+1)\,y_2 + ny_3 \geq 0,\ y_2 - (n+1)\,y_3 + ny_4 \geq 0,\ \dots\ ,\ y_n - (n+1)\,y_1 + ny_2 \geq 0, \quad (1)$$

de unde, prin adunare, obţinem $0 \geq 0$. Aşadar, toate inegalităţile din sistemul (1) trebuie să fie egalităţi, adică

$$y_1 - y_2 = n\,(y_2 - y_3)\,,\quad y_2 - y_3 = n\,(y_3 - y_4)\,,\quad \dots\quad ,\ y_n - y_1 = n\,(y_1 - y_2)\,. \quad (2)$$

Înmulţind membru cu membru relaţiile din sistemul (2), obţinem

$$\begin{aligned} &(y_1 - y_2)\,(y_2 - y_3) \cdot \ldots \cdot (y_{n-1} - y_n)\,(y_n - y_1) = \\ &= n^n\,(y_1 - y_2)\,(y_2 - y_3) \cdot \ldots \cdot (y_{n-1} - y_n)\,(y_n - y_1)\,, \end{aligned}$$

de unde rezultă că una din paranteze este zero şi atunci conform cu (2), avem $y_1 = y_2 = \cdots = y_n$. Prin urmare, $1 = x_1 = x_2 - 1 = x_3 - 2 = \cdots = x_n - n + 1$, deci $x_{2003} = 2003$.

G40. *Comparaţi numerele reale a şi b, ştiind că* $a^2 - 14a + b^2 + 6b + 33 = 0$*.*

Bogdan Răducanu, elev, Iaşi

Soluţia I (un grup de elevi de la **Colegiul Naţional** din Iaşi şi **Alexandru Negrescu**, elev, Botoşani**).** Relaţia din enunţ se scrie $(a - 7)^2 + (b + 3)^2 = 25$. Deducem că $|a - 7| \leq 5$ şi $|b + 3| \leq 5$, de unde $a \in [2, 12]$ şi $b \in [-8, 2]$. Deci $b \leq 2 \leq a$ şi cum $a \neq b$ (prin verificare directă), rezultă că $a > b$.

Soluţia II. Dacă facem notaţia $a = b + t$ problema revine la compararea lui t cu zero. Înlocuind pe a în egalitatea dată, obţinem $2b^2 + 2b\,(t - 4) + t^2 - 14t + 33 = 0$, ecuaţie care are soluţie dacă şi numai dacă $\Delta = t^2 - 8t + 16 - 2t^2 + 28t - 66 =$

$= -t^2 + 20t - 50 \geq 0$. De aici, rezultă că $t \in \left[10 - 5\sqrt{2}, 10 + 5\sqrt{2}\right]$, deci $t > 0$. Aşadar, avem $a > b$.

G41. *Dacă $0 < x \leq y \leq z$, să se arate că*

$$3 \leq \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} \leq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \leq \frac{x}{z} + 1 + \frac{z}{x} \leq \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2}.$$

Ovidiu Pop, Satu Mare

Soluţie. Prima inegalitate rezultă din inegalitatea mediilor. Inegalitatea a doua este echivalentă cu $x^2y + z^2x + y^2z \leq x^2z + y^2x + z^2y$, sau $(y - x)(z - x)(z - y) \geq 0$, care este adevărată în virtutea ipotezei $0 < x \leq y \leq z$. Inegalitatea a treia este echivalentă cu $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} \leq \frac{x}{z} + 1$, adică $(z - y)(x - y) \leq 0$, care este adevărată. În sfârşit, pentru a demonstra ultima inegalitate vom folosi din nou inegalitatea mediilor. Avem: $\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 \geq 2 \cdot \frac{x}{z}$, $\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 + \left(\frac{z}{x}\right)^2 \geq 3$, $\left(\frac{z}{x}\right)^2 + 1 \geq 2 \cdot \frac{z}{x}$. Adunând aceste relaţii, obţinem $2\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2}\right) \geq 2\left(\frac{x}{z} + 1 + \frac{z}{x}\right)$, q.e.d.

G42. *Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}$, dacă $[x] + [x + a] = [bx]$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Luând $x = 0$ în egalitatea dată găsim $[a] = 0$, deci $a \in [0, 1)$. Din relaţiile $x - 1 + x + a - 1 < [x] + [x + a] = [bx] \leq bx$, $\forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că $a - 2 \leq x(b - 2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci $b = 2$. Aşadar, avem $[x] + [x + a] = [2x]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, de unde, având în vedere că $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x]$, deducem că $[x + a] = \left[x + \frac{1}{2}\right]$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (1). De aici, luând $x = \frac{1}{2}$, obţinem $a + \frac{1}{2} \in [1, 2)$, adică $a \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \cap [0, 1) = \left[\frac{1}{2}, 1\right)$. Dacă $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, atunci putem alege un $x_0 \in \left(1 - a, \frac{1}{2}\right)$ şi avem $0 < x_0 + \frac{1}{2} < 1 < x_0 + a$. În acest caz însă $\left[x_0 + \frac{1}{2}\right] = 0$, iar $[x_0 + a] \geq 1$, deci relaţia (1) nu este valabilă. Prin urmare, avem $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$, valori care verifică egalitatea dată.

G43. *Fie $\widehat{xOy}$ un unghi oarecare şi P un punct în interiorul său. Se consideră punctele $A, B \in [Ox$ cu $A \in (OB)$ şi $C, D \in [Oy$ cu $C \in (OD)$ astfel încât triunghiurile PAB şi PCD să fie echilaterale. Arătaţi că dreptele OP, AD şi BC sunt concurente dacă şi numai dacă P se află pe bisectoarea unghiului dat.*

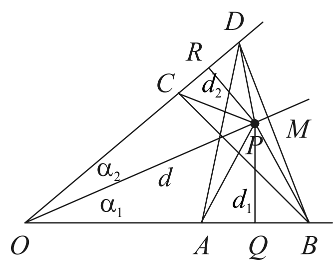
Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Fie $OP \cap BD = \{M\}$, $PR \perp CD$, $PQ \perp AB$ ($R \in CD$, $Q \in AB$) şi $PQ = d_1$, $PR = d_2$, $OP = d$. Avem:

$$\frac{MB}{MD} = \frac{OB \sin\alpha_1}{OD \sin\alpha_2} = \frac{OB\, d_1}{OD\, d_2}, \quad OQ = \sqrt{d^2 - d_1^2},$$

$$OA = OQ - AQ = \sqrt{d^2 - d_1^2} - d_1/\sqrt{3},$$

$$OB = OQ + QB = \sqrt{d^2 - d_1^2} + d_1/\sqrt{3},$$



$$OR=\sqrt{d^2-d_1^2},\quad OC=\sqrt{d^2-d_2^2}-d_2/\sqrt{3},\quad OD=\sqrt{d^2-d_2^2}+d_2/\sqrt{3}.$$

Cu aceste observaţii, putem scrie succesiv: OP, AD şi BC sunt concurente $\Leftrightarrow$

$$\frac{MB}{MD}\cdot\frac{CD}{CO}\cdot\frac{AO}{AB}=1\Leftrightarrow\frac{OB\cdot d_1}{OD\cdot d_2}\cdot\frac{2d_2/\sqrt{3}}{OC}\cdot\frac{OA}{2d_1/\sqrt{3}}=1\Leftrightarrow OA\cdot OB=OC\cdot OD\Leftrightarrow$$

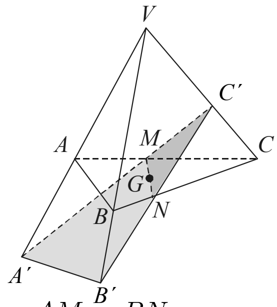
$$\left(\sqrt{d^2-d_1^2}-d_1/\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{d^2-d_1^2}+d_1/\sqrt{3}\right)=\left(\sqrt{d^2-d_2^2}-d_2/\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{d^2-d_2^2}+d_2/\sqrt{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow d^2-d_1^2-d_1^2/3=d^2-d_2^2-d_2^2/3\Leftrightarrow d_1=d_2\Leftrightarrow\alpha_1=\alpha_2.$$

G44. *Fie $VABC$ o piramidă, iar G centrul de greutate al $\triangle ABC$. Un plan ce trece prin G taie dreptele VA, VB, VC în A', B' şi respectiv C'. Să se arate că* $\frac{VA}{VA'}+\frac{VB}{VB'}+\frac{VC}{VC'}=3$.

Constantin Cocea, Iaşi

Soluţie. Fie $\{N\}=B'C'\cap BC$ şi $\{M\}=A'C'\cap AC$. Aplicând teorema lui Menelaus în triunghiurile VAC şi VBC, obţinem: $\frac{A'A}{A'V}\cdot\frac{C'V}{C'C}\cdot\frac{MC}{MA}=1$ şi $\frac{B'B}{B'V}\cdot\frac{C'V}{C'C}\cdot\frac{NC}{NB}=1$, de unde rezultă că $\frac{A'A}{VA'}+\frac{B'B}{VB'}=\frac{CC'}{VC'}\left(\frac{AM}{MC}+\frac{NB}{NC}\right)=\frac{CC'}{VC'}$ sau $\frac{VA'-VA}{VA'}+\frac{VB'-VB}{VB'}=\frac{VC-VC'}{VC'}$ sau $\frac{VA}{VA'}+\frac{VB}{VB'}+\frac{VC}{VC'}=3$. (Am folosit că $G\in MN$ implică $\frac{AM}{MC}+\frac{BN}{NC}=1$.)



G45. *Fie $SABC$ un tetraedru în care $\triangle ABC$ nu este echilateral, iar muchiile $[SA],[SB],[SC]$ nu sunt toate congruente. Demonstraţi că există şase puncte $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ pe dreptele SA, SB, SC, BC, AC şi respectiv AB astfel ca patrulaterele $A_1B_1A_2B_2$, $B_1C_1B_2C_2$ şi $A_1C_1A_2C_2$ să fie trapeze isoscele ($A_1B_1\|A_2B_2$, $A_1C_1\|A_2C_2$, $B_1C_1\|B_2C_2$) dacă şi numai dacă*

$$SA^2\left(AB^2-AC^2\right)+SB^2\left(BC^2-BA^2\right)+SC^2\left(CA^2-CB^2\right)=0.$$

Daly Marciuc, Satu Mare

Soluţie. Să presupunem că $A_1B_1A_2B_2$, $B_1C_1B_2C_2$ şi $A_1C_1A_2C_2$ sunt trapeze isoscele în modul indicat. Din $A_1B_1\parallel A_2B_2$ rezultă că $B_2A_2\parallel AB$ şi apoi, analog, rezultă că $B_2C_2\parallel BC$ şi $A_2C_2\parallel AC$. De aici, deducem că $AB_2A_2C_2$ şi $BA_2B_2C_2$ sunt paralelograme, deci C_2 este mijlocul lui AB. Analog, obţinem că B_2 şi A_2 sunt mijloacele laturilor AC şi BC.

Din $A_1B_1\parallel AB$, $A_1C_1\parallel AC$ şi $B_1C_1\parallel BC$ rezultă că

$$\frac{A_1A}{SA}=\frac{B_1B}{SB}=\frac{C_1C}{SC}=k. \tag{1}$$

Notând $BC=a$, $AC=b$ şi $AB=c$, avem: $A_1B_2^2=A_2B_1^2\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow k^2SA^2+\frac{b^2}{4}-k\cdot\frac{SA^2+b^2-SC^2}{2}=k^2SB^2+\frac{a^2}{4}-k\cdot\frac{SB^2+a^2-SC^2}{2},\text{ deci}$$

$$A_1B_2^2=A_2B_1^2\Leftrightarrow 2k\left(SB^2-SA^2\right)=a^2-b^2. \tag{2}$$

În mod analog, găsim echivalenţa:

$$B_1C_2^2 = C_1B_2^2 \Leftrightarrow 2k\left(SB^2 - SC^2\right) = c^2 - b^2. \qquad (3)$$

În fine, din (2) şi (3) rezultă că

$$SA^2\left(c^2 - b^2\right) + SB^2\left(a^2 - c^2\right) + SC^2\left(b^2 - a^2\right) = 0. \qquad (4)$$

Reciproc, relaţia (4) poate fi scrisă astfel:

$$\frac{a^2 - b^2}{2\left(SB^2 - SA^2\right)} = \frac{c^2 - b^2}{2\left(SB^2 - SC^2\right)} \overset{\text{not}}{=} k. \qquad (5)$$

Alegem A_1, B_1, C_1 pe SA, SB, SC astfel încât să avem relaţia (1). În acest caz din (5) rezultă că $A_1B_1A_2B_2$ şi $B_1C_1B_2C_2$ sunt trapeze isoscele, unde A_2, B_2 şi C_2 sunt mijloacele laturilor BC, AC şi AB ($A_1B_1 \parallel AB \parallel A_2B_2$ etc.). Dacă $A_1B_1A_2B_2$ şi $B_1C_1B_2C_2$ sunt trapeze isoscele înseamnă că $A_1A_2 = B_1B_2$ şi $B_1B_2 = C_1C_2$, deci $A_1A_2 = C_1C_2$, adică şi $A_1C_1A_2C_2$ este isoscel.

B. Nivel liceal

L36. *Fie* $\triangle ABC$ *şi* $\mathcal{M}$ *triunghiul său median. Dacă* P *este un punct aflat în interiorul sau pe laturile lui* $\mathcal{M}$, *iar* A', B', C' *sunt intersecţiile dreptelor* AP, BP, CP *cu laturile* BC, CA *şi respectiv* AB, *atunci* $\dfrac{1}{4} < \dfrac{AP \cdot BP \cdot CP}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leq \dfrac{8}{27}$.

Marian Ionescu, Piteşti

Soluţie. Notăm $S_1 = \sigma(PBC)$, $S_2 = \sigma(PCA)$, $S_3 = \sigma(PAB)$ şi $S = \sigma(ABC)$. Se stabilesc cu uşurinţă relaţia $\dfrac{AP}{AA'} = \dfrac{S_2 + S_3}{S}$ şi analoagele şi se deduce relaţia lui Gergonne $\dfrac{AP}{AA'} + \dfrac{BP}{BB'} + \dfrac{CP}{CC'} = 2$. Cu inegalitatea mediilor obţinem $2 \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{AP}{AA'} \cdot \dfrac{BP}{BB'} \cdot \dfrac{CP}{CC'}}$, de unde deducem a doua parte a dublei inegalităţi din enunţ. Pentru prima parte, observăm mai întâi că, dacă P se află în interiorul sau pe laturile triunghiului $\mathcal{M}$, au loc inegalităţile $S_2 + S_3 \geq S_1$, $S_3 + S_1 \geq S_2$ şi $S_1 + S_2 \geq S_3$. Notând $x = \dfrac{1}{2}(S_2 + S_3 - S_1)$, $y = \dfrac{1}{2}(S_3 + S_1 - S_2)$, $z = \dfrac{1}{2}(S_1 + S_2 - S_3)$, $t = x + y + z$ şi observând că $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ (numai unul poate fi nul), $t > 0$, avem:

$$\frac{AP}{AA'} \cdot \frac{BP}{BB'} \cdot \frac{CP}{CC'} = \frac{(S_2 + S_3)(S_3 + S_1)(S_1 + S_2)}{S^3} =$$
$$= \frac{(t + x)(t + y)(t + z)}{8t^3} > \frac{t^3 + t^2(x + y + z)}{8t^3} = \frac{2t^3}{8t^3} = \frac{1}{4}.$$

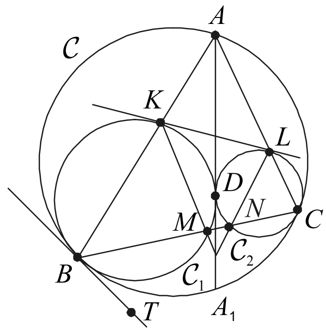
Notă. Soluţie corectă s-a primit de la **Marius Pachiţariu**, elev, Iaşi.

Notă. Această problemă apare în articolul *"About elementary inequalities in triangle"* (**M. Dincă**, **M. Bencze**) din revista *Octogon Math. Magazine*, 9 (2001), no. 1B, p. 472. Aici nu se cere ca punctul P să fie în interiorul sau pe laturile triunghiului $\mathcal{M}$, dar soluţia prezentată este incorectă.

L37. *Fie cercurile* $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ *şi* $\mathcal{C}$ *astfel încât* $\mathcal{C}_1$ *şi* $\mathcal{C}_2$ *sunt tangente exterior în* D, *iar cercurile* $\mathcal{C}_1$ *şi* $\mathcal{C}_2$ *sunt tangente interior lui* $\mathcal{C}$ *în* B, *respectiv* C. *Tangenta* *comună interioară cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ taie cercul $\mathcal{C}$ în A şi A_1, dreapta AB taie $\mathcal{C}_1$ în K, iar AC taie $\mathcal{C}_2$ în L. Să se arate că* $\dfrac{1}{DA}+\dfrac{1}{DA_1}=\dfrac{2}{KL}$.

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

Soluţie. Fie $\{M\}=\mathcal{C}_1\cap BC$, $\{N\}=\mathcal{C}_2\cap BC$ şi T un punct pe tangenta în B la cercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$.



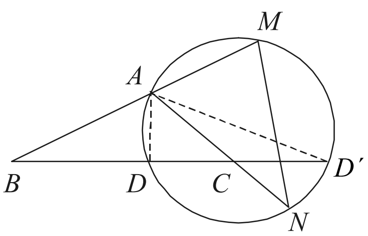
Arătăm că dreapta KL este tangenta comună exterioară cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$. Într-adevăr, avem $m(\widehat{MKB})=m(\widehat{MBT})=m(\widehat{CBT})=m(\widehat{CAB})$, deci $MK\parallel CA$. Ca urmare, $\widehat{MKL}\equiv\widehat{KLA}$. Cum $\widehat{KLA}\equiv\widehat{CBA}$, deoarece $\triangle KLA\sim\triangle CBA$ (fapt ce decurge din $AK\cdot AB=AL\cdot AC=AD^2$), rezultă că $\widehat{MKL}\equiv\widehat{CBA}$. Deci $\widehat{MKL}\equiv\widehat{MBA}$, adică KL este tangentă la cercul $\mathcal{C}_1$. Analog se arată că drepta KL este tangentă la $\mathcal{C}_2$.

Aplicăm teorema lui Casey pentru cercurile $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, cercurile degenerate A, A_1 tangente interior la $\mathcal{C}$ şi obţinem relaţia $AD\cdot A_1D+AD\cdot A_1D=AA_1\cdot KL$ sau $\dfrac{2}{KL}=\dfrac{AA_1}{AD\cdot A_1D}$, adică $\dfrac{2}{KL}=\dfrac{1}{AD}+\dfrac{1}{A_1D}$.

L38. *Fie $\triangle ABC$ şi punctele $D,D'\in BC$ conjugate armonic în raport cu vârfurile B şi C. Cercul circumscris $\triangle ADD'$ intersectează AB în M şi AC în N. Arătaţi că, dacă $MN\perp BC$, atunci $[AD$ şi $[AD'$ sunt bisectoarele unghiului $\widehat{A}$ (interioară şi exterioară) sau $m(\widehat{A})=90°$.*

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Avem $MN\perp DD'\Leftrightarrow MD^2+ND'^2=MD'^2+ND^2$ (1). Dacă notăm $\dfrac{DB}{DC}=\dfrac{D'B}{D'C}=\alpha$, atunci $BD=\dfrac{\alpha a}{1+\alpha}$, $CD=\dfrac{a}{1+\alpha}$, $BD'=\dfrac{\alpha a}{\alpha-1}$, $CD'=\dfrac{a}{\alpha-1}$ (2). Exprimând puterea punctelor B şi C faţă de cercul (ADD'), vom obţine relaţiile: $c\cdot BM=BD\cdot BD'$ şi $b\cdot CN=CD\cdot CD'$ sau



$$BM=\frac{\alpha^2a^2}{c\,(\alpha^2-1)}\quad\text{şi}\quad CN=\frac{a^2}{b\,(\alpha^2-1)}.\qquad(3)$$

Utilizând teorema cosinusului în $\triangle BMD$, $\triangle CND'$, $\triangle BMD'$ şi $\triangle CND$, (1) se scrie

$$\big(BM^2+BD^2-2BM\cdot BD\cos B\big)+\big(CN^2+CD'^2-2CN\cdot CD'\cos C\big)=$$
$$=\big(BM^2+BD'^2-2BM\cdot BD'\cos B\big)+\big(CN^2+CD^2+2CN\cdot CD\cos C\big)$$

şi, ţinând seama de (2) şi (3), găsim $-4\alpha\left(\alpha^2-1\right)a^2+\dfrac{4\alpha^3a^3}{c}\cos B-\dfrac{4a^3\alpha}{b}\cos C=0$. Din nou utilizând teorema cosinusului, obţinem

$$-\left(\alpha^2-1\right)2b^2c^2+\alpha^2b^2\left(a^2+c^2-b^2\right)-c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)=0\quad\text{sau}$$
$$b^2\left(a^2-b^2-c^2\right)\alpha^2-c^2\left(a^2-b^2-c^2\right)=0,$$

ultima echivalentă cu $\alpha=\pm\dfrac{c}{b}$ sau $a^2=b^2+c^2$, de unde rezultă concluzia.

L39. *Determinaţi toate numerele naturale nenule* n *pentru care* $\dfrac{an(an+2)}{p(p+1)}$ *este pătrat perfect, unde* $a, p \in \mathbb{N}^*$.

Mihai Haivas, Iaşi

Soluţie. Fie $\dfrac{a^2n^2+2an}{p(p+1)} = y^2$, $y \in \mathbb{N}^*$. Avem $(an+1)^2 - p(p+1)y^2 = 1$, de unde, cu $x = an+1$, obţinem ecuaţia lui Pell: $x^2 - p(p+1)y^2 = 1$, care are soluţia fundamentală $(x_0, y_0) = (2p+1, 2)$ şi soluţia generală

$$x_k = \frac{1}{2}\left[\left(x_0 + y_0\sqrt{p(p+1)}\right)^k + \left(x_0 - y_0\sqrt{p(p+1)}\right)^k\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(2p+1+2\sqrt{p(p+1)}\right)^k + \left(2p+1-2\sqrt{p(p+1)}\right)^k\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{p+1}+\sqrt{p}\right)^{2k} + \left(\sqrt{p+1}-\sqrt{p}\right)^{2k}\right],$$
$$y_k = \frac{1}{2\sqrt{p(p+1)}}\left[\left(x_0 + y_0\sqrt{p(p+1)}\right)^k - \left(x_0 - y_0\sqrt{p(p+1)}\right)^k\right] =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{p(p+1)}}\left[\left(\sqrt{p+1}+\sqrt{p}\right)^{2k} - \left(\sqrt{p+1}-\sqrt{p}\right)^{2k}\right].$$

Prin urmare, avem:

$$n_k = \frac{1}{2a}\left[\left(\sqrt{p+1}+\sqrt{p}\right)^{2k} + \left(\sqrt{p+1}-\sqrt{p}\right)^{2k} - 2\right]$$

care este soluţie dacă $2a \mid \left[\left(\sqrt{p+1}+\sqrt{p}\right)^{2k} + \left(\sqrt{p+1}-\sqrt{p}\right)^{2k} - 2\right]$.

Notă. Soluţie corectă s-a primit de la **Marius Pachiţariu**, elev, Iaşi.

L40. *Fie* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ *astfel încât* $\det\left(A^2B + AB^2\right)$ *este impar. Să se arate că* $A + \alpha B$ *este inversabilă pentru orice* $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Marian Ursărescu, Roman

Soluţie. Deoarece $\det\left(A^2B+AB^2\right) = \det A \cdot \det(A+B) \cdot \det B$ este un număr impar, rezultă că $\det A$, $\det(A+B)$ şi $\det B$ sunt numere impare. Fie polinomul $p(X) = \det(A+XB) = \det A + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + (\det B)X^n$. Cum $p(1) = \det(A+B) = \det A + a_1 + \cdots + a_{n-1} + \det B$ este număr impar, înseamnă că şi $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$ este număr impar. Să presupunem acum că polinomul p are o rădăcină raţională $\alpha = \dfrac{p}{q}$, cu $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, $(p,q) = 1$. În acest caz, avem $p \mid \det A$ şi $q \mid \det B$, deci p şi q sunt impare. Din $p(\alpha) = 0$, rezultă că $(\det A)q^n + a_1pq^{n-1} + \cdots + a_{n-1}p^{n-1}q + (\det B)p^n = 0$, sau $(\det A)q^n + (\det B)p^n + a_1\left(p^{n-1}q - 1\right) + \cdots + a_{n-1}\left(p^{n-1}q-1\right) = -(a_1 + \cdots + a_{n-1})$, egalitate care este falsă deoarece membrul din stânga este par, iar cel din dreapta este impar. Prin urmare $p(\alpha) = \det(A+\alpha B) \neq 0$, pentru orice număr raţional α, adică matricea $A + \alpha B$ este inversabilă oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{Q}$.

L41. *Demonstraţi că grupul simetric* S_{32} *nu are elemente de ordin* 2002.

Paul Georgescu şi Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Presupunem că există $\sigma \in S_{32}$ un element de ordin 2002. Fie $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$ descompunerea sa în produs de cicli disjuncţi cu ordinele k_1, k_2, $\ldots$,

k_n. Avem $k_1+k_2+\cdots+k_n=32$ şi $[k_1,k_2,\ldots,k_n]=2002$. Cum $2002=2\cdot 7\cdot 11\cdot 13$, rezultă că există k_{i1}, k_{i2}, k_{i3}, k_{i4}, nu neapărat distincte, astfel încât $2\mid k_{i1}$, $7\mid k_{i2}$, $11\mid k_{i3}$, $13\mid k_{i4}$. Dacă k_{i1}, k_{i2}, k_{i3}, k_{i4} sunt distincte, atunci $k_{i1}+k_{i2}+k_{i3}+k_{i4}\geq 33$, ceea ce este fals. Dacă două, sau mai multe, din cele patru ordine coincid, atunci ordinul corespunzător se divide cu produsul factorilor ce-i corespund, fiind mai mare sau egal decât produsul aceloraşi factori şi deci mai mare sau egal decât suma lor. Astfel, în acest caz obţinem iarăşi că suma ordinelor este mai mare sau egală cu 33, ceea ce este fals.

L42. *Fie* $(A,+,\cdot)$ *un inel comutativ şi finit, cu cel puţin* 5 *elemente şi cu* $1+1\in A$ *inversabil. Fie* $M=\left\{x\in A\mid x^2=1\right\}$, $I=\left\{x\in A\mid x^2=x\right\}$. *Să se arate că* $\operatorname{card}M=\operatorname{card}I<\operatorname{card}A/2$.

Ovidiu Munteanu, Braşov

Soluţie. Dacă $a\in A$, atunci $2^{-1}(1+a)\in A$ şi avem: $2^{-1}(1+a)\in I\Leftrightarrow \left(2^{-1}(1+a)\right)^2=2^{-1}(1+a)\Leftrightarrow 2^{-2}\left(1+2a+a^2\right)=2^{-1}(1+a)\Leftrightarrow 1+2a+a^2= =2(1+a)\Leftrightarrow a^2=1\Leftrightarrow a\in M$, de unde rezultă egalitatea $\operatorname{card}M=\operatorname{card}I$.

Să demonstrăm acum partea a doua a relaţiei date. Dacă avem $\operatorname{card}I=2$, atunci $\operatorname{card}A\geq 5>2\operatorname{card}I$. În continuare ne ocupăm de cazul în care $\operatorname{card}I>2$. În această situaţie, fie $a\in I\setminus\{0,1\}$ şi atunci $1-a\in I\setminus\{0,1,a\}$. Într-adevăr, dacă $1-a=a$, rezultă că $a=2^{-1}$, adică a este inversabil şi din $a^2=a$ obţinem $a=1$, ceea ce este fals. Avem deci $\operatorname{card}I>3$. Fie $J=\{x\in A\mid -x\in I\}$ şi atunci $I\cap J=\{0\}$, pentru că $x\in I\cap J$ înseamnă $x=-x=x^2$, deci $2x=0$, adică $x=0$. Pe de altă parte, avem $I\cap M=\{1\}$ şi $J\cap M=\{-1\}$. Cum I, J, M au acelaşi număr de elemente, rezultă că are loc $\operatorname{card}A\geq 3\operatorname{card}I-3>2\operatorname{card}I$.

L43. *Determinaţi polinoamele* $P\in\mathbb{R}[X]$ *pentru care* $P(z)\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, $\forall z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Polinoamele de gradul 1, $P(X)=aX+b$ $(a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0)$ verifică ipoteza, deci sunt soluţii ale problemei. Arătăm că acestea sunt singurele soluţii.

Fie $P\in\mathbb{R}[X]$ cu $\operatorname{grad}P=n\geq 2$ şi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+ +\cdots+a_n$ $(a_0\neq 0)$ funcţia polinomială asociată acestuia. Fie $a_0>0$ (la fel se va proceda dacă $a_0<0$). Observăm că $\forall m\in\mathbb{R}$ ecuaţia $f(x)=m$ are numai soluţii reale (n soluţii), în caz contrar ar exista $z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ şi $f(z)=m\in\mathbb{R}$.

Dacă n este par, atunci $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\infty$. De aici şi din continuitatea lui f, rezultă că $\operatorname{Im}f=[m,\infty)$, unde $m=\inf\{f(x);x\in\mathbb{R}\}$. Pentru $k<m$ ecuaţia $f(x)=k$ nu are soluţii reale, fals.

Dacă n este impar, avem $f'(x)=na_0x^{n-1}+\cdots$, deci $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f'(x)=+\infty$ şi $f'(x)>0$ pentru $|x|$ suficient de mare. Deci f este strict crescătoare pe intervalele $(-\infty,\alpha)$ şi (β,∞) $(\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ convenabil aleşi). De aici, din continuitatea funcţiei f (deci mărginirea ei pe orice interval $[\alpha,\beta]$) şi din faptul că $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, deducem că $\exists\beta\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(\beta)\geq f(x)$, $\forall x\in(-\infty,\beta]$. Ca urmare ecuaţiile $f(x)=k$, cu $k>f(\beta)$ au soluţie reală unică, fals.

L44. *Fie* $n\geq 2$ *număr natural, iar* $f_0,f_1,f_2,\ldots$ *un şir de polinoame definit prin* $f_0=(X+1)^n$, $f_{p+1}=X\cdot f_p'$, $\forall p\geq 0$. *Definim încă* $h_p=f_p-\sigma_1^{p-1}f_{p-1}+ +\cdots+(-1)^{p-1}\sigma_{p-1}^{p-1}f_1$, $\forall p\geq 1$, *unde* $\sigma_k^n=\sum\limits_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}i_1i_2\ldots i_k$, $k\in\{1,2,\ldots,n\}$

sunt sumele simetrice fundamentale ale numerelor $1, 2, \ldots, n$. *Să se arate că* $h_p = n(n-1)\cdots(n-p+1)\, X^p (X+1)^{n-p}$, $\forall p = 1, 2, \ldots$

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Să arătăm că $h_{p+1} = Xh'_p - ph_p$. Avem $h_{p+1} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \sigma_k^p f_{p+1-k} =$
$= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \left(\sigma_k^{p-1} + p\sigma_{k-1}^{p-1}\right) f_{p+1-k} = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \sigma_k^{p-1} f_{p+1-k} + \sum_{k=1}^{p} (-1)^k p\sigma_{k-1}^{p-1} f_{p+1-k} =$
$= X \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \sigma_k^{p-1} f'_{p-k} - p \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \sigma_{k-1}^{p-1} f_{p+1-k} = Xh'_p - ph_p$ (am considerat $\sigma_0^n = 1$ şi $\sigma_k^n = 0$, pentru $k < 0$ sau $k > n$).

Demonstraţia se poate face prin inducţie şi se bazează pe formula stabilită. Direct din enunţ, deducem că $h_1 = f_1 = Xf'_0 = nX(X+1)^{n-1}$. Să presupunem acum că are loc egalitatea $h_p = n(n-1)\cdots(n-p+1)\, X^p (X+1)^{n-p}$. În acest caz, putem scrie:

$$\begin{aligned} h_{p+1} = Xh'_p - ph_p &= n(n-1)\cdots(n-p+1)\, pX^p (X+1)^{n-p} + \\ &+ n(n-1)\cdots(n-p+1)(n-p)\, X^{p+1} (X+1)^{n-p+1} - \\ &- pn(n-1)\cdots(n-p+1)\, X^p (X+1)^{n-p} = \\ &= n(n-1)\cdots(n-p+1)(n-p)\, X^{p+1} (X+1)^{n-p+1}. \end{aligned}$$

Să mai observăm că, deoarece $h_n = n!\,X^n$, $h_{n+1} = Xn!\,nX^{n-1} - n\,n!\,X^n = 0$, rezultă că $h_p = 0$, pentru orice $p \geq n+1$.

L45. *Fie* $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *continuă. Dacă funcţia* $F : [0, \infty) \to R$, $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ *este mărginită, să se arate că* $\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 xf(nx)\, dx = 0$.

Adrian Zanoschi, Iaşi

Soluţie. Dacă în integrala $I_n = \int_0^1 nxf(nx)\, dx$ facem schimbarea de variabilă $nx = t$, obţinem $I_n = \int_0^n \frac{t}{n} f(t)\, dt$. Fie $\varepsilon \in (0, 1)$. Avem

$$|I_n| \leq \int_0^{n\varepsilon} \frac{n\varepsilon}{n} f(t)\, dt + \int_{n\varepsilon}^{n} \frac{n}{n} f(t)\, dt = \varepsilon \int_0^{n\varepsilon} f(t)\, dt + \int_{n\varepsilon}^{n} f(t)\, dt. \qquad (1)$$

Deoarece F este mărginită, există $M > 0$ astfel încât $F(x) < M$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$ (2). Cum f este continuă, rezultă că F este derivabilă şi $F'(x) = f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, deci F este crescătoare. De aici, având în vedere mărginirea funcţiei F, deducem că există $\lim_{x\to\infty} F(x)$ şi este finită. Prin urmare, $\lim_{x\to\infty} (F(x) - F(x\varepsilon)) = \lim_{x\to\infty} \int_{x\varepsilon}^{x} f(t)\, dt = 0$, de unde rezultă că există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_0$ are loc:

$$\left| \int_{n\varepsilon}^{n} f(t)\, dt \right| = \int_{n\varepsilon}^{n} f(t)\, dt < \varepsilon. \qquad (3)$$

Din relaţiile (1), (2), şi (3) obţinem $|I_n| < \varepsilon \int_0^{n\varepsilon} f(t)\, dt + \varepsilon < \varepsilon (M+1)$, $\forall n \geq n_0$, ceea ce înseamnă că $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.