Soluţiile problemelor propuse în nr. 1/2002

Clasele primare

P.24. *Aflaţi numerele a, b, c, d ştiind că verifică în acelaşi timp următoarele egalităţi: $a+3=b$, $b+3=c$, $c+3=d$, $a+3=10$.*

(*Clasa I*) **Înv. Maria Racu, Iaşi**

Soluţie. Din ultima relaţie aflăm pe a, $a=10-3=7$, apoi $b=7+3=10$, $c=10+3=13$, $d=13+3=16$.

P.25. *Un elev din clasa I, fixând un număr din şirul numerelor naturale, constată că suma numerelor din faţa lui nu este mai mică decât 55, iar suma aceasta adunată cu numărul fixat nu depăşeste pe 66. Despre ce număr este vorba?*

(*Clasa I*) **Luminiţa Popa, elevă, Iaşi**

Soluţie. Suma numerelor din faţa numărului căutat poate fi $55, 56, \ldots$. A doua sumă poate fi $66, 65, 64, \ldots$. Dacă a doua sumă nu este 66, atunci cea mai mare valoare posibilă a numărului căutat este $65-55=10$. Suma primelor nouă numere nenule este 45, ceea ce nu corespunde datelor problemei. Deducem că a doua sumă este 66. Dacă prima sumă nu este 55, atunci cea mai mare valoare posibilă a numărului căutat este $66-56=10$ şi iarăşi ajungem la o contradicţie. Numărul căutat este $66-55=11$.

P.26. *Pe trei borcane de compot, unul de cireşe, altul de vişine şi al treilea cu amestec de cireşe şi vişine, toate etichetele au fost puse greşit. Scoţând un singur fruct dintr-un singur borcan, determinaţi conţinutul fiecăruia.*

(*Clasa a II-a*) *******

Soluţie. Se scoate un fruct din borcanul cu eticheta CV. Dacă fructul este cireaşă, atunci în borcanul cu eticheta V nu putem avea numai vişine sau numai cireşe. Rezultă că avem cireşe şi vişine. În acest caz avem corespondenţa etichetă-conţinut $\boxed{\text{CV}}\to$C, $\boxed{\text{C}}\to$V, $\boxed{\text{V}}\to$CV. Dacă fructul extras este vişină, atunci avem corespondenţa $\boxed{\text{CV}}\to$V, $\boxed{\text{C}}\to$CV, $\boxed{\text{V}}\to$C.

P.27. *Să se scrie numărul 31 folosind cele patru operaţii aritmetice şi numai cifra 3 (se cer cel puţin două soluţii).*

(*Clasa a II-a*) **Andrea Balla, elevă, Braşov**

Soluţie. 1) $[(3+3)\cdot 3-3]\cdot(3-3:3)+3:3=15\cdot 2+1=31$.

2) $[(3+3:3)\cdot 3-(3-3:3)]\cdot 3+3:3=10\cdot 3+1=31$.

P.28. *Câte pagini are o carte dacă pentru paginarea ei s-a folosit cifra 9 de 117 ori?*

(*Clasa a III-a*) **Crizantema Mironeanu, elevă, Iaşi**

Soluţie. De la pagina 1 la pagina 100 se foloseşte cifra 9 de 20 ori. Înseamnă că de la pagina 1 la pagina 600 se foloseşte cifra 9 de 120 de ori. Pentru a folosi de 117 ori cifra 9 trebuie să eliminăm paginile: $600, 599, 598$. Cartea are 597 pagini.

P.29. *Ioana şi Alina au cules împreună 165 de nuci. Ioana a cules mai puţine nuci decât Alina; ea face un calcul şi observă că triplul diferenţei dintre numărul nucilor culese de ele reprezintă tocmai numărul nucilor culese de Alina. Câte nuci a* *culeş fiecare fată?*

(*Clasa a III-a*) **Înv. Maria Racu, Iaşi**

Soluţie. Examinând textul se constată că Alina are trei părţi iar Ioana două părţi din cele cinci părţi egale. Alina a cules $165 : 5 \cdot 3 = 33 \cdot 3 = 99$ (nuci) iar Ioana a cules $165 - 99 = 66$ (nuci).

P.30. *Arătaţi că dintre oricare patru numere naturale diferite, mai mici decât* $1\,000\,000$*, se pot alege două a căror diferenţă să se împartă exact la* 3.

(*Clasa a IV-a*) **Roxana Bolocan, elevă, Iaşi**

Soluţie. La împărţirea cu 3 resturile posibile sunt $0, 1, 2$. Înseamnă că cel puţin două numere din cele patru vor da acelaşi rest la împărţirea cu 3. Fie $a = 3c + r$, $b = 3d + r$, $a > b$. Avem $a - b = 3c - 3d = 3\,(c - d)$.

P.31. *O veveriţă descoperă un alun încărcat cu fructe şi îşi face provizii pentru iarnă transportând la scorbura sa alternativ: o dată două alune, o dată trei alune. După ce transportă* 47 *de alune, face o pauză pentru a se odihni. Să se calculeze ce distanţă a parcurs veveriţa în total, dacă de la alun la scorbura ei este o distanţă de* x *hm* x *dam* x *m, unde* x *are ca valoare cel mai mic număr natural posibil.*

(*Clasa a IV-a*) **Înv. Mihai Agrici, Iaşi**

Soluţie. Numărul x nu poate fi 0. Înseamnă că x este 1. Distanţa de la scorbură la alun este de 1hm 1dam 1m= 111m. Pentru prima grupă de 5 alune parcurge traseul Alun-Scorbură-Alun-Scorbură, deci $3 \cdot 111$m. Pentru fiecare grupă de 5 alune, din restul de 42, parcurge traseul Scorbură-Alun-Scorbură-Alun-Scorbură, deci $4 \cdot 111$m. Deoarece sunt 8 grupe, veveriţa va parcurge $8 \cdot 4 \cdot 111$m. Pentru restul de 2 alune va parcurge traseul Scorbură-Alun-Scorbură, deci $2 \cdot 111$m.

În total veveriţa parcurge $(3 + 32 + 2) \cdot 111\text{m} = 37 \cdot 111\text{m} = 4107\text{m}$.

P.32. *Un părinte îşi împarte averea astfel: la primul copil* 10 *milioane plus o cincime din rest, la al doilea copil* 20 *de milioane plus o cincime din noul rest, la al treilea* 30 *de milioane plus o cincime din noul rest şi aşa mai departe. Să se afle suma împărţită de părinte, precum şi numărul copiilor, ştiind că toţi au moşteniri egale.*

(*Clasa a IV-a*) **Mihai Gârtan, Iaşi**

Soluţie. Din faptul că primii doi copii au primit sume egale rezultă că $(R_1 - R_2) : 5 = 10$, adică $R_1 - R_2 = 50$. Al doilea copil primeşte din suma de $\dfrac{4}{5}$ din R_1, ceea ce înseamnă că $\dfrac{4}{5}$ din R_1 depăşeşte pe R_2 cu 20 milioane. Avem $R_1 - R_2 = 50$ şi $4 \cdot R_1 : 5 - R_2 = 20$ de unde rezultă $R_1 : 5 = 30$. Obţinem $R_1 = 5 \cdot 30 = 150$ şi $S = 10 + 150 = 160$ (milioane). Deci suma împărţită este de 160 milioane. Primul copil a primit $10 + 150 : 5 = 40$ (milioane). Numărul copiilor este $160 : 40 = 4$.

Clasa a V-a

V.26. *Să se determine cifrele distincte şi nenule* a, b, c, d, e, f, g *pentru care rezultatul înmulţirii alăturate este cel mai mare posibil:*

$$\begin{array}{ccccc} & & a & 0 & b \\ & & c & 0 & d \\ \hline & & e & * & f \\ g & * & * & & \\ \hline g & * & * & * & f \end{array}$$

Ioan Sacăleanu, Hârlău

Soluţie. Avem $ad = e < 10$ şi $ac = g < 10$. Deoarece cifrele $a, b, c, \ldots, g$ sunt distincte, rezultă că $ad, ac \in \{1 \cdot 2,\ 1 \cdot 3,\ \ldots\ ,\ 1 \cdot 9,\ 2 \cdot 1,\ 2 \cdot 3,\ 2 \cdot 4,\ 3 \cdot 1,\ 3 \cdot 2\}$. Cum $a \neq 1$ (căci altfel am avea $d = e$) şi $c \neq 1$, $d \neq 1$ (din motive similare), urmează că $ad, ac \in \{2 \cdot 3, 2 \cdot 4, 3 \cdot 2\}$. Ca urmare, pentru ca produsul din enunţ, să fie maxim, luăm $g = 8$, $e = 6$, $a = 2$, $d = 3$, $c = 4$. Au rămas de aflat cifrele b şi f. Observăm că $b, f \in \{1, 5, 7, 9\}$. Dar $b \neq 1$ (căci altfel $f = 3 = d$) şi $b \neq 5$ (altfel $f = 5 = b$). Deci $b = 7$ şi $f = 1$ sau $b = 9$ şi $f = 7$. În consecinţă produsul cel mai mare este $209 \cdot 403 = 84227$ şi cifrele căutate sunt: $a = 2$, $b = 9$, $c = 4$, $d = 3$, $e = 6$, $f = 7$, $g = 8$.

V.27. *Trei apicultori au tras împreună 700 kg miere de albine. Când au împărţit mierea, primul apicultor a luat jumătate, al doilea jumătate din rest, al treilea jumătate din noul rest, apoi operaţiunea se repetă până se împarte toată mierea. Să se afle câtă miere a luat fiecare.*

Cătălin-Cristian Budeanu, Iaşi

Soluţie. Se observă că primul apicultor ia de două ori mai multă miere decât al doilea, iar al doilea de două ori mai multă decât al treilea. Dacă x notează cantitatea de miere luată de al treilea apicultor, atunci al doilea ia $2x$, iar primul $4x$ şi obţinem relaţia $x + 2x + 4x = 700$. Rezultă că $x = 100$; deci al treilea ia 100 kg de miere, al doilea 200 kg, iar primul 400 kg.

V.28. *Arătaţi că* $N_1 = 3^{2001} + 2^{2001}$ *şi* $N_2 = 3^{2002} - 2^{2002}$ *sunt numere divizibile cu* 5.

Dorina Carapanu, Iaşi

Soluţie. Ultima cifră a unui număr de forma 2^{4n} este 6, iar a unuia de forma 3^{4n} este 1. Prin urmare, $2^{2000} = 2^{4 \cdot 500}$ se termină în 6, iar $2^{2001} = 2^{2000} \cdot 2$ are ultima cifră 2. La fel obţinem că 3^{2001} se termină în 3. Ca urmare, N_1 se termină în 5 şi este, deci, divizibil cu 5.

În privinţa numărului N_2, observăm că 3^{2002} se termină în 9, 2^{2002} în 4, iar însuşi N_2 în $9 - 4 = 5$. Deci, $N_2 \,\vdots\, 5$.

V.29. *Să se afle numerele* $\overline{abc}$ *pentru care* $\overline{abc} = \overline{ac} \cdot b^2$.

Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă, Blaj

Soluţie. Valorile $b = 0$ şi $b = 1$ nu sunt posibile deoarece condiţia din enunţ se scrie $\overline{a0c} = 0$ şi respectiv $\overline{a1c} = \overline{ac}$ şi aceste egalităţi sunt false. Nici $b = 2$ nu-i o valoare posibilă, căci $100a + 20 + c = 40a + 4c \Leftrightarrow 60a + 20 = 3c$, ceea ce este evident fals ($3c$ poate fi cel mult 27).

Pentru $b = 3$ avem: $100a + 30 + c = 90a + 9c \Leftrightarrow 5a + 15 = 4c$. Ultima relaţie implică $c \,\vdots\, 5$, adică $c = 5$, precum şi $a = 1$. Obţinem că $\overline{abc} = 135$ este o soluţie a problemei.

Arătăm că nu putem avea $b \geq 4$. Într-adevăr, $\overline{abc} = \overline{ac} \cdot b^2 \Leftrightarrow 100a + 10b + c = b^2 \times \times (10a + c) \Leftrightarrow 10b = \left(10ab^2 - 100a\right) + \left(b^2 c - c\right) \Leftrightarrow 10b = 10\left(b^2 - 10\right) a + \left(b^2 - 1\right) c$ (1). Dacă $b \geq 4$, atunci $b^2 - 10 > 0$, $b^2 - 1 > 0$ şi din (1) rezultă că $10b \geq 10\left(b^2 - 10\right)$ (am minorat a cu 1 şi c cu 0). Constatăm că această inegalitate nu-i verificată de valorile $b = 4, 5, \ldots, 9$.

Numărul $\overline{abc} = 135$ este singura soluţie.

V.30. *Dacă* x_i, $i = \overline{1, 500}$, *sunt numere naturale nedivizibile cu* 5, *atunci* *numărul* $N = 4x_1^4 + 8x_2^8 + 12x_3^{12} + \cdots + 2000x_{500}^{2000}$ *este divizibil cu* 5.

Tamara Culac, Iaşi

Soluţia I (a autorului). Numărul $x_i, i = \overline{1, 500}$, este de una din formele: $M_5 + 1$, $M_5 + 2$, $M_5 + 3$, $M_5 + 4$. Arătăm că $x_i^4 = M_5 + 1$. Într-adevăr avem: $(M_5 + 1)^4 = (M_5 + 1)(M_5 + 1)(M_5 + 1)(M_5 + 1) = M_5 + 1$, $(M_5 + 2)^4 = M_5 + 2^4 = M_5 + 1$, $(M_5 + 3)^4 = M_5 + 3^4 = M_5 + 1$, $(M_5 + 4) = M_5 + 4^4 = M_5 + 1$. Evident, avem şi faptul că numerele $x_i^8, x_i^{12}, \ldots, x_i^{2000}$ sunt de forma $M_5 + 1$. Atunci, $N = 4(M_5 + 1) + 8(M_5 + 1) + \cdots + 2000(M_5 + 1) = M_5 + 4(1 + 2 + \cdots + 500) = M_5 + 4\dfrac{501 \cdot 500}{2} = M_5 + 2 \cdot 500 \cdot 501 = M_5$.

Soluţia II (dată de eleva Tuţescu Anca Ştefania, Craiova). Avem

$$N = \left(4x_1^4 - 4 + 4\right) + \left(8x_2^8 - 8 + 8\right) + \cdots + 2000\left(x_{500}^{2000} - 2000 + 2000\right) \text{ sau}$$

$$N = 4\left(x_1^4 - 1\right) + 8\left(x_2^8 - 1\right) + \cdots + 2000\left(x_{500}^{2000} - 1\right) + 4(1 + 2 + \cdots + 500). \quad (1)$$

Cum $4(1 + 2 + \cdots + 500) = 4\dfrac{501 \cdot 500}{2} = 2 \cdot 501 \cdot 500$, rezultă că acest termen al numărului N se divide cu 10. Pe de altă parte, pentru orice număr $x \in \mathbb{N}$ ce nu-i divizibil cu 5, avem: $U(x) \in \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$, $U\left(x^2\right) \in \{1, 4, 6, 9\}$, $U\left(x^4\right) \in \{1, 6\}$, $U\left(x^8\right) \in \{1, 6\}$ etc. Ca urmare, $U\left(x_1^4 - 1\right), U\left(x_2^8 - 1\right), \ldots, U\left(x_{500}^{2000} - 1\right) \in \{0, 5\}$; iar $U\left[4\left(x_1^4 - 1\right)\right], U\left[8\left(x_2^8 - 1\right)\right], \ldots, U\left[2000\left(x_{500}^{2000} - 1\right)\right] \in \{0\}$.

În consecinţă, toţi termenii din scrierea (1) a lui N sunt divizibili cu 10 şi, deci, $N \vdots 10$.

Clasa a VI-a

VI.26. *Fie* $A = 4a + 6b - c$, $B = 4a - 3b - c$, $C = -3a - 11b - 28c$, *unde* $a, b, c \in \mathbb{Z}$. *Dacă* $(A, B) = 23$, *arătaţi că* $(A, B, C) = 23$.

Cristiana Constanda, elevă, Iaşi

Soluţie. Nu trebuie să arătăm, de fapt, decât că $C \vdots 23$. Avem că $A - B \vdots 23$, deci $9b \vdots 23$ şi cum $(9, 23) = 1$, atunci $b \vdots 23$. Din $A = 4a + 6b - c \vdots 23$, urmează acum că $4a - c \vdots 23$, deci $c = 4a - 23k$, $k \in \mathbb{Z}$. În aceste condiţii, $C = -3a - 11b - 28c = -3a - 11b - 28(4a - 23k) = -115a - 11b + 28 \cdot 23k$, fiecare termen fiind multiplu de 23.

VI.27. *Să se rezolve în* $\mathbb{Z}$ *sistemul:* $3x + 2y \leq 8$; $\quad x - y \leq 1$; $\quad 3x - y = 1$.

Mihai Crăciun, Paşcani

Soluţie. Avem: $y = 3x - 1 \leq 8 - 2y - 1 = 7 - 2y \Rightarrow 3y \leq 7 \Rightarrow y \leq \dfrac{7}{3}$, $y = 3x - 1 \leq 3(1 + y) - 1 = 2 + 3y \Rightarrow -2y \leq 2 \Rightarrow y \geq -1$; deoarece $y \in \mathbb{Z}$, rezultă că $y \in \{-1, 0, 1, 2\}$. Însă $x = \dfrac{y + 1}{3}$ şi singurele soluţii convenabile sunt $(0, -1)$ şi $(1, 2)$.

VI.28. *Să se rezolve în* $\mathbb{N}$ *ecuaţia*

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n + 1) - (n + 1) - (n + 2) - \cdots - 2n = 2 + 4 + \cdots + 2n.$$

Dumitru - Dominic Bucescu, Iaşi

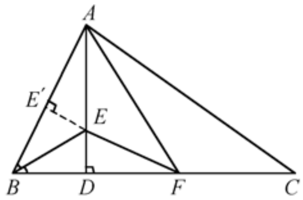
Soluţie. Plecând de la identitatea $k(k+1)=\frac{1}{3}[k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)]$ în care dăm valori lui k de la 1 la n, obţinem prin sumare $1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n(n+1)=$ $=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$. Scăzând în ambii membri ai ecuaţiei date suma $1+2+\cdots+n$, obţinem echivalent:

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3}-\frac{2n(2n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}\Leftrightarrow\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{2n(2n+1)}{6},$$

altfel spus $\frac{n+1}{6}=1$, ceea ce antrenează $n=5$.

VI.29. *În triunghiul ascuţitunghic ABC, bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{B}$ intersectează înălţimea AD în E, $D\in[BC]$. Fie $F\in(DC$ astfel încât $AE=EF$. Arătaţi că $BE\perp AF$.*

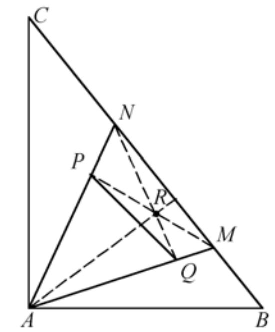
Tamara Culac, Iaşi



Soluţie. Fie $E'\in[AB]$ astfel încât $EE'\perp AB$. Cum E se află pe bisectoarea lui $\widehat{B}$, este egal depărtat de laturile unghiului: $ED=EE'$. Atunci $\triangle AEE'\equiv\triangle FED$ (C.I.), deci $\widehat{AEE'}\equiv\widehat{DEF}$, de unde rezultă că E',E,F sunt coliniare, adică $FE'\perp AB$. Urmează că E este ortocentrul $\triangle ABF$, aşadar $BE\perp AF$.

VI.30. *Pe ipotenuza (BC) a triunghiului dreptunghic ABC se consideră punctele N şi M astfel încât $BN=AB$, $CM=AC$. Dacă P şi Q sunt proiecţiile punctelor M şi N pe dreptele AN, respectiv AM, demonstraţi că segmentele (MP), (NQ) şi (PQ) se pot constitui în laturile unui triunghi.*

Cătălin Calistru, Iaşi



Soluţie. Fie $\{R\}=MP\cap NQ$ ortocentrul $\triangle AMN$; atunci $AR\perp BC$. Avem:

$$m(\widehat{BAM})=m(\widehat{BAR})-m(\widehat{MAR})=90^\circ-m(\widehat{B})-$$
$$-\left(90^\circ-m(\widehat{AMC})\right)=m(\widehat{AMC})-m(\widehat{B})=$$
$$=m(\widehat{MAC})-m(\widehat{B})=m(\widehat{MAR})+90^\circ-m(\widehat{C})-m(\widehat{B})=m(\widehat{MAR}).$$

Analog se arată că şi $m(\widehat{CAN})=m(\widehat{NAR})$, deci $m(\widehat{MAN})=\frac{1}{2}m(\widehat{A})=45^\circ$. Atunci $\triangle PAM$ şi $\triangle QAN$ sunt triunghiuri isoscele, de unde $MP=AP$ şi $NQ=AQ$. Urmează că (MP), (NQ), (PQ) se pot constitui în laturile unui triunghi, anume $\triangle APQ$.

Clasa a VII-a

VII.26. *Determinaţi $a\in\mathbb{Q}$ ştiind că $\sqrt{a+\sqrt{2}}-\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Fie $x=\sqrt{a+\sqrt{2}}-\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$. Atunci $a+\sqrt{2}=2+2x\sqrt{2}+x^2$ şi cum $a,x\in\mathbb{Q}$, urmează că $a=2+x^2$ şi $1=2x$. De aici, $x=\frac{1}{2}$ şi $a=\frac{9}{4}$. Reciproc, dacă

$a = \dfrac{9}{4}$ avem că $\sqrt{a+\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \dfrac{2\sqrt{2}+1}{2} - \sqrt{2} = \dfrac{1}{2} \in \mathbb{Q}$.

VII.27. *Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul*

$$x_1^2+(a+1)\,x_1+\frac{a^2}{4} = x_2, \ldots,\ x_{n-1}^2+(a+1)\,x_{n-1}+\frac{a^2}{4} = x_n,\ x_n^2+(a+1)\,x_n+\frac{a^2}{4} = x_1$$

să admită numai soluţii întregi.

Cătălin Calistru, Iaşi

Soluţie. Adunând membru cu membru ecuaţiile, efectuând reducerile şi grupând, obţinem că $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i+\dfrac{a}{2}\right)^2 = 0$, de unde în mod necesar $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = -\dfrac{a}{2}$. Cum dorim ca sistemul să aibă soluţii întregi, rezultă $a = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. În acest caz, este imediat că $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = -k$ constituie soluţie a sistemului dat.

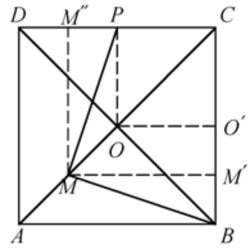
VII.28. *Fie zece numere naturale nenule care au suma egală cu* 55*. Să se arate că printre ele există trei care pot fi lungimile laturilor unui triunghi.*

Adrian Zanoschi, Iaşi

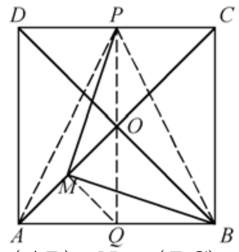
Soluţie. Să ordonăm crescător numerele: $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{10}$. Evident că $a_{i+1} < a_i + a_{i+2}$, $\forall i = \overline{1,8}$; ar mai trebui să arătăm că există un indice $i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ pentru care $a_{i+1} > a_{i+2} - a_i$. Pentru aceasta, să presupunem contrariul: $a_{i+1} \leq a_{i+2} - a_i$, $\forall i = \overline{1,8}$, i.e. $a_{i+2} \geq a_i + a_{i+1}$, $\forall i = \overline{1,8}$. Avem succesiv: $a_3 \geq a_1 + a_2 \geq 1 + 1 = 2$, $a_4 \geq a_2 + a_3 \geq 1 + 2 = 3$ şi în continuare $a_5 \geq 5$, $a_6 \geq 8$, $a_7 \geq 13$, $a_8 \geq 21$, $a_9 \geq 34$, $a_{10} \geq 55$. Atunci $a_1+a_2+\cdots+a_{10} \geq 1+1+\cdots+55 = 143$, adică $55 \geq 143$, absurd.

VII.29. *Fie $ABCD$ un pătrat, O centrul său, iar M şi P mijloacele segmentelor (OA), respectiv (CD). Să se arate că triunghiul BMP este dreptunghic isoscel.*

Constantin Cocea şi Dumitru Neagu, Iaşi



Soluţia I (dată de elevul Mihul Andrei, Iaşi). Fie M', M'' proiecţiile punctului M pe BC şi respectiv CD. Avem: $MM' = \dfrac{1}{2}(AB + OO')$ şi $MM'' = \dfrac{1}{2}(AD + OP)$ (ca linii mijlocii în trapezele $ABO'O$ şi $ADPO$) şi deci $MM' = MM''$. Evident, $M'B = M''P$. Deducem că $\triangle BM'M \equiv \triangle PM''M$, deci $MB \equiv MP$ şi $\widehat{BMM'} \equiv \widehat{PMM''}$. Ultima relaţie conduce la $\widehat{BMP} \equiv \widehat{M'MM''}$. Unghiul $\widehat{M'MM''}$ fiind drept, urmează că $\widehat{BMP}$ este unghi drept şi, deci, $\triangle BMP$ este dreptunghic isoscel.

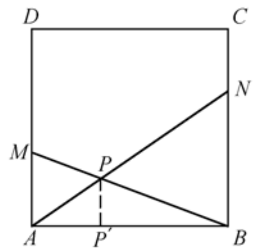


Soluţia II. Fie a latura pătratului. Avem că $PA^2 = AD^2 + DP^2 = \dfrac{5a^2}{4}$. Aplicând teorema medianei în $\triangle PAO$ şi în $\triangle BOA$, obţinem $PM^2 = \dfrac{10a^2}{16}$, $BM^2 = \dfrac{10a^2}{16}$, deci $PM = BM$. Pe de altă parte, $BP^2 = \dfrac{5a^2}{4}$ şi atunci lungimile PM, MB, PB sunt numere pitagoreice, de unde concluzia.

VII.30. *Fie $ABCD$ un pătrat de latură* 1 *şi punctele $M \in (AD)$, $N \in (BC)$, $\{P\} = BM \cap AN$. Dacă $S_{DCNPM} = \dfrac{1}{2}$, demonstraţi că $1 < AM + BN \leq \dfrac{4}{3}$ şi*

$AM \cdot BN \leq \dfrac{4}{9}$.

Emil Vasile, Ploieşti



Soluţie. Fie $x = AM$, $y = BN$, $z = PP'$ (unde $PP' \perp AB$). Din ipoteză, $S_{ABM} + S_{ABN} - S_{ABP} = \dfrac{1}{2}$, prin urmare $x + y - z = 1$. Dar $\dfrac{z}{x} + \dfrac{z}{y} = \dfrac{BP'}{AB} + \dfrac{P'A}{AB} = 1$, deci $z = \dfrac{xy}{x+y} \leq \dfrac{x+y}{4}$, unde am ţinut seama de inegalitatea între media armonică şi cea aritmetică. Rezultă că $x + y = 1 + z \leq 1 + \dfrac{x+y}{4}$, adică $x + y \leq \dfrac{3}{4}$. Pe de altă parte, $x + y - \dfrac{xy}{x+y} = 1$ implică $xy = (x+y)(x+y-1) \leq \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{9}$; am folosit faptul evident că $x + y > 1$.

<u>Clasa a VIII-a</u>

VIII.26. *Demonstraţi că ecuaţia* $\left(t^2 + 1\right) x^2 + 4t^2 x + 4t^2 - 5 = 0$ *are numai două soluţii în* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Mihai Crăciun, Paşcani

Soluţie. Ecuaţia se scrie echivalent $t^2 (x+2)^2 = t - x^2$. Dacă $x = -2$, atunci $t - x^2 = 0$, deci $t = 4$. Dacă $x \in \mathbb{Z} \backslash \{-2\}$, atunci $t^2 (x+2)^2 \geq t$, iar $t - x^2 \leq t$. Egalitatea este atinsă dacă şi numai dacă $t = x = 0$. În concluzie, $S = \{(0,0), (-2,4)\}$.

VIII.27. *Determinaţi* $a \in \mathbb{R}$ *ştiind că ecuaţia* $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + a = 0$ *are o singură soluţie reală.*

Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Dacă $P(x)$ este expresia din membrul stâng al ecuaţiei, putem scrie:

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + a = x^2 (1-x)^2 - 2x(1-x) + a$$

şi de aici se observă că $P(x) = P(1-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Cum ecuaţia are o unică soluţie reală x_0, trebuie ca $x_0 = 1 - x_0$, adică $x_0 = \dfrac{1}{2}$. Înlocuind, obţinem în mod necesar că $a = \dfrac{7}{16}$. Dacă $a = \dfrac{7}{16}$, ecuaţia devine $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 \left(x^2 - x + \dfrac{7}{4}\right) = 0$, care admite singura soluţie reală (dublă) $x = \dfrac{1}{2}$.

VIII.28. *Fie* a, b *numere naturale prime între ele. Aflaţi valorile lui* n *pentru care* $S_n = a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1} + b^n$ *este divizibil cu* $a + b$.

Mihaela Predescu, Piteşti

Soluţie. Dacă n impar, atunci S_n are un număr par de termeni şi avem că $S_n = (a^n + b^n) + \left(a^{n-1}b + ab^{n-1}\right) + \cdots = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}\right) + ab(a+b) \times \times \left(a^{n-3} - a^{n-4}b + \cdots + b^{n-3}\right) + \cdots = (a+b)A$, deci $S_n \,\vdots\, a + b$. Dacă n este par, atunci $S_n = a\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}\right) + b^n$ şi cum $n - 1$ impar, paranteza se divide cu $a + b$. Rezultă că $S_n \,\vdots\, a + b \Leftrightarrow b^n \,\vdots\, a + b$; vom arăta că această divizibilitate este imposibilă în condiţiile date. Avem că $(b, a+b) = 1$, deoarece dacă $d \,|\, b$ şi $d \,|\, a + b$, atunci $d \,|\, a$ şi $d \,|\, b$, adică $d \,|\, (a,b)$, deci $d \,|\, 1$. Urmează că în descompunerile lor, numerele b şi $a+b$ nu au nici un factor prim comun, afirmaţie valabilă şi pentru numerele b^n şi $a+b$. În concluzie, pentru n par, S_n nu se divide cu $a+b$.

VIII.29. *Se consideră piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu latura bazei a, iar muchia laterală $2a$. Fie M mijlocul lui (VA), iar N un punct pe (VB) astfel încât $VN = \frac{3a}{4}$. Aflaţi distanţa de la V la planul (MNC).*

Adrian Corduneanu, Iaşi

Soluţie. Cu teorema medianei în $\triangle VAC$, obţinem $CM = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Folosind relaţia lui Stewart în $\triangle VBC$, rezultă $CN = \frac{a\sqrt{31}}{4}$. Din teorema cosinusului în $\triangle VMN$, obţinem $MN = \frac{a}{2}$. Cunoaştem prin urmare laturile $\triangle CMN$ şi cu formula lui Herron aflăm aria sa: $S_{CMN} = \frac{10a^2\sqrt{15}}{128}$. Calculând acum volumul tetraedrului $VMNC$ în două moduri, când folosim drept bază $\triangle VMN$ găsim că $V_{VMNC} = \frac{a^3\sqrt{11}}{64}$, iar când luăm drept bază $\triangle CMN$, volumul fiind cunoscut, obţinem că distanţa de la V la planul (MNC) este $h = \frac{a\sqrt{165}}{25}$.

VIII.30. *Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare astfel încât $AB = 4\sqrt{73}$, $CD = 4\sqrt{29}$. Notăm cu E, F mijloacele segmentelor (AB), respectiv (CD). Să se arate că mijloacele segmentelor (AF), (BF), (CE), (DE) sunt vârfurile unui paralelogram şi să se calculeze aria acestuia ştiind că are o latură de lungime $\sqrt{194}$.*

Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă, Blaj

Soluţie. Fie M, N, P, Q mijloacele segmentelor (EC), (AF), (ED) şi respectiv $[BF]$. În $\triangle ECD$, (MP) este linie mijlocie, iar (EF) este mediana; atunci (MP) şi (EF) se înjumătăţesc. Raţionând analog în $\triangle FAB$, deducem că (NQ) şi (EF) se înjumătăţesc. Rezultă că MP şi NQ sunt concurente în mijlocul lui (EF) şi se înjumătăţesc, deci M, N, P, Q sunt coplanare şi $MNPQ$ este paralelogram; fie O centrul acestuia. Avem că $OQ = \frac{1}{4}AB = \sqrt{73}$, $OP = \frac{1}{4}CD = \sqrt{29}$. Dacă $PQ = \sqrt{194}$, aria $\triangle OPQ$ se poate calcula cu formula lui Herron sau aflând înălţimea; obţinem $S_{OPQ} = \frac{1}{2}$ şi deci $S_{MON} = \frac{1}{2}$. Cum (PO) este mediană în $\triangle PNQ$, avem că $S_{PON} = S_{POQ} = \frac{1}{2}$ şi deci $S_{OMQ} = \frac{1}{2}$. În final, $S_{MNPQ} = 2$.

Clasa a IX-a

IX.26. *Dacă $a \in (0, \infty)$, să se rezolve ecuaţia $[x] + \frac{a}{[x]} = \{x\} + \frac{a}{\{x\}}$. Discuţie.*

D. M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

Soluţie. Pentru existenţa numitorilor, $x \notin [0,1)$ şi $x \notin \mathbb{Z}$. Ecuaţia se scrie echivalent $([x] - \{x\})\left(1 - \frac{a}{[x]\{x\}}\right) = 0$, iar prima paranteză nu se poate anula. Rămâne că $[x]\{x\} = a$, deci $\{x\} = \frac{a}{n}$, unde $n = [x]$ este din $\mathbb{N}^*$ deoarece $a > 0$ şi

$\{x\} \geq 0$. Atunci $x = n + \dfrac{a}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n > [a]$.

IX.27. *Să se determine funcţiile $f, g : [0, \infty) \to [0, \infty)$, unde g este surjectivă şi aditivă şi $g(y) + g(f(x)) = f(x + g(y))$, $\forall x, y \in [0, \infty)$.*

Ioan Săcăleanu, Hârlău

Soluţie. Fie $y_0 \in [0, \infty)$ pentru care $g(y_0) = 0$; atunci obţinem că $g(f(x)) = f(x)$, $\forall x \in [0, \infty)$ (1). Prin urmare, $g(y) + f(x) = f(x + g(y))$, $\forall x, y \in [0, \infty)$, relaţie care pentru $x = 0$ arată că $f(g(y)) = f(0) + g(y)$, $\forall y \in [0, \infty)$ (2). Cum g este surjectivă, pentru orice $z \in [0, \infty)$, găsim $y \in [0, \infty)$ astfel încât $g(y) = z$. Din (2) deducem $f(z) = f(0) + z$, $\forall z \in [0, \infty)$. Înlocuind în (1) şi folosind faptul că g este aditivă, obţinem că $g(z) = z$, $\forall z \in [0, \infty)$.

IX.28. *Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care $(\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ ori}})(x) = x + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ fixat, iar funcţia $g = f - 1_{\mathbb{R}}$ este monotonă.*

Mihail Bencze, Braşov

Soluţie. Aplicând f în ambii membri ai egalitaţii din enunţ obţinem că $f(x+\alpha) = f(x) + \alpha$, $\forall x \in \mathbb{R}$, de unde $g(x+\alpha) = f(x+\alpha) - (x+\alpha) = f(x) - x = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.Cum g monotonă, rezultă că g constantă: $g(x) = k$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Atunci $f(x) = x + k$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci $(\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ ori}})(x) = x + nk = x + \alpha$. Urmează $k = \dfrac{\alpha}{n}$, adică $f(x) = x + \dfrac{\alpha}{n}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

IX.29. *Să se arate că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea*

$$\frac{l_a^3}{h_a} + \frac{l_b^3}{h_b} + \frac{l_c^3}{h_c} \leq \frac{3R}{2r}\sqrt{p(p^3 - 3abc)}$$

Viorel Cornea şi Dan Ştefan Marinescu, Hunedoara

Soluţie. Din egalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz, obţinem că

$$\left(\sum \frac{l_a^3}{h_a}\right)^2 \leq \left(\sum l_a^6\right)\left(\sum \frac{1}{h_a^2}\right). \tag{1}$$

Se ştie că $OG^2 = R^2 - \dfrac{1}{9}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \geq 0$, deci $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$ şi atunci majorăm al doilea factor: $\sum \dfrac{1}{h_a^2} = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4S^2} \leq \dfrac{9R^2}{4S^2}$. Acum

$$l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2} \leq \sqrt{bc}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} = \sqrt{p(p-a)}, \text{ deci}$$

$\sum l_a^6 \leq p^3 \sum (p-a)^3 = p^3\left[3p^3 - 3p^2(a+b+c) + 3p\left(a^2 + b^2 + c^2\right) - \left(a^3 + b^3 + c^3\right)\right]$. Un calcul de rutină arată că $a^3 + b^3 + c^3 = 3p\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + 3abc - 4p^3$, de unde rezultă că $\sum l_a^6 \leq p^3\left(p^3 - 3abc\right)$. Revenind în (1), deducem concluzia.

IX.30. *În patrulaterul $ABCD$ considerăm punctele R şi S pe diagonala BD, în interioarele triunghiurilor ABC, respectiv ACD. Notam $\{M\} = CR \cap AB$, $\{N\} =$*

$= AR \cap BC$, $\{P\} = AS \cap CD$ *şi* $\{Q\} = CS \cap AD$. *Ştiind că* $\frac{AM^2}{MB^2} + \frac{BN^2}{NC^2} + \frac{CP^2}{PD^2} +$ $+ \frac{DQ^2}{QA^2} = 4$, *să se arate că* $\frac{AM^n}{MB^n} + \frac{BN^n}{NC^n} + \frac{CP^n}{PD^n} + \frac{DQ^n}{QA^n} = 4$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Cătălin Calistru, Iaşi

Soluţie. Aplicând teorema lui Ceva în $\triangle ABC$ şi $\triangle ACD$ şi combinând relaţiile obţinute, rezultă că $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PD} \cdot \frac{DQ}{QA} = 1$. Putem scrie:

$$\frac{AM^2}{MB^2} + \frac{BN^2}{NC^2} + \frac{CP^2}{PD^2} + \frac{DQ^2}{QA^2} = 4\sqrt[4]{\frac{AM^2}{MB^2} \cdot \frac{BN^2}{NC^2} \cdot \frac{CP^2}{PD^2} \cdot \frac{DQ^2}{QA^2}},$$

deci este atinsă egalitatea în inegalitatea mediilor; atunci $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PD} = \frac{DQ}{QA}$. Concluzia este acum imediată.

Clasa a X-a

X.26. *Fie ecuaţia* $x^4 - S_1x^3 + Sx^2 + mx - m - 1 = 0$*, unde* S *este aria unui triunghi neechilateral* ABC*, iar* S_1 *este aria triunghiului* $A_1B_1C_1$ *determinat de punctele de intersecţie a bisectoarelor interioare cu cercul circumscris triunghiului* ABC*. Să se determine* $m \in \mathbb{R}$ *ştiind că ecuaţia admite un număr impar de rădăcini în* $(0,1)$.

Dumitru Gherman, Paşcani

Soluţie. Dacă notăm $f(x) = x^4 - S_1x^3 + Sx^2 + mx - m - 1$, atunci condiţia ca ecuaţia dată să admită un număr impar de rădăcini în $(0,1)$ este echivalentă cu $f(0) \cdot f(1) < 0$, adică $(-m-1)(S - S_1) < 0 \quad (*)$. Să determinăm acum semnul diferenţei $S - S_1$. Avem $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$ şi $S_1 = 2R^2 \sin\frac{A+B}{2} \sin\frac{A+C}{2} \sin\frac{B+C}{2} = 2R^2 \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}$, de unde rezultă că $SS_1 = 8 \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} \le 1$, cu egalitate dacă şi numai dacă triunghiul ABC este echilateral. Deci, în condiţiile problemei, are loc $S < S_1$ şi atunci, având în vedere relaţia $(*)$, obţinem $m \in (-\infty, -1)$.

X.27. *Fie* $r \in [1, \infty)$, $D = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \le r\}$ *şi* $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(X) = aX^2 + bX + c$. *Să se arate că dacă* $P(z) \in D$, $\forall z \in D$, *atunci* $a, b, c \in D$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

Soluţie. Fie $1, \varepsilon$ şi ε^2 rădăcinile ecuaţiei $x^3 = 1$. Deoarece $\{1, \varepsilon, \varepsilon^2\} \subset D$, rezultă că $P(1) = a + b + c \in D$, $P(\varepsilon) = a\varepsilon^2 + b\varepsilon + c \in D$ şi $P(\varepsilon^2) = a\varepsilon + b\varepsilon^2 + c \in D$. De aici, obţinem că $3c = P(1) + P(\varepsilon) + P(\varepsilon^2)$, $3a = P(1) + \varepsilon P(\varepsilon) + \varepsilon^2 P(\varepsilon^2)$ şi $3b = P(1) + \varepsilon^2 P(\varepsilon) + \varepsilon P(\varepsilon^2)$. Folosind aceste egalităţi deducem că: $3|c| = |P(1) + P(\varepsilon) + P(\varepsilon^2)| \le |P(1)| + |P(\varepsilon)| + |P(\varepsilon^2)| \le 3r$ şi, analog, $3|a| \le 3r$ şi $3|b| \le 3r$. Deci, $a, b, c \in D$.

X.28. *Rezolvaţi ecuaţia* $z^2\left(2^{|z|^2} - 1\right) + z\left(2^{|z-1|} - 1\right) + 1 = 0$, $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.

Emil Vasile, Ploieşti

Soluţie. Fie $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R},\ b \ne 0)$, $2^{|z|^2} - 1 = \alpha \in \mathbb{R}$ şi $2^{|z-1|} - 1 = \beta \in \mathbb{R}$. Cu aceste notaţii ecuaţia noastră devine: $(a^2 - b^2 + 2abi)\alpha + (a + bi)\beta + 1 = 0$ sau $2ab\alpha + b\beta = (a^2 - b^2)\alpha + a\beta + 1 = 0$, de unde obţinem $(-a^2 - b^2)\alpha + 1 = 0$, adică $\left(2^{a^2+b^2} - 1\right)(a^2 + b^2) = 1 \quad (*)$.

Deoarece funcţia $f(t) = t(2^t - 1)$ este strict crescătoare pe $(0,\infty)$ rezultă că ecuaţia $(*)$ are o soluţie unică şi anume $a^2 + b^2 = 1$. De aici deducem că $\alpha = 1$ şi înlocuind în egalitatea $2a\alpha + \beta = 0$, obţinem $\beta = -2a$, adică $2^{\sqrt{2-2a}} = 1 - 2a$. Dacă facem notaţia $c = 1 - 2a$, cum $|a| \leq 1$, rezultă $c \leq 3$. Pe de altă parte din $2^{\sqrt{1+c}} = c \geq 0$, obţinem $c \geq 2$, deci $c = 2^{\sqrt{1+c}} \geq 2^{\sqrt{3}} > 2^{5/3} > 3$. Contradicţia la care am ajuns arată că ecuaţia dată nu are soluţie.

X.29. *Un motan scoate cu ajutorul unui pahar un număr de peştişori dintr-un acvariu. Câţi peştişori trebuie să conţină acvariul astfel încât motanul să aibă matematic speranţa că va scoate* 5 *dintre ei?*

Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Notăm cu n numărul de peştişori din acvariu. Fie X variabila aleatoare care ia ca valori numărul de peştişori care se află în paharul motanului. Să calculăm $p_k = P(\{X = k\})$. Deoarece sunt în total 2^n cazuri egal posibile (numărul submulţimilor unei mulţimi cu n elemente), dintre care sunt favorabile C_n^k, avem $p_k = \dfrac{C_n^k}{2^n}$. Aşadar, tabloul de repartiţie al variabilei aleatoare X este:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ \dfrac{C_n^0}{2^n} & \dfrac{C_n^1}{2^n} & \dfrac{C_n^2}{2^n} & \dots & \dfrac{C_n^n}{2^n} \end{pmatrix}.$$

Motanul poate spera că va extrage un număr de peştişori egal cu speranţa matematică (sau media) variabilei X, adică

$$E(x) = m = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{kC_n^k}{2^n} = \frac{n2^{n-1}}{2^n} = \frac{n}{2}.$$

Prin urmare, avem $n/2 = 5$, deci $n = 10$.

X.30. *Fie* $M = \{1, 2, \dots, n\}$. *Să se afle numărul de* k*-uple* $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ *de submulţimi ale lui* M *astfel încât* $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i = M$ *şi* $Card\left(\bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i\right) = l$, $l \leq n$ *fixat.*

Lucian-Georges Lăduncă, Iaşi

Soluţie. Fie $N = \{(0,0,\dots 0,1),\ (0,0,\dots,1,0),\ \dots\ ,\ (1,1,\dots,1,1)\} \subset \mathbb{R}^k$ mulţimea k-uplelor formate din 0 şi 1, fără elementul $(0,0,\dots,0,0)$. Mulţimea N are $2^k - 1$ elemente.

A partiţiona $M = \{1, 2, \dots, n\}$ în k submulţimi $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ astfel încât $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i = M$ este totuna cu a defini o funcţie $f : M \to N$ prin legea $f(j) = (j_1, j_2, \dots, j_k) \in N$, unde $j_i = 1$ dacă $j \in A_i$ şi $j_i = 0$ dacă $j \notin A_i$ (de exemplu, $f(3) = (1,1,0,\dots,0,1)$ dacă şi numai dacă $3 \in A_1$, $3 \in A_2$, $3 \in A_k$ şi $3 \notin A_3, A_4, \dots, A_{k-1}$). Numărul acestor funcţii este $\left(2^k - 1\right)^n$, dar nu toate satisfac ultima condiţie din ipoteză.

Observăm că $j \in A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k$ dacă şi numai dacă $f(j) = (1,1,\dots,1) \in N$. Deci, condiţia $Card\left(\bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i\right) = l$ este echivalentă cu $Card(\{j \in M \mid f(j) = (1,1,\dots,1)\}) = l$. Cum numărul de moduri în care l elemente din M sunt duse prin f în $(1,1,\dots,1)$ este C_n^l, rezultă că răspunsul problemei este $C_n^l\left(2^k - 2\right)^{n-l}$.

Clasa a XI-a

XI.26. *Fie* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*. Dacă* $\operatorname{tr}({}^tA \cdot A + ({}^tA)^* \cdot A^*) = 2n \det A$*, atunci* ${}^tA = A^*$*.*

Iuliana Georgescu şi Paul Georgescu, Iaşi

Soluţie. Se ştie că $\operatorname{tr}(X + \alpha Y) = \operatorname{tr} X + \alpha \operatorname{tr} Y$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), $\operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}(YX)$, $XX^* = (\det X) I_n$ şi $({}^tX)^* = {}^t(X^*)$, $\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Egalitatea dată se rescrie astfel:

$$\operatorname{tr}\left({}^tA \cdot A + \left({}^tA\right)^* \cdot A^*\right) = \operatorname{tr}\left(A \cdot A^* + \left({}^tA\right) \cdot \left({}^tA\right)^*\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{tr}\left(A \cdot {}^tA + A^* \cdot {}^t(A^*)\right) = \operatorname{tr}\left(A \cdot A^* + \left({}^tA\right) \cdot {}^t(A^*)\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{tr}\left(A \cdot \left({}^tA - A^*\right) + \left(A^* - {}^tA\right) \cdot {}^t(A^*)\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{tr}\left(\left(A - {}^t(A^*)\right) \cdot \left({}^tA - A^*\right)\right) = 0,$$

de unde, notând cu $C = A - {}^t(A^*)$, obţinem $\operatorname{tr}(C \cdot {}^tC) = 0$. Ultima relaţie, împreună cu observaţia $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ne conduce la condiţia $C = O_n$, adică ${}^tA = A^*$.

XI.27. *Fie* $a \in [0,1)$ *şi* $(x_n)_{n \geq 0}$ *un şir de numere reale astfel încât*

$$x_n^2 \leq a \cdot \max\left\{x_{n-1}^2, \frac{1}{2}\left(x_n^2 + x_{n-1}^2\right)\right\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Arătaţi că şirul $(x_n)_{n \geq 0}$ *este convergent şi determinaţi limita sa.*

Aurel Muntean, Sibiu

Soluţie. Dacă $\max\left\{x_{n-1}^2, \frac{1}{2}\left(x_n^2 + x_{n-1}^2\right)\right\} = x_{n-1}^2$, atunci $x_n^2 \leq a x_{n-1}^2$, sau $|x_n| \leq k_1 |x_{n-1}|$, unde $k_1 = \sqrt{a} \in [0,1)$. Dacă $\max\left\{x_{n-1}^2, \frac{1}{2}\left(x_n^2 + x_{n-1}^2\right)\right\} = \frac{1}{2}\left(x_n^2 + x_{n-1}^2\right)$, avem $x_n^2 \leq \frac{a}{2}\left(x_n^2 + x_{n-1}^2\right)$ sau $\left(1 - \frac{a}{2}\right) x_n^2 \leq \frac{a}{2} x_{n-1}^2$, adică $x_n^2 \leq \frac{a}{2-a} x_{n-1}^2$ şi deci $|x_n| \leq k_2 |x_{n-1}|$, unde $k_2 = \sqrt{\frac{a}{2-a}} \in [0,1)$.

Fie $k = \max\{k_1, k_2\}$. Deoarece $k \in [0,1)$ şi $|x_n| \leq k |x_{n-1}| \leq k^2 |x_{n-2}| \leq \cdots \leq k^n |x_0|$, rezultă că şirul $(x_n)_{n \geq 0}$ converge la zero.

XI.28. *Să se determine* $p \in \mathbb{R}$ *pentru care limita şirului* $(a_n)_{n \geq 1}$ *definit prin termenul general* $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^p}{\sqrt{k + \sqrt{k^2 - 1}}}$ *este finită şi nenulă.*

Constantin Chirilă, Iaşi

Soluţie. Avem succesiv:

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{n^p}{\sqrt{k + \sqrt{k^2-1}}} = \sum_{k=1}^{n} n^p \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) = \\ &= \frac{n^p\sqrt{2}}{2} \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) = \frac{n^p\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{n+1} - 1\right) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} n^{p+\frac{1}{2}} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Deci, şirul (a_n) are limita finită nenulă dacă şi numai dacă $p = -\frac{1}{2}$.

XI.29. *Să se arate că* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln\ln n}\left(\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}-1\right)=1.$

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Scriem termenul general x_n sub forma: $x_n=\dfrac{n\left(u_n-1\right)}{\ln a_n}\cdot\dfrac{\ln a_n}{\ln b_n}$, unde $u_n=\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}$, $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ şi $b_n=\ln n$. Din relaţia $1<\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}<\sqrt[n]{n}$, $n\geq 2$ deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=1$. Atunci, avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(u_n-1\right)}{\ln a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{u_n-1}{\ln u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{u_n-1}{\ln\left[1+\left(u_n-1\right)\right]}=1. \qquad (1)$$

Folosind criteriul lui Stolz-Cesàro, găsim că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=1$. În consecinţă, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln a_n}{\ln b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\ln\left(a_n/b_n\right)}{\ln b_n}+1\right]=1$. De aici şi din (1), obţinem că $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

XI.30. *Fie* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *o funcţie discontinuă şi care are proprietatea lui Darboux. Dacă există o funcţie* $g:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *astfel încât* $f\left(x+y\right)=g\left(f\left(x\right),y\right)$*, pentru orice* $x,y\in\mathbb{R}$*, atunci funcţia* f *nu are limită la* ∞*.*

Ştefan Alexe, Piteşti

Soluţie. Dacă f ar fi injectivă, cum f are proprietatea lui Darboux, ar însemna că f este continuă, ceea ce contrazice ipoteza. Deci f nu este injectivă şi atunci există $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ astfel încât $f\left(a\right)=f\left(b\right)$. Aşadar, avem $f\left(a+x\right)=g\left(f\left(a\right),x\right)=g\left(f\left(b\right),x\right)=f\left(b+x\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, de unde rezultă că $f\left(x\right)=f\left(x+b-a\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, adică f este periodică şi $T=b-a$ este o perioadă a ei. Cum f este discontinuă rezultă că f nu este constantă şi deci există $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq\beta$ astfel încât $f\left(\alpha\right)\neq f\left(\beta\right)$. Considerând şirurile $x_n=\alpha+nT$ şi $y_n=\beta+nT$, $n\in\mathbb{N}$, care tind la $+\infty$, avem $f\left(x_n\right)=f\left(\alpha+nT\right)=f\left(\alpha\right)\to f\left(\alpha\right)$ şi $f\left(y_n\right)=f\left(\beta+nT\right)=f\left(\beta\right)\to f\left(\beta\right)$, ceea ce demonstrează că f nu are limită la $+\infty$.

Clasa a XII-a

XII.26. *Se consideră multimea* $M=\left\{\begin{pmatrix}1-a^2 & a^2 & -a\sqrt{2}\\ -a^2 & 1+a^2 & -a\sqrt{2}\\ a\sqrt{2} & -a\sqrt{2} & 1\end{pmatrix};\ a\in A\right\}$, *unde* $A=\mathbb{Z}$ *sau* $A=\mathbb{Q}$ *sau* $A=\mathbb{R}$*. Arataţi că* $\left(M,\cdot\right)$ *este grup; este acesta izomorf cu* $\left(A_+^*,\cdot\right)$*?*

Gheorghe Costovici, Iaşi

Soluţie. Notăm cu $M\left(a\right)$, $a\in A$, un element oarecare al mulţimii M. Deoarece $M\left(a\right)\cdot M\left(b\right)=M\left(a+b\right)$ $(*)$, $\forall a,b\in A$, rezultă că înmulţirea este lege de compoziţie internă pe M. Folosindu-ne de relaţia $(*)$ şi având în vedere că adunarea este asociativă şi comutativă pe A rezultă că înmulţirea este asociativă şi comutativă pe M. Mai mult, se observă că $M\left(0\right)$ este element neutru pentru înmulţirea pe M şi orice $M\left(a\right)\in M$ admite un simetric, şi anume, $M\left(-a\right)\in M$. Prin urmare, $\left(M,\cdot\right)$ este grup comutativ. În fine, se verifică uşor că funcţia $f:M\to A_+^*$, $f\left(M\left(a\right)\right)=e^a$ este un izomorfism între grupurile $\left(M,\cdot\right)$ şi $\left(A_+^*,\cdot\right)$.

XII.27. *Fie* $\left(G,\cdot\right)$ *un grup cu* $Z\left(G\right)\neq\{e\}$ *şi* H *un subgrup netrivial al lui* G*.*

Să se demonstreze că există $x, y \in G \backslash H$, $x \neq y^{-1}$, astfel încât $xy \in H$ şi $yx \in H$. Daţi exemplu de grup care nu are această proprietate.

Ovidiu Munteanu, student, Braşov

Soluţie. Oricare ar fi $x \in G \backslash H$ şi oricare ar fi $u \in H \backslash \{e\}$, avem $y = x^{-1}u \in G \backslash H$ (într-adevăr, dacă $y = x^{-1}u \in H$, atunci $y^{-1} \in H$ şi deci $x = uy^{-1} \in H$, ceea ce este fals). De aici, deducem că $xy = u \in H$. Deoarece $yx = x^{-1}ux$, trebuie să mai demonstrăm că există $x \in G \backslash H$ şi $u \in H \backslash \{e\}$ astfel încât $x^{-1}ux \in H$. Cum $Z(G) = \{a \in G \mid ab = ba, \forall b \in G\} \neq \{e\}$, rezultă că există $x \in G \backslash H$ şi $u \in H \backslash \{e\}$ astfel încât $xu = ux$, deci $x^{-1}ux = u \in H$. Cu aceasta prima parte a demonstraţiei este încheiată.

Pentru a doua parte, considerăm $S_3 = \left\{e, \sigma, \tau, \tau^2, \sigma\tau, \sigma\tau^2\right\}$ şi $H = \{e, \sigma\}$. Se observă că nu există $x, y \in G \backslash H$ astfel încât $xy = yx = \sigma$. Într-adevăr, dacă, prin absurd, ar exista $x, y \in G \backslash H$ astfel încât $xy = yx = \sigma$, atunci $y = x^{-1}\sigma$ şi $x^{-1}\sigma x = \sigma$, deci $x\sigma = \sigma x$. Cum σ nu comută cu nici un element din $G \backslash H$, înseamnă că ultima egalitate este falsă.

XII.28. *Calculaţi* $\int \sqrt[n]{\operatorname{tg} x}\,dx$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, *pentru* $n \in \{2, 3, 4\}$.

Daniel Jinga, Piteşti

Soluţie. Notând $I_n = \int \sqrt[n]{\operatorname{tg} x}\,dx$, $J_n = \int \sqrt[n]{\operatorname{ctg} x}\,dx$ şi efectuând schimbarea $\sqrt[n]{\operatorname{tg} x} = t$, obţinem: $I_n = n \int \frac{t^n}{1+t^{2n}}dt$, $J_n = n \int \frac{t^{n-2}}{1+t^{2n}}dt$.

Pentru $n = 3$,

$$I_3 = 3 \int \frac{t^3}{1+t^6}dt \overset{t^2=u}{=} \frac{3}{2} \int \frac{u}{1+u^3}du = \frac{1}{2} \int \left(\frac{-1}{u+1} + \frac{u+1}{u^2-u+1}\right) du \text{ etc.}$$

Pentru $n = 2$, considerăm

$$I_2 \pm J_2 = 2 \int \frac{t^2 \pm 1}{1+t^4}dt = 2 \int \frac{t^2\left(1 \pm \frac{1}{t^2}\right)}{t^2\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right)}dt = 2 \int \frac{\left(t \mp \frac{1}{t}\right)'}{\left(t \mp \frac{1}{t}\right)^2 \pm 2}dt.$$

Prin urmare,

$$I_2 + J_2 = \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x} - \sqrt{\operatorname{ctg} x}}{\sqrt{2}} + C,\ I_2 - J_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x} + \sqrt{\operatorname{ctg} x} - \sqrt{2}}{\sqrt{\operatorname{tg} x} + \sqrt{\operatorname{ctg} x} + \sqrt{2}} \right| + C$$

şi se calculează uşor valoarea lui I_2.

Pentru $n = 4$, procedăm la fel:

$$\begin{aligned} I_4 \pm J_4 &= 4 \int \frac{t^4 \pm t^2}{1+t^8}dt = 4 \int \frac{1 \pm \frac{1}{t^2}}{t^4 + \frac{1}{t^4}}dt = \\ &= 4 \int \frac{\left(t \mp \frac{1}{t}\right)'}{\left(t \mp \frac{1}{t}\right)^4 \pm 4\left(t \mp \frac{1}{t}\right)^2 + 2}dt = 4 \int \frac{du}{u^4 \pm 4u^2 + 2} \text{ etc.} \end{aligned}$$

XII.29. *Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă şi $t>0$. Pentru $a,b>0$, să se calculeze*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^t-(k-1)^t}{n^t}f\left(n^{-1}\left(k^a(k-1)^b\right)^{\frac{t}{a+b}}\right).$$

Mihail Bencze, Braşov

Soluţie. Fie $\Delta_n=\left\{\frac{0^t}{n^t},\frac{1^t}{n^t},\ldots,\frac{n^t}{n^t}\right\}$ o diviziune a intervalului $[0,1]$. Atunci $\|\Delta_n\|=\max\limits_{k\in\{0,1,\ldots,n\}}\frac{k^t-(k-1)^t}{n^t}=\frac{n^t-(n-1)^t}{n^t}\to 0$ pentru $n\to\infty$. Luăm drept puncte intermediare media geometrică ponderată a punctelor de diviziune, adică

$$\xi_k=\left[\left(\frac{k^t}{n^t}\right)^a\left(\frac{(k-1)^t}{n^t}\right)^b\right]^{\frac{1}{a+b}}=n^{-t}\left(k^a(k-1)^b\right)^{\frac{t}{a+b}},\ k=\overline{1,n}.$$

Atunci

$$\sigma_{\Delta_n}(f,\xi)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^t-(k-1)^t}{n^t}f\left(n^{-t}\left(k^a(1-k)^b\right)^{\frac{t}{a+b}}\right).$$

Cum $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ este continuă, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{\Delta_n}(f,\xi)=\int_0^1 f(x)\,dx$.

XII.30. *Să se arate că* $\int_0^t e^{x^2}\frac{\ln(1+x)}{(1+x^2)^2}dx\in\left[\frac{\pi}{8}\ln 2,\ \frac{e\pi}{16}\ln 2\right]$.

Cristian Moanţă, Craiova

Soluţie. Notăm cu I integrala din enunţ şi fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^{x^2}}{1+x^2}$. Deoarece $e^x\geq 1+x^2$, $x\in\mathbb{R}$, avem că $f(x)\geq 1$; deoarece f este crescătoare pe $[0,1]$ (căci $f'(x)=\frac{2x^3e^{x^2}}{(1+x^2)^2}\geq 0$, $x\in[0,1]$), rezultă că $f(x)\leq f(1)=\frac{e}{2}$. Ca urmare

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx\leq I\leq\frac{e}{2}\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$$

şi rămâne de arătat că $J=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{8}\ln 2$.

Într-adevăr, cu schimbarările $x=\operatorname{tg}t$ şi $t=\frac{\pi}{4}-u$, vom avea

$$\begin{aligned}J&=\int_0^{\pi/4}\ln(1+\operatorname{tg}t)\,dt=-\int_{\pi/4}^{0}\ln\left(1+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\right)du=\\&=\int_o^{\pi/4}\ln\frac{2}{1+\operatorname{tg}u}du=\int_0^{\pi/4}\ln 2du-J,\end{aligned}$$

de unde $J=\frac{\pi}{8}\ln 2$.

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor din nr. 1/2002

A. Nivel gimnazial

G6. *Dacă un număr natural se poate scrie ca suma a două pătrate perfecte nenule distincte, atunci orice putere a sa se poate scrie, de asemenea, ca sumă de două pătrate perfecte nenule.*

***

Soluţie. Fie $a = b^2 + c^2$, cu $b, c \in \mathbb{N}^*$, iar $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $n = 2k + 1$, atunci $a^n = a^{2k}a = a^{2k}\left(b^2 + c^2\right) = \left(a^k b\right)^2 + \left(a^k c\right)^2$, cu $a^k b, a^k c \in \mathbb{N}^*$. Dacă $n = 2k$, vom demonstra mai întâi afirmaţia pentru $k = 1$. Într-adevăr, $a^2 = b^4 + c^4 + 2b^2c^2 = \left|b^2 - c^2\right|^2 + (2bc)^2$, cu $B = \left|b^2 - c^2\right|$, $C = 2bc \in \mathbb{N}^*$. Pentru $k \geq 2$, avem că $a^n = a^{2k-2}a^2 = a^{2(k-1)}\left(B^2 + C^2\right) = \left(a^{k-1}B\right)^2 + \left(a^{k-1}C\right)^2$, cu $a^{k-1}B, a^{k-1}C \in \mathbb{N}^*$.

G7. *Arătaţi că numărul $\overline{aa\ldots a}$ (2001 cifre) nu poate fi pătrat perfect, oricare ar fi cifra a în baza* 10.

***

Soluţie. Afirmaţia este adevărată în cazul general al unui număr $\overline{aa\ldots a}$ cu $n \geq 2$ cifre. Numerele $\overline{22\ldots 2}$, $\overline{33\ldots 3}$, $\overline{77\ldots 7}$ şi $\overline{88\ldots 8}$ nu pot fi pătrate perfecte din cauza ultimei cifre. Cum orice pătrat perfect este fie de forma $4k$, fie de forma $4k+1$, $k \in \mathbb{N}$, nu pot fi pătrate perfecte numerele $\overline{11\ldots 1}$, $\overline{55\ldots 5}$, $\overline{66\ldots 6}$ şi $\overline{99\ldots 9}$. În sfârşit, dacă $\overline{44\ldots 4} = 4 \cdot \overline{11\ldots 1}$ ar fi pătrat perfect, atunci $\overline{11\ldots 1}$ ar fi pătrat perfect, absurd.

G8. *Determinaţi $n \in \mathbb{Z}$ pentru care* $\dfrac{3n\,(18n+13) - 28}{3n+1}$ *este fracţie reductibilă.*

Dumitru - Dominic Bucescu, Iaşi

Soluţie. Deoarece $3n\,(18n+13) - 28 = (3n+1)\,(18n+7) - 35$, fracţia dată se simplifică prin $d \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ dacă d este un divizor al lui 35. Pentru $d = 5$, obţinem că $3n + 1 = 5l$, $l \in \mathbb{Z}$, ecuaţie diofantică cu soluţia particulară $l = -1, n = -2$ şi cea generală $l = -1 + 3k$, $n = -2 + 5k$, $k \in \mathbb{Z}$. Pentru $d = 7$, găsim $l = 3p+1$, $n = 7p+2$, $p \in \mathbb{Z}$. În concluzie, valorile căutate ale lui n sunt $\{5k - 2 \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{7p + 2 \mid p \in \mathbb{Z}\}$.

G9. *Se dau trei fişicuri de monede aşezate vertical, asupra cărora putem efectua una dintre operaţiile O_1: luăm cele două monede de deasupra unui fişic şi le aşezăm peste altul, sau O_2: luăm cele două monede de deasupra unui fişic şi le aşezăm câte una peste fiecare dintre celelalte două fişicuri.*

a) Găsiţi o condiţie necesară pentru ca, după un număr de operaţii, toate fişicurile să conţină la fel de multe monede;

b) Arătaţi că această condiţie nu este suficientă dacă este permisă o singură operaţie, însă este suficientă în cazul în care sunt permise amândouă.

Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Deoarece numărul total de monede rămâne constant pe parcursul efectuării operaţiilor, acest număr trebuie să fie în mod necesar un multiplu de 3 mai mare sau egal cu 6.

Presupunând că distribuţia iniţială a monedelor este $(3, 2, 1)$, în condiţiile în care este permisă o singură operaţie, se arată că egalizarea celor trei fişicuri nu este posibilă considerând toate mişcările ce pot fi efectuate. În cazul în care ambele operaţii sunt permise, aşezând în mod repetat câte două monede din fişicul cel mai înalt peste cel mai mic, ajungem fie ca fişicurile să se egalizeze, fie ca în vârfurile lor să apară o situaţie de tipul $(3,2,1)$. În această situaţie, succesiunea $(3,2,1) \overset{O_2}{\to} (4,0,2) \overset{O_1}{\to} (2,2,2)$ rezolvă problema.

G10. *Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, rezolvaţi ecuaţia*

$$\sqrt{\frac{n+1}{n} - x_1} + \sqrt{\frac{n+1}{n} - x_2} + \ldots \sqrt{\frac{n+1}{n} - x_n} + \sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} = n+1.$$

Mihai Totolici, Galaţi

Soluţie. Cu notaţiile $u_i = \sqrt{\dfrac{n+1}{n} - x_i}$, $x = \overline{1,n}$, $u_{n+1} = \sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}$ obţinem că $u_1 + u_2 + \cdots + u_{n+1} = n+1$, iar $u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_{n+1}^2 = n+1$. De aici, $(u_1 + u_2 + \cdots + u_{n+1})^2 = (n+1)\left(u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2\right)$, deci este atinsă egalitatea în inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz aplicată numerelor $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$; $1, 1, \ldots, 1$. Urmează că $u_1 = u_2 = \cdots = u_{n+1} = 1$, de unde $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \dfrac{1}{n}$.

G11. *Rezolvaţi în $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ ecuaţia $x^2 + y^2 = 5445$.*

Daniela Iosub, elevă, Iaşi

Soluţie. Vom folosi următorul rezultat din teoria numerelor: *dacă $p = 4k+3$ este un număr prim şi $p \,|\, a^2 + b^2$, $a, b \in \mathbb{N}^*$, atunci $p \,|\, a$ şi $p \,|\, b$.* Din ipoteză, $3 \,|\, x^2 + y^2$ şi $11 \,|\, x^2 + y^2$, $x, y \in \mathbb{N}^*$, iar 3 sau 11 sunt numere prime de forma $4k+3$. Prin urmare, $33 \,|\, x$ şi $33 \,|\, y$, deci $x = 33l$, $y = 33m$, $l, m \in \mathbb{N}^*$. Înlocuind în ecuaţie, obţinem că $l^2 + m^2 = 5$, $l, m \in \mathbb{N}^*$, adică $(l,m) \in \{(1,2), (2,1)\}$. De aici, $(x,y) \in \in \{(33,66), (66,33)\}$.

G12. *Să se determine $n, m \in \mathbb{N}^*$ pentru care $\left[\sqrt{1}\right] + \left[\sqrt{2}\right] + \ldots \left[\sqrt{n}\right] = n^m$.*

Adrian Zanoschi, Iaşi

Soluţie. Pentru $n = 1, m \in \mathbb{N}^*$ relaţia dată se verifică. Căutăm soluţii cu $n \geq 2$. Nu putem avea $m \geq 2$, deoarece

$$\left[\sqrt{1}\right] + \left[\sqrt{2}\right] + \ldots \left[\sqrt{n}\right] \leq \sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} < n\sqrt{n} < n^2 \leq n^m.$$

Rămâne de cercetat cazul $m = 1$; se observă că $n = 2$ şi $n = 3$ dau soluţii ale ecuaţiei, iar pentru $n \geq 4$ obţinem

$$\left[\sqrt{1}\right] + \left[\sqrt{2}\right] + \ldots \left[\sqrt{n}\right] \geq 1 + 1 + 1 + \sqrt{4} + \cdots + \sqrt{n} > 3 + 2(n-3) = 2n - 3 > n,$$

adică nu mai găsim soluţii. În concluzie, $(n,m) \in \{(1,a) \mid a \in \mathbb{N}^*\} \cup \{(2,1), (3,1)\}$.

G13. *Arătaţi că numerele 18^n şi $2^n + 18^n$, $n \in \mathbb{N}$, au acelaşi număr de cifre.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Să presupunem prin reducere la absurd că 18^n are k cifre, iar $2^n + 18^n$ are mai mult de k cifre, deci $2^n + 18^n \geq 10^k > 18^n \geq 10^{k-1}$. Evident, $k > n$ şi atunci împărţind prin 2^n această inegalitate, obţinem:

$$1 + 9^n \geq 5^k 2^{k-n} > 9^n \Rightarrow 2^{k-n} 5^k = 1 + 9^n, \tag{1}$$

deoarece $2^{k-n} 5^k \in \mathbb{N}$. Pe de altă parte, $1 + 9^n = 1 + (8+1)^n = M4 + 2$, deci $2^{k-n} 5^k = M4 + 2$, de unde $k - n = 1$; relaţia (1) devine $2 \cdot 5^{n+1} = 1 + 9^n$ (2).

Numerele $n = 0, 1, 2, 3$ nu verifică (2), iar pentru $n \geq 4$ avem că

$$\left(\frac{9}{5}\right)^n = (1,8)^n \geq (1,8)^4 = (3,24)^2 > (3,2)^2 = 10,24 > 10,$$

adică $9^n > 10 \cdot 5^n = 2 \cdot 5^{n+1}$, deci (2) nu este verificată pentru $n \geq 4$. Contradicţia obţinută încheie demonstraţia.

G14. *Să se arate că nu există nici un triunghi dreptunghic având catetele numere raţionale, iar ipotenuza egală cu* 2001*.*

Constantin Cocea, Iaşi

Soluţie. Pentru a arăta că ecuaţia $\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{z^2}{t^2} = 2001$ nu are soluţii în $\mathbb{N}^*$, este suficient să demonstrăm că ecuaţia $m^2 + n^2 = 2001p^2$ (1) nu are soluţii în $\mathbb{N}^*$. Folosind rezultatul amintit în soluţia problemei **G11** şi observând că $3 \mid 2001$, obţinem că în mod necesar m şi n sunt multipli de 3; $m = 3m_1$, $n = 3n_1$, $m_1, n_1 \in \mathbb{N}^*$. Ecuaţia (1) devine $3\left(m_1^2 + n_1^2\right) = 667p^2$ şi cum $(3, 667) = 1$, urmează că $p = 3p_1$, $p_1 \in \mathbb{N}^*$. După înlocuire, $m_1^2 + n_1^2 = 2001p_1^2$ (2).

Dacă presupunem că ecuaţia (1) admite soluţii, fie o asemenea soluţie cu p minim. Din (2) se obţine însă o nouă soluţie cu $p_1 < p$, contradicţie! Urmează că (1) nu are soluţii în $\mathbb{N}^*$, de unde concluzia.

Notă. Metoda folosită se numeşte *metoda coborârii* şi a fost utilizată în demonstrarea *Marii Teoreme a lui Fermat* în cazurile $n = 3$ şi $n = 4$.

G15. *Să se arate că* $E(x,y,z) \geq 3$*, dacă* $E(x,y,z) = \sqrt{x^2 - 2x\sin z - 4\cos z + 5} + \sqrt{y^2 - 2y\sin z - 6\cos z + 10}$, $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Cristiana Artenie, elevă, Iaşi

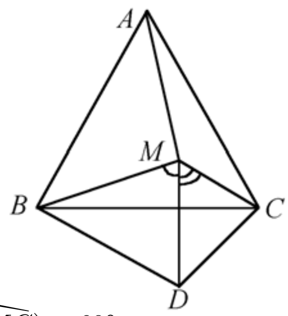
Soluţie. Se observă că

$$E(x,y,z) = \sqrt{(x - \sin z)^2 + (2 - \cos z)^2} + \sqrt{(y - \sin z)^2 + (3 - \cos z)^2} = MP + MQ,$$

unde $M(\cos z, \sin z)$, $P(2, x)$, $Q(3, y)$, $x, y, z \in \mathbb{R}$. Punctul M parcurge cercul unitate $\mathcal{C}$, iar punctele P şi Q parcurg dreptele verticale $d_1 : x = 2$, respectiv $d_2 : x = 3$. Minimul lui $E(x,y,z)$ se atinge pentru $\{M\} = \mathcal{C} \cap [Ox$, $\{P\} = d_1 \cap Ox$, $\{Q\} = d_2 \cap Ox$; în acest caz $E(x,y,z) = 3$, de unde concluzia.

G16. *Fie* M *un punct în interiorul triunghiului echilateral* ABC *astfel încât* $MA^2 = MB^2 + MC^2 - \sqrt{2}MB \cdot MC$ *; calculaţi măsura unghiului* $\widehat{BMC}$*. Generalizare.*

Corneliu Brădăţeanu, Paşcani

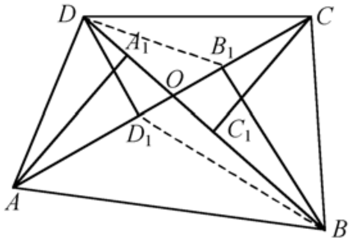


Soluţie. În general, vom arăta că dacă $MA^2 = MB^2 + MC^2 - 2MB \cdot MC \cos\alpha$, atunci $m(\widehat{BMC}) = \alpha + 60°$. În situaţia problemei date, va rezulta că $m(\widehat{BMC}) = 105°$.

Fie D în semiplanul determinat de BC opus lui A astfel încât $\triangle MBD$ este echilateral. Atunci $m(\widehat{ABM}) = m(\widehat{CBD}) = 60° - m(\widehat{MBC})$, de unde $\triangle ABM \equiv \triangle CBD$ (LUL), deci $AM = DC$. Cum $MD = MB$, relaţia de mai sus se scrie $CD^2 = MD^2 + MC^2 - 2MD \times MC\cos\alpha$, ceea ce arată că $m(\widehat{DMC}) = \alpha$, adică $m(\widehat{BMC}) = 60° + \alpha$.

G17. *Fie $ABCD$ un patrulater convex ce nu are diagonalele perpendiculare, B_1 şi D_1 proiecţiile punctelor B, respectiv D pe AC, iar A_1 şi C_1 proiecţiile punctelor A, respectiv C pe BD. Să se arate că* $\dfrac{S_{BB_1DD_1}}{S_{CC_1AA_1}} = \left(\dfrac{BD}{AC}\right)^2$ *şi* $S^2_{ABCD} \cdot \cos^2(BD, AC) = S_{BB_1DD_1} \cdot S_{CC_1AA_1}$.

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

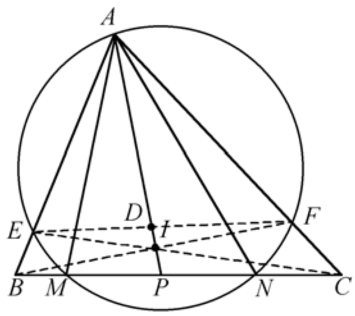


Soluţie. Avem că $S_{ABCD} = S_{ACD} + S_{ACB} = \dfrac{AC \cdot DD_1}{2} + \dfrac{AC \cdot BB_1}{2} = \dfrac{BB_1 + DD_1}{2} AC$. Pe de altă parte, BB_1DD_1 este trapez sau paralelogram ($BB_1, DD_1 \perp B_1D_1$) cu înălţimea $[B_1D_1]$, deci $S_{BB_1DD_1} = \dfrac{BB_1 + DD_1}{2} B_1D_1$. Atunci $\dfrac{S_{BB_1DD_1}}{S_{ABCD}} = \dfrac{B_1D_1}{AC}$.

Observăm că $\triangle DOD_1 \sim \triangle BOB_1$ şi de aici $\dfrac{B_1O}{D_1O} = \dfrac{BO}{DO}$, adică $\dfrac{B_1D_1}{D_1O} = \dfrac{BD}{DO}$, deci $B_1D_1 = BD\dfrac{D_1O}{DO} = BD\left|\cos(\widehat{AC, BD})\right|$. Rezultă că $\dfrac{S_{BB_1DD_1}}{S_{ABCD}} = \dfrac{BD}{AC} \times \left|\cos(\widehat{AC, BD})\right|$. Analog se obţine că $\dfrac{S_{CC_1AA_1}}{S_{ABCD}} = \dfrac{AC}{BD}\left|\cos(\widehat{AC, BD})\right|$. Împărţind, apoi înmulţind membru cu membru ultimele două egalităţi, găsim relaţiile din concluzie.

G18. *Fie ABC un triunghi cu $m(\widehat{A}) \leq 90^\circ$. Pe latura (BC) se consideră punctele M şi N astfel încât AM şi AN să fie simetrice faţă de bisectoarea unghiului A. Cercul circumscris triunghiului AMN intersectează laturile AB şi AC în E, respectiv F. Dacă $\{I\} = BF \cap CE$ şi $\{P\} = AI \cap BC$, demonstraţi că* $AP \geq \dfrac{BC}{2}$.

Florin Nicolaescu, Balş



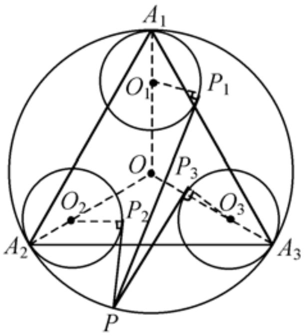
Soluţie. Din ipoteză, $\widehat{EAM} \equiv \widehat{NAF}$, deci în cercul $\mathcal{C}$ avem că $\overset{\frown}{EM} \equiv \overset{\frown}{FN}$, de unde $EF \| MN$. Fie $\{D\} = AP \cap EF$; atunci $\triangle AED \sim \triangle ABP$ şi $\triangle AFD \sim \triangle ACP$ şi va rezulta că $\dfrac{ED}{BP} = \dfrac{AD}{AP} = \dfrac{DF}{PC}$, i.e. $\dfrac{ED}{FD} = \dfrac{BP}{CP}$ (1). Din asemănările $\triangle EID \sim \triangle CIP$ şi $\triangle DIF \sim \triangle PIB$ obţinem, ca mai sus, $\dfrac{ED}{FD} = \dfrac{CP}{BP}$ (2). Din (1) şi (2) urmează că $(BP) \equiv (CP)$.

Presupunem prin reducere la absurd că $AP < \dfrac{BC}{2}$, adică $AP < BP$ şi $AP < PC$. Atunci $m(\widehat{BAP}) > m(\widehat{B})$ şi $m(\widehat{PAC}) > m(\widehat{C})$, deci $m(\widehat{BAP}) + m(\widehat{PAC}) > m(\widehat{B}) + m(\widehat{C})$, de unde $m(\widehat{A}) > 180^\circ - m(\widehat{A})$, i.e. $m(\widehat{A}) > 90^\circ$, ceea ce contrazice ipoteza; problema este astfel rezolvată.

G19. *Fie $A_1A_2A_3$ un triunghi echilateral înscris în cercul $\mathcal{C}(O, R)$ şi cercurile*

$\mathcal{C}_i$ $(i=1,2,3)$ de aceeaşi rază r, tangente interior cercului $\mathcal{C}$ în vârfurile A_i corespunzătoare. Să se arate că pentru orice $P\in\mathcal{C}(O,R)$ are loc relaţia $t_1^2+t_2^2+t_3^2=$ constant, unde t_i $(i=1,2,3)$ este lungimea tangentei dusă din P la cercul $\mathcal{C}_i$.

Temistocle Bîrsan, Iaşi



Soluţie. Fie O_i centrul cercului $\mathcal{C}_i$, $i=\overline{1,3}$. Evident că $\triangle O_1O_2O_3$ este echilateral, iar centrul său este punctul O. Avem:

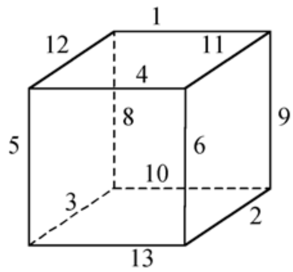
$$\sum t_i^2=\sum PP_i^2\overset{(1)}{=}\sum\left(PO_i^2-r^2\right)=-3r^2+\sum PO_i^2\overset{(2)}{=}$$
$$=-3r^2+\left(3PO^2+\sum OO_i^2\right)=-3r^2+3R^2+3\,(R-r)^2=$$
$$=6R^2-6Rr=\text{constant},$$

unde (1) se justifică prin aplicarea teoremei lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice PP_iO_i, iar (2) prin relaţia lui Leibniz.

G20. *Să se arate că pentru orice alegere a* 12 *numere naturale consecutive nu se pot numerota muchiile unui cub astfel ca suma numerelor aflate pe trei muchii care au un vârf comun să fie aceeaşi pentru toate vârfurile cubului (nu se numerotează două muchii cu acelaşi număr). Să se arate că este posibilă numerotarea descrisă dacă se aleg convenabil* 12 *numere dintre oricare* 13 *numere naturale consecutive.*

Constantin Chirilă, Iaşi

Soluţie. Fie $n+1,n+2,\ldots,n+12,n\in\mathbb{N}$ şi să presupunem prin absurd că suma numerelor de pe oricare trei muchii adunate adiacente este s. Obţinem că $8s=$ $=2[(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+12)]$, de unde, după calcule, găsim $2s=3\,(2n+13)$. Am ajuns evident la o contradicţie, deoarece în stânga avem un număr par, iar în dreapta unul impar.



Pentru partea a doua, fără a restrânge generalitatea, putem considera numerele $1,2,\ldots,13$; cazul general se reduce imediat la acesta. Fie c numărul pe care îl vom elimina. Cu raţionamentul de mai sus, obţinem $4s=91-c$ şi cum $s=\dfrac{91-c}{4}\in\mathbb{N}$, în mod necesar $c\in\{3,7,11\}$, deci $s\in\{22,21,20\}$. Pentru $c=7$, vom da o aşezare a numerelor $1,2,3,4,5,6,8,9,10,11,12,13$ care să respecte cerinţele problemei: fiecare pereche de numere simetrice faţă de 7 de forma $(p,14-p)$ se scriu pe muchii simetrice faţă de centrul cubului, astfel încât suma într-un vârf să fie 21.

B. Nivel liceal

L6. *Fie $x_1,x_2,\ldots,x_n$, $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, numere reale cu proprietatea*

$$\frac{x_1}{S-x_1}+\frac{x_2}{S-x_2}+\cdots+\frac{x_n}{S-x_n}=1,$$

unde $S=\sum_{i=1}^n x_i$. Arătaţi că

$$\frac{x_1^3}{S-x_1}+\frac{x_2^3}{S-x_2}+\cdots+\frac{x_n^3}{S-x_n}\le-\frac{S^2}{n}.$$

Răzvan Bărbulescu, elev, Craiova

Soluţie. Din relaţia dată în ipoteză, deducem succesiv:

$$\frac{x_1}{S-x_1}+\frac{x_2}{S-x_2}+\cdots+\frac{x_n}{S-x_n}=1\Leftrightarrow\frac{Sx_1}{S-x_1}+\frac{Sx_2}{S-x_2}+\cdots+\frac{Sx_n}{S-x_n}=S\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x_1\left(S-x_1\right)+x_1^2}{S-x_1}+\frac{x_2\left(S-x_2\right)+x_2^2}{S-x_2}+\cdots+\frac{x_n\left(S-x_n\right)+x_n^2}{S-x_n^2}=S\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1+\frac{x_1^2}{S-x_1}+x_2+\frac{x_2^2}{S-x_2}+\cdots+x_n+\frac{x_n^2}{S-x_n}=S\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x_1^2}{S-x_1}+\frac{x_2^2}{S-x_2}+\cdots+\frac{x_n^2}{S-x_n}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1^2+\frac{x_1^3}{S-x_1}+x_2^2+\frac{x_2^3}{S-x_2}+\cdots+x_n^2+\frac{x_n^3}{S-x_n}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x_1^3}{S-x_1}+\frac{x_2^3}{S-x_2}+\cdots+\frac{x_n^3}{S-x_n}=-\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right).$$

Însă $\sqrt{\dfrac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}}\geq\left|\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right|$, de unde rezultă imediat concluzia.

L7. *În triunghiul ABC, $m(\widehat{A})>60^\circ$, considerăm medianele CN, BN' şi bisectoarele BE, CE'. Notăm $\{P\}=CN\cap BE$, $\{Q\}=CE'\cap BN'$. Arătaţi că punctele P şi Q nu pot fi ambele pe înălţimea din A.*

Ioan Săcăleanu, Hârlău

Soluţie. Să presupunem prin absurd că P şi Q aparţin înălţimii (AD). Aplicând teorema lui Menelaus în $\triangle ABD$ cu transversala $N-P-C$, apoi teorema bisectoarei în acelaşi triunghi, obţinem

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BC}{CD}\cdot\frac{DP}{PA}=1\Rightarrow\frac{BC}{CD}\cdot\frac{BD}{BA}=1\Rightarrow\frac{a}{b\cos C}\cdot\frac{c\cos B}{c}=1\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{\cos C}{\cos B}.$$

Repetând raţionamentul în $\triangle ACD$, obţinem că $\dfrac{a}{c}=\dfrac{\cos C}{\cos B}$, deci $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{a}$, adică $a^2=bc$. Însă $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$, de unde $b^2+c^2-bc\left(1+2\cos A\right)=0$, prin urmare $\left(\dfrac{b}{c}\right)^2-\dfrac{b}{c}\left(1+2\cos A\right)+1=0$ şi cum $\Delta=4\cos^2 A+4\cos A-3<0$ pentru $\cos A\in\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$, deducem că $\dfrac{b}{c}\notin\mathbb{R}$, absurd.

Notă. Soluţie corectă s-a primit de la *Marius Pachiţariu*, elev, Iaşi.

L8. *Fie triunghiul ABC şi $M\in\operatorname{Int}ABC$, $MA\cap\mathcal{C}\left(MBC\right)=\{M,A_1\}$, $MB\cap\mathcal{C}\left(MCA\right)=\{M,B_1\}$, $MC\cap\mathcal{C}\left(MAB\right)=\{M,C_1\}$. Să se arate că*

$$\frac{MA_1}{MA}+\frac{MB_1}{MB}+\frac{MC_1}{MC}\geq 6.$$

Neculai Roman, Mirceşti, Iaşi

Soluţie. Fie $x=m(\widehat{BMA_1})$, $y=m(\widehat{CMB_1})$, $z=m(\widehat{AMC_1})$; evident că $x+$ $+y+z=180^\circ$. Dacă R_1 este raza cercului prin M,B,C, avem: $A_1B=2R_1\sin x$, $A_1C=2R_1\sin z$, $BC=2R_1\sin\left(x+z\right)=2R_1\sin y$. Aplicând teorema lui Ptolemeu în patrulaterul inscriptibil MBA_1C, obţinem succesiv:

$$MA_1 \cdot BC = MB \cdot A_1C + MC \cdot A_1B \Leftrightarrow MA_1 \sin y = MB \sin z + MC \sin x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{MA_1}{MA} = \frac{MB \sin z}{MA \sin y} + \frac{MC \sin x}{MA \sin y}.$$

Scriind relaţiile analoage şi adunându-le, concluzia urmează imediat din faptul că $a + \frac{1}{a} \geq 2$, $\forall \in (0, \infty)$.

În cazul particular $M = O$, obţinem inegalitatea remarcabilă

$$OA_1 + OB_1 + OC_1 \geq 6R,$$

unde R este raza cercului circumscris $\triangle ABC$. Să mai observăm că egalitatea este atinsă în triunghiul echilateral.

L9. *Fie ABC un triunghi ascuţitunghic cu $a \leq b \leq c$ şi $u, v, w \in (0, \infty)$, $u \leq v \leq w$. Dacă $uGA + vGB + wGC = (u + v + w) R$, unde G este centrul de greutate al triunghiului, iar R este raza cercului circumscris, atunci triunghiul ABC este echilateral.*

Paul Georgescu şi Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Fie $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, $f(M) = u|z_M - z_A| + v|z_M - z_B| + w|z_M - z_C|$. Deoarece $z_C = \dfrac{2z_0 + z_H}{3}$, din inegalitatea modulului obţinem că $f(G) \leq \dfrac{2}{3} f(O) + \dfrac{1}{3} f(H)$. Din ipoteză, $f(G) = f(O)$, deci $f(H) \geq f(O)$. Pe de altă parte, aplicând inegalitatea lui Jensen funcţiei concave $\cos : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0, 1]$, găsim că

$$f(H) = 2R(u \cos A + v \cos B + w \cos C) \leq 2R(u + v + w) \cos\left(\frac{uA + vB + wC}{u + v + w}\right).$$

Din inegalitatea lui Cebâşev, $uA + vB + wC \geq \dfrac{1}{3}(u + v + w)(A + B + C)$, deci $f(H) \leq 2R(u + v + w) \cos \dfrac{\pi}{3} = f(O)$. Am obţinut că $f(H) = f(O)$ şi atunci este atinsă egalitatea în inegalităţile Jensen şi Cebâşev, adică $\triangle ABC$ este echilateral.

L10. *a) Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. Să se arate că există o progresie aritmetică de numere naturale care nu are nici un termen de forma x^n, $x \in \mathbb{N}$.*

b) Dacă o progresie aritmetică de numere naturale conţine un termen de forma x^n, $x \in \mathbb{N}$, atunci să se arate că progresia conţine o infinitate de termeni de această formă.

Adrian Zanoschi, Iaşi

Soluţie. *a*) Să demonstrăm că progresia aritmetică $a_k = 4k+2$, $k \in \mathbb{N}$, nu conţine nici un termen de forma x^n, $x \in \mathbb{N}$. Într-adevăr, acest fapt rezultă din observaţiile: $(4m)^n = M_4$, $(4m + 1)^n = M_4 + 1$, $(4m + 2)^n = M_4$, $(4m + 3)^n = M_4 \pm 1$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

b) Fie o progresie de numere naturale cu raţia r care conţine un termen x^n, $x \in \mathbb{N}$. Numărul natural $(x + r)^n$ este termen al progresiei, deoarece

$$(x + r)^n = x^n + nx^{n-1}r + \cdots + r^n = x^n + \left(nx^{n-1} + \cdots + r^{n-1}\right) r.$$

Analog se demonstrează că orice număr de forma $(x + kr)^r$, $k \in \mathbb{N}$, este termen al progresiei.

L11. *Să se rezolve în* $\mathbb{N}^*$ *ecuaţia* $2 \cdot 3^x = 3 \cdot 2^y + 174$.

Daniela Iosub, elevă, Iaşi

Soluţie. Cum $x, y \in \mathbb{N}^*$, atunci $a = x - 1$, $b = y - 1$ sunt numere naturale. Împărţind ecuaţia prin 6, obţinem ecuaţia echivalentă $3^a = 2^b + 29$, $a, b \in \mathbb{N}$. Atunci $3^a = (3-1)^b + 29$, deci $3^a = M_3 + (-1)^b + 29$, prin urmare b trebuie să fie par, $b = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$ (deoarece este evident că $b = 0$ nu convine). Obţinem $3^a = 4^k + 29$, i.e. $(4-1)^a = 4^k + 29$, de unde $M_4 + (-1)^a = 4^k + 29$, adică a trebuie să fie par, $a = 2l$, $l \in \mathbb{N}^*$ ($a = 0$ nu convine). În aceste condiţii, ecuaţia devine $\left(3^l - 2^k\right)\left(3^l + 2^k\right) = 29$ şi cum 29 este prim, iar $3^l - 2^k < 3^l + 2^k$, găsim că $3^l - 2^k = 1$, $3^l + 2^k = 29$. Sistemul astfel format nu are soluţii în $\mathbb{N}$ şi atunci ecuaţia iniţială nu are soluţii în $\mathbb{N}^*$.

L12. *Fie* $ABCD$ *un patrulater convex; notăm* $\{O\} = AC \cap BD$, M *mijlocul lui* (AB), N *mijlocul lui* (CD). *Pentru propoziţiile* $P_1 : ABCD$ *inscriptibil;* $P_2 : OM \perp CD$*;* $P_3 : ON \perp AB$*, să se arate că: a)* $P_1 \wedge P_2 \Rightarrow P_3$*; b)* $P_2 \wedge P_3 \Rightarrow P_1$*; c)* $P_3 \wedge P_1 \Rightarrow P_2$ *(în legătură cu problema C:2265 din G. M. 3/2000).*

Viorel Cornea şi Dan Ştefan Marinescu, Hunedoara

Soluţie. *a*) Dacă $ABCD$ inscriptibil, din puterea punctului O faţă de cercul circumscris obţinem că $OA \cdot OC = OB \cdot OD$. Avem succesiv:

$$P_2 \Rightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}\right) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + (OA \cdot OC - OB \cdot OD) = 0 \qquad (1)$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - (OA \cdot OC - OB \cdot OD) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right)\left(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}\right) = 0 \Rightarrow -2\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ON} = 0 \Rightarrow AB \perp ON.$$

b) Se procedează analog.

c) Dacă $OM \perp CD$, se obţine relaţia (1). Din $ON \perp AB$ deducem analog

$$-OD \cdot OB + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OA} + OA \cdot OC = 0 \qquad (2)$$

Adunând (1) şi (2), găsim că $OA \cdot OC = OB \cdot OD$, adică $ABCD$ este inscriptibil.

L13. *Fie* $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(X) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1} X + a_n$, $n \geq 2$, *cu* $a_0 > 0$ *şi cu toate rădăcinile pozitive şi subunitare. Să se arate că* $(n-1)\,a_0 + a_1 + (-1)^n a_n > 0$.

Gheorghe Molea, Curtea de Argeş

Soluţie. Avem: $(n-1)\,a_0 + a_1 + (-1)^n a_n > 0 \Leftrightarrow -\dfrac{a_1}{a_0} - (-1)^n \dfrac{a_n}{a_0} < n - 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i - \prod_{i=1}^n x_i < n - 1$, unde $x_i \in (0,1)$, $i = \overline{1,n}$, sunt rădăcinile polinomului.

Prin inducţie completă, se dovedeşte uşor inegalitatea: $1 - \prod_{i=1}^n (1 - b_i) < \sum_{i=1}^n b_i$, $\forall b_i \in (0,1)$, $i = \overline{1,n}$, $n \geq 2$.

Luăm în aceasta $b_i = 1 - x_i$, $i = \overline{1,n}$, şi obţinem:

$$1 - \prod_{i=1}^n x_i < \sum_{i=1}^n (1 - x_i) \Longleftrightarrow 1 - \prod_{i=1}^n x_i < n - \sum_{i=1}^n x_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i - \prod_{i=1}^n x_i < n - 1,$$

q.e.d.

L14. *Pentru* $n \in \mathbb{N}^*$ *considerăm polinomul* $P_n(X) = \begin{vmatrix} X+1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & X^2+2 & 2 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & X^n+n \end{vmatrix}$.

a) Arătaţi că zero este rădăcină multiplă de ordin $\dfrac{n(n+1)}{2}$ *a acestui polinom;*

b) Dacă n este par, P_n *nu are rădăcini reale nenule, iar dacă n este impar,* P_n *are o singură rădăcină reală nenulă, care este simplă şi situată în intervalul* $(-2,-1]$.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Considerând ultima linie ca o sumă de două linii, avem:

$$P_n(X) = X^n P_{n-1}(X) + n \begin{vmatrix} X+1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & X^2+2 & \dots & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1 & n-1 & \dots & X^{n-1}+(n-1) & n-1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Scăzând ultima linie înmulţită respectiv cu $1, 2, \dots, n-1$ din celelalte, obţinem relaţia de recurenţă

$$P_n(X) = X^n P_{n-1}(X) + nX^{n(n-1)/2}, \tag{1}$$

din care se deduce, prin calcule de rutină, că

$$P_n(X) = X^{n(n-1)/2} Q_n(X) \tag{2}$$

$$\text{cu } Q_n(X) = X^n + X^{n-1} + 2X^{n-2} + \dots + (n-1)X + n. \tag{3}$$

Afirmaţia *a*) rezultă direct din (2) şi (3). Afirmaţia *b*) în cazul n par rezultă scriind polinomul Q_n sub forma

$$Q_n(X) = \left(X^n + X^{n-1} + \frac{1}{2}X^{n-2}\right) + \left[\frac{3}{2}X^{n-2} + X^{n-3} + \frac{3}{2}X^{n-4}\right] +$$
$$+ \left[\frac{5}{2}X^{n-4} + 5X^{n-5} + \frac{5}{2}X^{n-6}\right] + \dots + \left[\frac{n-3}{2}X^4 + (n-3)X^3 + \frac{n-3}{2}X^2\right] +$$
$$+ \left(\frac{n-1}{2}X^2 + (n-1)X + n\right)$$

şi observând că parantezele pătrate au discriminantul nul, iar cele rotunde strict negativ.

Dacă n este impar, verificăm mai întâi că Q'_m are valori pozitive pentru $x < 0$; într-adevăr, procedăm ca mai sus, observând că

$$Q'_n(X) = nX^{n-1} + (n-1)X^{n-2} + 2(n-2)X^{n-3} + \dots + (n-2)\cdot 2X + (n-1) =$$
$$= \left[nX^{n-1} + 1\cdot(n-1)X^{n-2} + \frac{1\cdot(n-1)}{2}X^{n-3}\right] + X^{n-3} +$$
$$+ \left[\frac{3\cdot(n-3)}{2}X^{n-3} + 3\cdot(n-3)X^{n-4} + \frac{3\cdot(n-3)}{2}X^{n-5}\right] + X^{n-5} + \dots +$$
$$+ \left[\frac{(n-4)\cdot 4}{2}X^4 + (n-4)\cdot 4X^3 + \frac{(n-4)\cdot 4}{2}X^2\right] + X^2 +$$
$$+ \left[\frac{(n-2)\cdot 2}{2}X^2 + (n-2)\cdot 2X + (n-1)\right].$$

Partea a doua a afirmaţiei b) rezultă din faptul că $Q_n(x) > 0$ pentru $x > 0$, $Q_n(-2)\, Q_n(-1) < 0$ şi funcţia $x \to Q_n(x)$ este strict crescătoare pentru $x < 0$.

L15. *Fie $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ şi $(c_n)_{n\geq 1}$ un şir convergent de numere reale. Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_n = \{n\alpha + c_n\}$ nu este monoton.*

Iuliana Georgescu şi Paul Georgescu, Iaşi

Soluţie. Să observăm că $\{x\} \geq \{y\} \Rightarrow \{x - y\} = \{x\} - \{y\}$. Presupunem că $(x_n)_{n\geq 1}$ este crescător. Atunci, deoarece acest şir este mărginit, el va fi convergent şi $x_{n+1} - x_n \to 0$. Pe de altă parte, $x_{n+1} - x_n = \{(n+1)\alpha + c_{n+1}\} - \{n\alpha + c_n\} = \{\alpha + c_{n+1} - c_n\}$.Dar $\alpha + c_{n+1} - c_n \to \alpha$ şi $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, deci $\{\alpha + c_{n+1} - c_n\} \to \{\alpha\} > 0$. Prin urmare, $x_{n+1} - x_n \to \{\alpha\} > 0$. Absurd.

L16. *a) Fie $a < b$ şi $M = \{f : [a,b] \to [a,b]\,;\ f$ monotonă$\}$. Arătaţi că există $f \in M$ cu $f(x) \neq x$, $\forall x \in [a,b]$ şi că orice asemenea funcţie nu are proprietatea lui Darboux.*

b) Demonstraţi că $\forall f \in M$, $\exists c \in [a,b]$ astfel încât $f(c)\,[a + b - f(c)] = c\,(a + b - c)$.

Ştefan Alexe, Piteşti

Soluţie. a) Funcţia $f : [a,b] \to [a,b]$ definită prin $f(x) = a + b - x$, dacă $x \in [a, (a+b)/2)$ şi $f(x) = a$, dacă $x \in [(a+b)/2, b]$, satisface condiţiile enunţului.

Presupunem că există o funcţie $f \in M$ fără puncte fixe şi cu proprietatea lui Darboux pe $[a,b]$. Fiind monotonă, f poate avea discontinuităţi doar de prima speţă; având proprietatea lui Darboux, f nu are nici discontinuităţi de acest fel. Rezultă că f este continuă pe $[a,b]$ şi tot aşa este şi $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$. Cum $g(a)\, g(b) = [f(a) - a]\,[f(b) - b] \leq 0$, deducem că $\exists c \in [a,b]$ astfel încât $g(c) = 0$, adică $f(c) = c$. Atunci c este un punct fix al funcţiei f, ceea ce contrazice presupunerea făcută.

b) Fie $f \in M$. Presupunem că f este crescătoare şi notăm $E = \{x \in [a,b]\,; f(x) \geq x\}$. Observăm că E este nevidă şi mărginită ($a \leq f(a)$ şi $E \subset [a,b]$). Ca urmare, $\exists c = \sup E$ şi, evident, $c \in [a,b]$. Din $x \leq c$, $\forall x \in E$, deducem că $x \leq f(x) \leq f(c)$, $\forall x \in E$. Deci $f(c)$ este un majorant al mulţimii E şi avem $c \leq f(c)$. Cum f este crescătoare, rezultă că $f(c) \leq f(f(c))$, de unde deducem că $f(c) \in E$ şi, deci, $f(c) \leq c$. Aşadar, $f(c) = c \quad (1)$.

Dacă f este descrescătoare, atunci $h : [a,b] \to [a,b]$, $h(x) = a + b - f(x)$ este crescătoare şi, procedând că mai sus, $\exists d \in [a,b]$ astfel încât $h(d) = d$, adică $f(d) = a + b - d \quad (2)$.

Din (1) şi (2) rezultă că $\forall f \in M$ ecuaţia $[f(x) - x]\,[a + b - x - f(x)] = 0$ sau $f(x)\,[a + b - f(x)] = x\,(a + b - x)$ are soluţii în $[a,b]$, deci $\exists c \in [a,b]$ astfel încât $f(c)\,[a + b - f(c)] = c\,(a + b - c)$.

L17. *Fie A un număr real pozitiv şi $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ o funcţie derivabilă pentru care $f(0) = 0$ şi $|f'(x)| \leq Af^n(x)$, $\forall x \in [0,\infty)$, unde n este un număr natural dat, $n \geq 1$, iar $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$. Atunci f este identic nulă.*

Sorin Puşpană, Craiova

Soluţie. Este suficient să arătăm că f este identic nulă pe orice interval de forma $[0,\beta]$, $\beta > 0$. Presupunem că $\exists\alpha > 0$ astfel încât f nu-i identic nulă pe $[0,\alpha]$, adică avem $M > 0$, unde $M = \sup\limits_{x\in[0,\alpha]} f(x)$. Cu teorema creşterilor finite obţinem: $\forall x \in [0,\alpha]$ are loc relaţia $f(x) = xf'(c)$, unde $c \in (0,x)$; deci $f(x) = x\,|f'(c)| \leq$

$\leq xA|f^n(c)| \leq \alpha AM$, $\forall x \in [0,\alpha]$. Ca urmare, $f(x) \leq \alpha AM$, $\forall x \in [0,\alpha]$, de unde $M \leq \alpha AM$ sau $\alpha A \geq 1$.

Fie $\Delta = (0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, \alpha)$ o diviziune a intervalului $[0,\alpha]$ cu $A\|\Delta\| < 1$ $(*)$. Dacă f nu-i identic nulă pe $[0,\alpha_1]$, atunci $M_1 = \sup\limits_{x\in[0,\alpha_1]} f(x) > 0$ şi ca mai sus obţinem $f(x) \leq \alpha_1 AM_1$, $\forall x \in [0,\alpha_1]$; deducem că $M_1 \leq \alpha_1 AM_1$, adică $\alpha_1 A \geq 1$, ceea ce contrazice $(*)$. În concluzie f este identic nulă pe $[0,\alpha_1]$. În particular, avem $f(\alpha_1) = 0$ şi cu intervalul $[\alpha_1, \alpha_2]$ procedăm la fel ca şi cu $[0,\alpha_1]$ etc.

După un număr finit de paşi, deducem că f este identic nulă pe întregul interval $[0,\alpha]$. Presupunerea iniţială făcută este falsă. În concluzie, f este identic nulă pe $[0,\infty)$.

L18. *Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ astfel încât $I_n + sA$ este inversabilă şi $(I_n + sA)^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ pentru orice $s \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

a) Să se arate că $I_n + kA$ este inversabilă pentru orice $k \in \mathbb{Z}$ şi $(I_n + kA)^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$;

b) Dacă $A^2 = O_n$, să se arate că $G = \{I_n + kA;\ k \in \mathbb{Z}\}$ este grup în raport cu înmulţirea matricelor şi să se determine toate subgrupurile lui G.

Marian Ionescu, Piteşti

Soluţie. *a*) Se arată uşor afirmaţia: $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ este inversabilă în $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \det C = \pm 1$. Fie $P(x) = \det(I_n + xA)$, $\operatorname{grad} P \leq n$, $P \in \mathbb{Z}(X)$. Pentru orice $s \in \{0, 1, 2, \ldots, 2n\}$, avem: $C_s = I_n + sA$ este inversabilă în $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \det C_s = \pm 1 \Leftrightarrow P(s) = \pm 1$. Prin urmare, există cel puţin $n+1$ numere s în care P ia valoare 1 sau cel puţin $n+1$ numere s în care P este -1.

Considerăm că există $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1} \in \{0, 1, 2, \ldots, 2n\}$ astfel încât $P(u_1) = P(u_2) = \cdots = P(u_{n+1}) = 1$; analog se procedează în celălalt caz. Polinomul $Q(X) = P(X) - 1$, de grad cel mult n, se anulează pentru $n+1$ valori distincte, deci $Q = 0$ şi $P = 1$. Rezultă că $\det(I_n + kA) = 1$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ şi, în consecinţă, concluzia dorită.

b) Dacă $C_s = I_n + sA$, $C_t = I_n + tA$, $s, t \in \mathbb{Z}$, atunci, în ipotezele problemei, $C_s C_t = C_{s+t}$. Se verifică uşor că G este grup în raport cu înmulţirea matricelor şi că $(G, \cdot) \simeq (\mathbb{Z}, +)$ prin $f : \mathbb{Z} \to G$, $f(k) = I_n + kA$. Deoarce subgrupurile lui $(\mathbb{Z}, +)$ sunt de forma $H = m\mathbb{Z}$, $m \geq 0$, rezultă că subgrupurile lui $(G, \cdot)$ au forma $\{I_n + mkA;\ k \in \mathbb{Z}\}$ cu $m \in \mathbb{N}$.

L19. *Fie H un subgrup al grupului altern $(A_{2002}, \circ)$. Dacă*

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & 1999 & 2000 & 2001 & 2002 \\ 1 & 2 & \ldots & 1999 & 2001 & 2002 & 2000 \end{pmatrix} \in H$$

şi $\sigma \circ \rho \circ \sigma^{-1} \in H$, $\forall \sigma \in A_{2002}$, să se arate că $H = A_{2002}$.

Lucian-Georges Lăduncă, Iaşi

Soluţie. Se ştie că grupul altern $(A_n, \circ)$, $n \geq 3$, este generat de cicluri de lungime 3. Pentru a demonstra că $H = A_{2002}$ este suficient să arătăm că orice astfel de ciclu se află în H. Pentru aceasta, fie (α, β, γ) un 3-ciclu oarecare ($\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2, \ldots, 2002\}$). Fie $\sigma = \begin{pmatrix} \ldots & a & \ldots & b & \ldots & 2000 & 2001 & 2002 \\ \ldots & a' & \ldots & b' & \ldots & \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$, unde a, b, a', b' sunt alese astfel încât $\sigma \in A_{2002}$. Se constată că $(\alpha, \beta, \gamma) = \sigma \circ \rho \circ \sigma^{-1} \in H$.

L20. *Fie $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Se consideră funcţia $f : [1, a] \to \mathbb{R}$ de două ori derivabilă. Să se arate că dacă funcţia $g : [1, a] \to \mathbb{R}$, $g(x) = xf'(x)$ este monoton crescătoare, atunci*
$$f\left(\sqrt{a}\right) \ln a \le \int_1^a \frac{f(t)}{t} dt.$$

Marcel Chiriţă, Bucureşti

Soluţie. Cum g este funcţie crescătoare, rezultă că $g' \ge 0$, adică $f'(x) + xf''(x) \ge$ ≥ 0, $\forall x \in [1, a]$.

Fie funcţia $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(a^x)$. Avem: $h'(x) = a^x \ln a\, f'(a^x)$ şi $h''(x) = a^x \ln^2 a \left[f'(a^x) + a^x f''(a^x)\right] \ge 0$, $\forall x \in [1, a]$, de unde rezultă că h este convexă. Conform inegalităţii lui Jensen, avem:
$$h\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \le \frac{h(x_1) + h(x_2) + \cdots + h(x_n)}{n}, \ \forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0, 1].$$
Pentru $x_k = \dfrac{k}{n}$, $k = \overline{1, n}$ şi trecând la limită pentru $n \to \infty$ obţinem
$$h\left(\frac{1}{2}\right) \le \int_0^1 h(t)\, dt, \quad \text{adică} \quad f\left(\sqrt{a}\right) \in \int_0^1 f(a^x)\, dx.$$
În ultima relaţie efectuăm schimbarea $a^x = t$ şi obţinem inegalitatea cerută.

LISTA MEMBRILOR FILIALEI IAŞI a S. S. M.[1]

- continuare din nr. 1/2000, 1/2001 şi 1/2002 -

90. GALL Eduard	Inginer, S.C. Easten, Iaşi
91. URSACHE Felicia-Camelia	Şcoala gen. nr.36, Iaşi
92. LĂMĂTIC Lidia-Carmen	Grupul Şcolar Agricol Holboca, Iaşi
93. MACSIMIUC Delia	Şcoala "Otilia Cazimir", Iaşi
94. FARCAŞANU Ana-Corina	Şcoala gen. nr.36, Iaşi
95. BAICAN Tatiana	Colegiul "C.Negruzzi", Iaşi
96. BUCĂTARU Mihaela	Colegiul "E.Racoviţă", Iaşi
97. BUCĂTARU Ion	Fac. de matematică, Univ. "Al.I.Cuza", Iaşi
98. CREŢU Ines	Şcoala gen. nr.42, Iaşi
99. ASIMINOAIEI Ana	Liceul de chimie, Iaşi
100. NAZARIE Elena	Liceul de chimie, Iaşi
101. PÂSLARU Margareta Adriana	Şcoala prof. specială, Tg. Frumos (Iaşi)
102. BOTÂRCĂ Mihaela	Şcoala gen. nr.10, Iaşi
103. LĂDUNCĂ Lucian-Georges	Liceul de informatică "Gr.Moisil", Iaşi
104. GOŞMAN Neculai	Şcoala "G.Ibrăileanu", Tg.Frumos (Iaşi)
105. ONICIUC Carmen-Elena	Şcoala nr.6 "M.Busuioc", Paşcani
106. LUPULEASA Iuliana	
107. ŞTIURCĂ Ecaterina	Grupul Şcolar "M.Sturza", Iaşi
108. ANIŢA Alice	Colegiul Naţional, Iaşi
109. PREDA Anişoara	Şcoala "D.D.Pătrăşcanu", Tomeşti (Iaşi)

[1] Lista va fi continuată în numerele următoare.