Soluțiile problemelor propuse în nr. 1/2001

Clasele primare

P.7. *Crizantema are cu 38 timbre mai puțin decât colega ei, Maria. Câte timbre trebuie să mai cumpere Crizantema pentru a avea cu cel mult 4 timbre în plus față de Maria?*

Crizantema Mironeanu, elevă, Iaşi

Soluție. Pentru a o egala pe Maria, Crizantema mai are nevoie de 38 timbre. Pentru a o depăşi cu cel mult 4 timbre, ea trebuie să mai cumpere, pe lângă cele 38, încă 1,2,3 sau 4 timbre. Deci Crizantema trebuie să mai cumpere 39,40,41 sau 42 timbre.

P.8. *Să se arate că din numerele 1,2,3,…,10 nu se pot forma două şiruri de numere, cu acelaşi număr de numere, astfel încât adunând numerele din fiecare şir să obținem sume egale.*

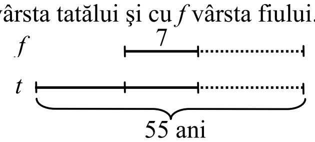
Maria Mursa, elevă, Iaşi

Soluție. Suma numerelor 1,2,3,…,10 este 55. Dacă ar exista cele două şiruri de numere cu sume egale, atunci cele două sume adunate ar trebui să dea 55. Acest lucru este imposibil deoarece nu există două numere naturale egale care să dea suma 55.

P.9. *Aflați vârsta în prezent a tatălui unui băiat ştiind că băiatul are 7 ani, iar atunci când băiatul va avea vârsta tatălui, tatăl va avea 55 ani.*

Înv. Elena Marchitan, Iaşi

Soluție. Să figurăm cele două vârste ținând cont de relațiile dintre ele. Notăm cu t vârsta tatălui şi cu f vârsta fiului.



Se observă că vârsta de 55 de ani este formată din vârsta fiului şi din dublul diferenței dintre vârsta tatălui şi a fiului în prezent.

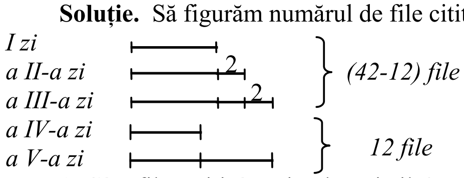
1. Care este dublul diferenței dintre cele două vârste în prezent? $55 - 7 = 48$
2. Care este diferența dintre cele două vârste în prezent? $48 : 2 = 24$
3. Care este vârsta tatălui în prezent? $24 + 7 = 31$

R : 31

P. 10. *George şi-a propus să citească în cinci zile o carte ce are 42 file. Numărul filelor citite în primele trei zile este reprezentat de numere pare consecutive. În a patra şi a cincea zi a citit 12 file. Ştiind că în ultima zi a citit de două ori mai mult decât în ziua precedentă, să se afle câte file a citit George în fiecare zi.*

Înv. Geta Dragnea, Iaşi

Soluție. Să figurăm numărul de file citite de George în fiecare zi



1. Câte file a citit în primele trei zile? $42 - 12 = 30$

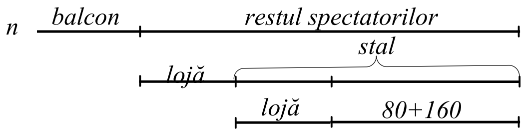
2. Care este triplul numărului de file citit în prima zi? 30 – 6 = 24
3. Câte file a citit în prima zi? 24 : 3 = 8
4. Câte file a citit în a doua zi? 8 + 2 = 10
5. Câte file a citit în a treia zi? 10 + 2 = 12
6. Câte file a citit în a patra zi? 12 : 3 = 4
7. Câte file a citit în a cincea zi? $4 \cdot 2 = 8$

R : 8 file, 10 file, 12 file, 4file, 8 file.

P. 11. *Câţi spectatori au fost aseară la Teatrul Naţional "Vasile Alexandri", din Iaşi, dacă la balcon au fost 160 de spectatori, la lojă un sfert din restul spectatorilor, iar la stal cu 80 spectatori mai mult decât la lojă şi balcon împreună?*

Înv. Rodica Agrici, Iaşi

Soluţie. Să figurăm repartiţia spectatorilor, n fiind numărul total.



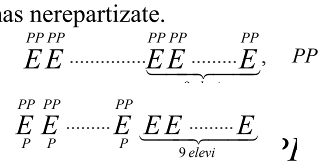
1. Cât reprezintă jumătate din restul spectatorilor? 80 + 160 = 240
2. Câţi spectatori au stat la lojă şi stal? $240 \cdot 2 = 480$
3. Câţi spectatori au fost la teatru? 480 + 160 = 640

R : 640 spectatori

P.12. *Moş Crăciun împarte daruri elevilor clasei a IV-a. Dacă ar da fiecărui copil câte 2 pachete, ar rămâne în sac 2 pachete. Dacă ar oferi fiecărui copil câte 3 pachete, ar rămâne 9 copii fără daruri. Câte pachete are Moş Crăciun în sac?*

Înv. Fănică Dragnea, Iaşi

Soluţie. Figurăm cele două situaţii din problemă folosind simbolurile *E* (elev) şi *P* (pachet) Primul rând de simboluri sugerează fiecare elev a primit câte 2 pachete 2 pachete au rămas nerepartizate.



Al doilea rând de simboluri sugerează că primii elevi au primit câte 3 pachete iar ultimii 9 elevi nu au nici un pachet. Putem considera că al treilea pachet a fost oferit ultimilor 9 elevi. Acum putem scrie:

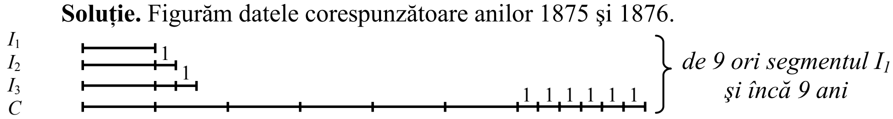
1.Câţi elevi au primit câte 3 pachete? $2 \cdot 9 + 2 \cdot 1 = 20$
2.Câte pachete are Moş Crăciun? $20 \cdot 3 = 60$

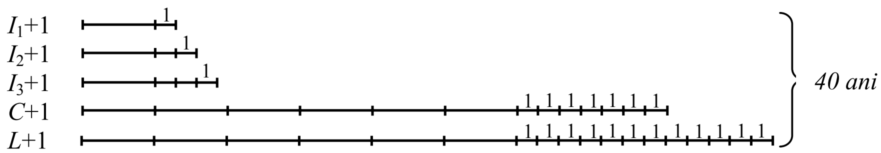
R : 60 pachete

P.13. *Scriitorul Ion Creangă a publicat povestea „Capra cu trei iezi" în 1875. Se spune că pe atunci capra ar fi avut o vârstă egală cu dublul sumei vârstelor iezişorilor ei, anii acestora fiind exprimaţi prin numere naturale consecutive. Peste un an, când s-a abătut necazul asupra caprei, lupul avea vârsta egală cu dublul sumei vârstelor de atunci ale iezilor, iar toţi cinci aveau împreună 40 ani. Ce vârstă avea fiecare în anul publicării acestei poveşti?*

Înv. Mihai Agrici, Iaşi

Soluţie. Figurăm datele corespunzătoare anilor 1875 şi 1876.





Unde I_1, I_2, I_3, C, L reprezintă vârstele celor cinci viețuitoare în anul 1875. Analizând figurarea corespunzătoare anului 1876, putem scrie:

1. Care este numărul segmentelor ce reprezintă vârsta I1? $3 \cdot 1 + 2 \cdot 6 = 15$
2. Câți ani reprezintă aceste segmente? $40 - 25 = 15$
3. Ce vârstă avea mezinul? $15 : 15 = 1$
4. Ce vârstă avea iedul mijlociu? $1 + 1 = 2$
5. Ce vârstă avea iedul cel mare? $2 + 1 = 3$
6. Ce vârstă avea capra? $(1+2+3) \cdot 2 = 12$
7. Ce vârstă avea lupul? $(2+3+4) \cdot 2 - 1 = 17$

R : 1an, 2ani, 3ani, 12ani, 17ani.

Clasa a V-a

V.16. *Un automobilist vede la un moment dat pe kilometrajul de la bord numărul 12921. După două ore de mers cu viteză constantă, pe kilometraj a apărut următorul număr care se citește la fel în ambele sensuri. Aflați viteza de deplasare a automobilului.*

Gabriel Mârșanu, Iași

Soluție. Următorul număr care se citește la fel în ambele sensuri este 13031. În două ore de mers automobilistul a parcurs cu viteză constantă distanța de 110 km = 13031 km – 12921 km, deci viteza sa a fost de 55 km/h.

V.17. *Să se arate că fiecare termen al șirului: 19204, 9012004, 900120004, ... este un pătrat perfect.*

Constantin Chirilă, Iași

Soluția 1. Se observă că $9120 = 302^2$, $9012004 = 3002^2$ etc. În general, se pare că $9\underbrace{00.....0}_{p}12\underbrace{00.....0}_{p+1}4 = 3\underbrace{00.....0}_{p+1}2^2$. Se verifică prin ridicare la pătrat că egalitatea este adevărată; ca urmare, numerele din șir sunt pătrate perfecte.

Soluția 2 (*Schibinschi Greta, Botoșani*). Scriem:

$$9\underbrace{0.....0}_{p}12\underbrace{0.....0}_{p+1}4 = 9\cdot 10^{2p+4} + 12\cdot 10^{p+2} + 4 = 9\cdot 10^{2p+4} + 6\cdot 10^{p+2} + 6\cdot 10^{p+2} + 4 =$$

$$= 3\cdot 10^{p+2}(3\cdot 10^{p+2} + 2) + 2(3\cdot 10^{p+2} + 2) = (3\cdot 10^{p+2} + 2)^2 = 3\underbrace{0.....0}_{p+1}2^2.$$

V.18. *Arătați că, dacă suma a n numere naturale nenule este un număr prim, atunci aceste numere sunt prime între ele.*

Cristiana Artenie, elevă, Iași

Soluție. Fie $p = a_1 + a_2 + ... + a_n$, p număr prim și $d = (a_1, a_2, ... , a_n)$. Atunci $d \mid a_1$, $d \mid a_2$, … , $d \mid a_n$ și deci $d \mid a_1 + a_2 + ... + a_n$, adică $d \mid p$. Ca urmare sau $d = 1$, sau $d = p$; arătăm că nu putem avea $d = p$ și de aici va rezulta concluzia. Într-adevăr, dacă $d = p$, atunci numerele de date se scriu: $a_1 = pa_1', ..., a_n = pa_n'$ și vom avea $pa_1' + pa_2' + ... + pa_n' = p$ sau $a_1' + a_2' + ... + a_n' = 1$, ceea ce nu se poate!

V.19. *Fie a, b, p, q* $\in \boldsymbol{N}^*$. *Aflați valorile pe care le poate lua numărul* $(1+A)^B$, *unde* $A = \underbrace{a+b-a-b+a+b-...}_{p\ termeni}$ *și* $B = \underbrace{b+a-b-a+b+a-...}_{q\ termeni}$.

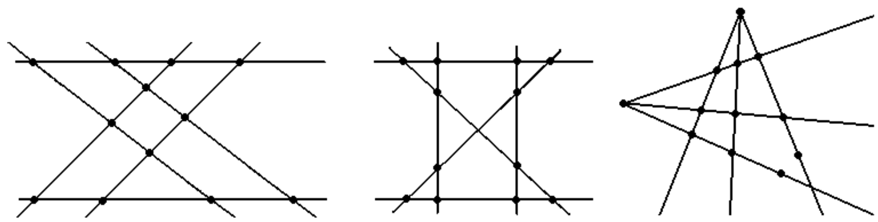
Cristiana Constanda, elevă, Iași

Soluție. Observăm că numărul A are valorile 0, a, $a + b$ sau b, după cum $p = \boldsymbol{M}4$, $p = \boldsymbol{M}4 + 1$, respectiv $p = \boldsymbol{M}4 + 3$. Ca urmare, $1+A \in \{1, 1+a, 1+a+b, 1+b\}$. În mod analog, $B \in \{0, b, a+b, a\}$. În consecință, avem: $(1+A)^B \in \{1, (1+a)^a, (1+b)^b, (1+a)^{a+b}, (1+b)^a, (1+b)^b, (1+b)^{a+b}, (1+a+b)^0, (1+a+b)^b, (1+a+b)^{a+b}\}$.

V.20. *Să se aranjeze 12 puncte pe 6 drepte astfel încât pe fiecare dreaptă să fie situate 4 puncte (indicați cel puțin două aranjamente de acest fel).*

Andrea Balla, elevă, Brașov

Soluție. Reproducem trei dintre numeroasele soluții primite de redacție.



__Clasa a VI-a__

VI.16. *Fie a și b două numere întregi. Arătași echivalența afirmațiilor următoare:* 1° $1000a+b \vdots 43$; 2° $a+4b \vdots 43$; 3° $11b-8a \vdots 43$; 4° $7b-9a \vdots 43$.

Gheorghe Costovici, Iași

Soluție. Vom arăta că 1° $\Rightarrow$ 2° $\Rightarrow$ 3° $\Rightarrow$ 4° $\Rightarrow$ 1°. Avem:

1°$\Rightarrow$ $1000a+b = 43k \Rightarrow (23\cdot43+11)a+b = 43k \Rightarrow 23\cdot43a+11a+b = 43k \Rightarrow \Rightarrow 4\cdot23\cdot43a+44a+4b = 4\cdot43k \Rightarrow 4\cdot23\cdot43a+43a+(a+4b) = 4\cdot43k \Rightarrow a+4b \vdots 43$;

2°$\Rightarrow$ $a+4b = 43k \Rightarrow -8a-32b = -8\cdot43k \Rightarrow (11b-8a)-43b = -8\cdot43k \Rightarrow 11b-8a \vdots 43$;

3°$\Rightarrow$ $11b-8a = 43k \Rightarrow 99b-72a = 9\cdot43k \Rightarrow 43b+56b-72a = 9\cdot43k \Rightarrow 43b+8(7b-9a) = 9\cdot43k \Rightarrow 7b-9a \vdots 43$;

4°$\Rightarrow$ $7b-9a = 43k \Rightarrow 135\cdot7b-135\cdot9a = 135\cdot43k \Rightarrow 945b-1215a = 135\cdot43k \Rightarrow 946b-b-1000a-215a = 135\cdot43k \Rightarrow 43(22b-5a)-(1000a+b) = 135\cdot43k \Rightarrow 1000a+b \vdots 43$.

VI.17. *Fie* $E = 2^{4n+2} + 3^{4n} + 4^{4n} + 5^{2n} + 6^{2n}$, $n \in \boldsymbol{N}$.

1) Arătați că E nu este pătrat perfect.

2) Aflați n astfel încât $E \vdots 9$.

Cristiana Constanda, elevă, Iași

Soluție. 1) Dacă $n = 0$, atunci $E = 8$ și nu este pătrat perfect. Dacă $n \geq 1$, atunci ultima cifră a numărului E este ultima cifră a sumei 4+1+6+5+6 = 22, deci E se termină în 2 și de aici rezultă că nu poate fi pătrat perfect.

2) Dacă $n = 0$, $E = 8$ nu se divide prin 9. Dacă $n \geq 1$, atunci $6^{2n} \vdots 9$ și deci avem:

$E \vdots 9 \Leftrightarrow 2^{4n+2}+4^{4n}+5^{2n} \vdots 9 \Leftrightarrow 2^{n+2}\cdot 2^{3n}+16^{2n}+(9-4)^{2n} \vdots 9 \Leftrightarrow 2^{n+2}\cdot(9-1)^n+2^{2n}\cdot(9-1)^{2n}+4^{2n} \vdots 9$
$\Leftrightarrow (-1)^n\cdot 2^{n+2}+2^{2n}+2^n(9-1)^n \vdots 9 \Leftrightarrow (-1)^n\cdot 2^n\cdot 4+2^n\cdot 2^n+(-1)^n\cdot 2^n \vdots 9 \Leftrightarrow 5\cdot(-1)^n+2^n \vdots 9$.

Dacă $n = 6k$ ($k \geq 1$), atunci $5\cdot(-1)^n+2^n \vdots 9 \Leftrightarrow (5+2^{6k}) \vdots 9 \Leftrightarrow 5+(9-1)^{2k} \vdots 9 \Leftrightarrow (5+1) \vdots 9$, fapt care nu este adevărat. La fel se arată că E nu se divide cu 9 dacă $n = 6k+1$, $n = 6k+3$ sau $n = 6k+4$ ($k \geq 0$).

Dacă $n = 6k+2$ sau $n = 6k+5$ ($k \geq 0$), atunci E se divide cu 9, deoarece:

$$5\cdot(-1)^{6k+1}+2^{6k+2} \vdots 9 \Leftrightarrow 5+4(9-1)^{2k} \vdots 9 \Leftrightarrow (5+4) \vdots 9 \text{ etc.}$$

V.18. *Să se descompună în factori primi numărul S dat de:*

$$S = 123456789 + 234567891 + 345678912 + ... +12345678.$$

Paraschiva Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Scriind reprezentarea în baza 10 al fiecărui termen din suma S, obţinem :

$$S = (1+2+ ... +9)\cdot 10^8 + (1+2+ ... +9)\cdot 10^7 + ... + (1+2+ ... +9) =$$
$$=45(10^8+10^7+ ... +10 + 1) = 45[10^6(10^2+10+1) + 10^3(10^2+10+1) + (10^2+10+1)]=$$
$$= 45(10^2+10+1)(10^6+10^3+1) = 3^2\cdot 5\cdot 111\cdot 1001001 = 3^4\cdot 5\cdot 37\cdot 333667,$$

aceasta fiind descompunerea în factori primi a numărului S.

VI.19. *Să se afle cinci numere raţionale ştiind că:a) suma lor este 351; b) primele trei sunt invers proporţionale cu primele trei numere prime; c) ultimele trei sunt direct proporţionale cu 7, 11 şi 13.*

Cristiana Artenie, elevă, Iaşi.

Soluţie. Fie a, b, c, d şi e cele cinci numere. Condiţiile din enunţ se scriu: $a+b+c+d+e = 351$, $2a = 3b = 5c$ şi $\frac{c}{7}=\frac{d}{11}=\frac{e}{13}$. Din ultimele relaţii deducem că $a=\frac{5c}{2}$, $b=\frac{5c}{3}$, $d=\frac{11c}{7}$, $e=\frac{13c}{7}$ şi înlocuind în prima egalitate obţinem o ecuaţie cu necunoscuta c etc.

VI.20. *Fie a, b* $\in$ **N** *şi c* $\in$ **Q** *direct proporţionale cu p_1, p_2, p_3, unde $p_1 < p_2 < p_3$ sunt numere prime.*

a) Arătaţi că $c \in$ **N***.

b) Determinaţi p_1, p_2, p_3 dacă $a+b < 35 = c$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. a) Din $\frac{a}{p_1}=\frac{b}{p_2}=\frac{c}{p_3}$ deducem $ap_2 = bp_1$ şi $c=\frac{a}{p_1}\cdot p_3$. Din prima egalitate rezultă $p_1 \mid ap_2$ şi deci $p_1 \mid a$, adică $\frac{a}{p_1}=k \in \mathbf{N}^*$. Folosind a doua egalitate, obţinem $c \in \mathbf{N}^*$.

b) Avem: $a+b < 35 = c \Rightarrow k(p_1+p_2) < 35 = kp_3 \Rightarrow 35 = kp_3$ şi $p_1+p_2 < p_3 \Rightarrow p_3 \in \{5, 7\}$ şi $p_1+p_2 < p_3$. Dacă $p_3 = 3$, atunci $p_1 = 2$ şi $p_2 = 3$ (deoarece $p_1 < p_2 < p_3$) şi nu avem $p_1+p_2 < p_3$. Rămâne $p_3=7$, caz în care inegalitatea $p_1+p_2 < p_3$ este îndeplinită numai de numerele prime $p_1 = 2$, $p_2 = 3$.

Clasa a VII-a

VII.16. *Să se cerceteze care dintre elementele mulţimii $A=\{(x,y) \in \mathbf{Q}\times\mathbf{Q};\ 4x^2+12x+9 + |y^2-25|=0\}$ aparţin graficului funcţiei $f(x) = -2x+2$, $x \in \mathbf{R}$.*

Cristiana Constanda, elevă, Iaşi

Soluţie. Avem: $A=\{(x,y)\in\mathbf{Q}\times\mathbf{Q};\ (2x+3)^2+|y^2-25|=0\}=\{(x,y)\in\mathbf{Q}\times\mathbf{Q};\ 2x+3=0$ şi $y^2-25=0\}=\{(x,y)\in\mathbf{Q}\times\mathbf{Q};\ x=-\frac{3}{2}$ şi $y=\pm 5\}=\left\{(-\frac{3}{2},-5),(-\frac{3}{2},5)\right\}$. Cum $f(-\frac{3}{2})=5$, numai al doilea punct al lui A aparţine graficului lui f.

VII.17. *a) Fie* $x, y, z\in[2,+\infty)$. *Arătaţi că* $(x^2+y)(y^2+z)(z^2+x)\geq 27xyz$.

b) Fie $x, y, z\in[3,+\infty)$. *Arătaţi că* $(x^2+y)(y^2+z)(z^2+x)\geq 64xyz$.

Lucian Tuţescu, Craiova

Mai general, pentru orice $n\in\mathbf{N}$ fixat are loc inegalitatea:

$$(x^2+y)(y^2+z)(z^2+x)\geq(n+1)^3xyz,\ \forall x,y,z\in[n,+\infty). \quad (1)$$

(pentru $n=2$ şi $n=3$ se obţin inegalităţile din enunţ).

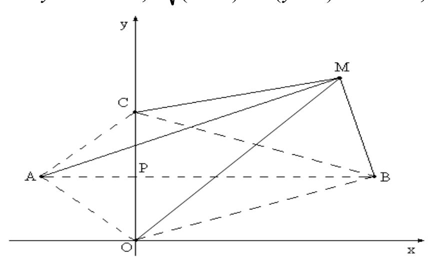
Soluţia 1 (în maniera autorului). Cum $x\geq n\Rightarrow x^2\geq nx\Rightarrow x^2+y\geq nx+y$ şi cum $nx+y=x+\ldots+x+y\geq(n+1)\sqrt[n+1]{x^ny}$, obţinem $x^2+y\geq(n+1)\sqrt[n+1]{x^ny}$. Analog, $y^2+z\geq$ $\geq(n+1)\sqrt[n+1]{y^nz}$, $y^n+x\geq(n+1)\sqrt[n+1]{z^nx}$. Prin înmulţirea membru cu membru a ultimelor trei inegalităţi se obţine (1).

Soluţia 2 (în maniera mai multor elevi din Braşov). Are loc $x^2+y\geq(n+1)x$, $\forall x,y\in[n,+\infty)$ căci $x^2+y\geq(n+1)x\Leftrightarrow x^2-(n+1)x+n+(y-n)\geq 0\Leftrightarrow(x-1)(x-n)+(y-n)\geq 0$. Înmulţind membru cu membru inegalitatea $x^2+y\geq(n+1)x$ cu analoagele ei, obţinem (1).

VII.18. *Să se determine numerele reale x şi y pentru expresia* $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x+a)^2+(y-a)^2}+\sqrt{(x-b)^2+(y-a)^2}+\sqrt{x^2+(y-c)^2}$ *(*$a,b,c\in\mathbf{R}_+$*) este minimă şi să se afle apoi această valoare minimă.*

Cristiana Artenie, elevă, Iaşi

Soluţie. În raport cu un sistem Oxz de axe coordonate figurăm punctele $O(0,0)$, $A(-a,a)$, $B(b,a)$, $C(0,c)$ şi $M(x,y)$. Deoarece $\sqrt{x^2+y^2}=MO$, $\sqrt{(x+a)^2+(y-a)^2}=MA$, $\sqrt{(x-b)^2+(y-a)^2}=MB$ şi $\sqrt{x^2+(y-c)^2}=MC$, problema revine la determinarea minimului expresiei $E=MO+MA+MB+MC$, atunci când M este un punct oarecare din plan.

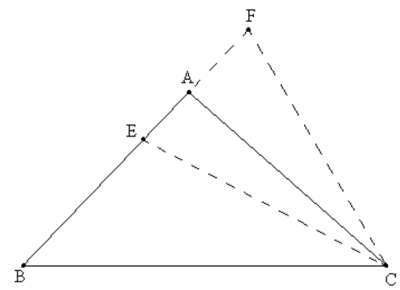


Avem inegalităţile: $MO+MC\geq OC$ (ΔMOC), $MA+MB\geq AB$ (ΔMAB), deci $E\geq$ $\geq AB+OC$, cu egalitate pentru $M\in(OC)\cap$ $\cap(AB)$, adică M coincide cu $P(0,a)$. Ca urmare, $E_{\min}$ se obţine pentru $x=0$, $y=a$ şi are valoarea $E_{\min}=2a+b+|a-c|$.

VII.19. *Se consideră un triunghi dreptunghic isoscel ABC cu vârful în A şi se notează cu E şi F punctele de intersecţie ale cercurilor* $\mathcal{C}(C,\frac{3}{4}BC)$ *şi* $\mathcal{C}(A,\frac{1}{4}BC)$. *Să se arate că punctele B, E şi F sunt coliniare.*

Adrian Zanoschi, Iaşi

Soluţie. Fie $AB = AC = a$. Avem: $AE = AF = \frac{BC}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ şi $CE = CF = \frac{3BC}{4} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$. Se observă de aici că $AE^2 + AC^2 = \frac{2a^2}{16} + a^2 = \frac{18a^2}{16} = EC^2$, deci ΔAEC este dreptunghic în A, adică $AE \perp AC$, de unde rezultă că $E \in AB$. Analog se arată că $F \in AB$, deci B, E, F sunt coliniare.



VII.20. *Să se împartă cu ajutorul unui echer negradat un segment [AB] în trei părţi de lungimi egale.*

Constatin Cocea, Iaşi

Soluţie. Vezi **E. Cohal** - "*Construcţii geometrice cu echerul*", p.41 din acest număr.

Clasa a VIII-a

VIII.16. *Fie* $n \in \mathbf{N}^*$ *şi* $A_n = \{\overline{x_1 x_2 \ldots x_n}\}$. *Definim funcţia* $d: A_n \times A_n \to \mathbf{N}$ *prin* $d(x, y) = Card\{i / i \in \overline{1,n}, x_i \neq y_i\}$, *unde* $x = \overline{x_1 x_2 \ldots x_n}$ *şi* $y = \overline{y_1 y_2 \ldots y_n}$.

Să se arate că d este o distanţă, adică satisface condiţiile: 1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$; *2)* $d(x,y) = d(y,x), \forall x,y \in A_n$; *3)* $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y), \forall x,y,z \in A_n$.

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. Verificăm pe rând 1), 2) şi 3):

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n \Leftrightarrow x = y$.

2. $d(x, y) = d(y, x), \forall x,y \in A_n$, căci perechile de numere (x, y) şi (y, x) au aceleaşi cifre distincte.

3. Să presupunem că $d(x, y) = k = \text{Card}\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$(deci $x_{i_1} \neq y_{i_1}, \ldots, x_{i_n} \neq y_{i_n}$ şi $x_j = y_j$ pentru $j \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$) şi fie $z = \overline{z_1, z_2, \ldots, z_n}$. Fie p numărul indicilor din $\{i_1, \ldots, i_k\}$ pentru care coincid cifrele lui z şi x şi fie q numărul acelora pentru care coincid cifrele lui z şi y. Evident, avem $p+q \leq k$. Deoarece $z_{i_1} = x_{i_1} \Rightarrow z_{i_1} \neq y_{i_1}$ şi $z_{i_1} = y_{i_1} \Rightarrow z_{i_1} \neq x_{i_1}$ etc., rezultă că $d(x, z) \geq k-q$ şi $d(z, y) \geq k-p$. Ca urmare, $d(x, z) + d(z, y) \geq 2k-(p+q) \geq k = d(x, y)$, adică este verificată 3).

VIII.17. *Arătaţi că* $\alpha \in (0,1)$, *ştiind că numărul real* α *este o soluţie a ecuaţiei* $2x^5 + x^3 - 1 = 0$.

Dumitru Neagu, Iaşi

Soluţia 1. Avem: $2\alpha^5 + \alpha^3 - 1 = 0 \Rightarrow \alpha^3(2\alpha^2+1) = 1 \Rightarrow \alpha^3 = \frac{1}{2\alpha^2+1} \Rightarrow 0 < \alpha^3 < 1 \Rightarrow 0 < \alpha < 1$ (s-a utilizat faptul că $\alpha \neq 0$, zero nefiind soluţie a ecuaţiei date).

Soluţia 2. Dacă $x \leq 0$, atunci $2x^5+x^3-1 \leq -1 < 0$, deci $x \leq 0$ nu este soluţie a ecuaţiei date. Dacă $x \geq 1$, atunci $2x^5+x^3-1 \geq 2+1-1>0$, deci $x \geq 1$ nu este soluție a ecuației date. Cum numărul α este soluție a acestei ecuații, rezultă că $\alpha \in (0,1)$.

VIII.18. *Dacă $x,y \in [0,1]$, atunci avem:*

$$x+y \leq \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1+\sqrt{1-y^2}}+\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-\sqrt{1-y^2}}.$$

Constantin Cocea, Iaş*i*

Soluţie. Ridicând inegalitatea dată la pătrat (avem voie!), obţinem: $x^2+y^2+2xy \leq$ $(1+\sqrt{1-y^2}-\sqrt{1-x^2}-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)})+(1-\sqrt{1-y^2}+\sqrt{1-x^2}-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)})+2xy$, echivalentă cu $(1-x^2)+(1-y^2) \geq 2\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$, adevărată conform inegalităţii mediilor.

VIII.19. *Să se determine numerele naturale $n \geq 2$ ştiind că mulţimea $\left\{x \in N \,/\, \dfrac{x^2-x-1}{n} \in N\right\} \cap \{1,2,...,n\}$ este formată dintr-un singur element.*

Cristinel Mortici, Constanţa

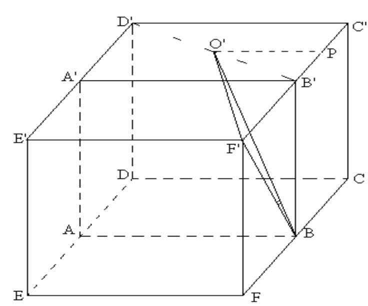
Soluţie. Fie $n \geq 2$ un număr cu proprietatea dorită şi fie $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$ unicul număr pentru care $n \mid x^2+x+1$. Cum $n+1-x \in \{1, 2, \ldots, n\}$ şi $n \mid (n+1-x)^2-(n+1-x)-1$ (după cum se vede din egalitatea $(n+1-x)^2-(n+1-x)-1= n(n-2x+1)+(x^2-x+1)$, din unicitatea lui x rezultă că $n+1-x=x$, deci $x=\dfrac{n+1}{2}$ şi atunci n este impar: $n=2k+1$, $x=k+1$. În consecinţă, $n \mid x^2-x-1 \Rightarrow 2k+1 \mid (k+1)^2-(k+1)-1 \Rightarrow 2k+1 \mid k^2+k-1 \Rightarrow 2k+1 \mid 4k^2+4k-4 \Rightarrow 2k+1 \mid (2k+1)^2-5 \Rightarrow 2k+1 \mid 5 \Rightarrow k \in \{1, 5\}$. Se verifică direct că numai $n=5$ satisface cerinţele problemei.

VIII.20. *Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu O' centrul feţei $A'B'C'D'$. Calculaţi tangenta unghiului dintre BO' şi $A'D$.*

Cristiana Constanda, elevă, Iaşi

Soluţie. „Dublând cubul” ca în figură se obţine paralelipipedul $EFCDE'F'C'D'$, în care $F'B \| A'D$ (ambele paralele cu $E'A$). Observăm că $\sphericalangle(A'D, O'B) = \sphericalangle(F'B, O'B) = \sphericalangle F'BO' = \alpha$. Pentru laturile triunghiului $F'BO'$ avem: $F'B = a\sqrt{2}$, $O'B = \sqrt{O'B'^2+B'B^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ şi $O'F' = \sqrt{O'P^2+F'P^2} = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$ (unde p este mijlocul muchiei $B'C'$).

Aplicând teorema cosinusului în $\Delta F'BO'$, obţinem: $\dfrac{10a^2}{4} = 2a^2 + \dfrac{6a^2}{4} - 2\, a\sqrt{2}\, \dfrac{a\sqrt{6}}{2}\cos\alpha$, de unde $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$. Ca urmare, $\sin\alpha = \sqrt{1-\dfrac{3}{36}} = \dfrac{\sqrt{33}}{6}$ şi deci $\text{tg}\alpha = \sqrt{11}$.



IX.16. *În ipoteza că ecuația cu coeficienți reali* $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ *are rădăcinile* x_1, x_2, x_3 *reale, să se demonstreze echivalența:*

$$x_i > 0,\ i = 1, 2, 3,\ \Leftrightarrow\ a < 0,\ b > 0,\ c < 0,\ ab < c.$$

Adrian Corduneanu, Iași

Soluție. Conform relațiilor lui Viète, avem:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a,\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b,\ x_1x_2x_3 = -c \qquad (1)$$

Ecuația din enunț se poate scrie și sub forma $(x^2 + b)(x + a) = ab - c$ (2).

Dacă $x_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, atunci din (1) rezultă că $a < 0$, $b \geq 0$ și $c < 0$. Tot din (1) se poate deduce că $x_1 + a = -(x_2 + x_3) < 0$. De aici și din egalitatea obținută punând x_1 în locul lui x în (2) deducem că $ab - c < 0$.

Reciproc, să presupunem că sunt îndeplinite condițiile din enunț privind coeficienții. Din (1) avem $x_1x_2x_3 = -c > 0$ și atunci nu toate numerele x_1, x_2, x_3 pot fi negative. Fie $x_1 > 0$; rezultă că are loc și $x_2x_3 > 0$ (3). Pe de altă parte, din $ab < c$ și din (2) cu x_1 în locul lui x, se obține că $x_1 + a < 0$. Însă $x_1 + a = -(x_2 + x_3)$, deci $x_2 + x_3 > 0$ (4). Din (3) și (4) decurge că $x_2 > 0$ și $x_3 > 0$.

IX.17. *Arătați că ecuația* $\{x^2\} + \{y^2\} = \{z^2\}$ *are o infinitate de soluții în* **Q** \ **Z** ({a} *reprezintă partea fracționară a numărului real a*).

R. Bărbulescu și M.B. Ion, elevi, Lucian Tuțescu, prof. , Craiova

Soluție (dată de un grup de elevi din Brașov). Scriem egalitatea $3^2 + 4^2 = 5^2$ sub forma: $\left(\frac{3}{7^n}\right)^2 + \left(\frac{4}{7^n}\right)^2 = \left(\frac{5}{7^n}\right)^2$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Deoarece: $\left\{\left(\frac{3}{7^n}\right)^2\right\} = \left(\frac{3}{7^n}\right)^2$, $\left\{\left(\frac{4}{7^n}\right)^2\right\} = \left(\frac{4}{7^n}\right)^2$, $\left\{\left(\frac{5}{7^n}\right)^2\right\} = \left(\frac{5}{7^n}\right)^2$, $\forall n \in N^*$,

urmează că tripleta $(x, y, z) = \left(\frac{3}{7^n}, \frac{4}{7^n}, \frac{5}{7^n}\right)$ este o soluție a ecuației din enunț $\forall n \in N^*$.

IX.18. *Determinați funcțiile* $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *pentru care avem:* $f(x^3 + 3x^2 + 3x) \leq x \leq f^3(x) + 3f^2(x) + 3f(x)$ $\forall x \in \mathbf{R}$. *Generalizare.*

Gabriel Popa, Iași

Soluție. Vom rezolva direct următoarea problemă mai generală:

Dacă $\varphi\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *este o funcție surjectivă și strict crescătoare, să se determine funcțiile* $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *pentru care:* $f(\varphi(x)) \leq x \leq \varphi(f(x))$, $\forall x \in \mathbf{R}$. (1)

Din ipoteză, φ este inversabilă și avem $\varphi(x) = t \Leftrightarrow x = \varphi^{-1}(t)$ Atunci, ținând seama și de monotonia lui φ, au loc:

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(\varphi(x)) \le x, \ \forall x \in \mathbf{R} \\ x \le \varphi(f(x)), \ \forall x \in \mathbf{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) \le \varphi^{-1}(t), \ \forall t \in \mathbf{R} \\ \varphi^{-1}(x) \le f(x), \ \forall x \in \mathbf{R} \end{cases} \Leftrightarrow f(x) \le \varphi^{-1}(x) \le f(x), \ \forall x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow f = \varphi^{-1}$.

În cazul particular considerat, $\varphi(x) = x^3 + 3x^2 + 3x = (x+1)^3 - 1$ şi este evident strict crescătoare şi surjectivă, deci $f(x) = \varphi^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1} - 1, \ \forall x \in \mathbf{R}$.

IX.19. *Arătaţi că în orice triunghi are loc inegalitatea:* $(a^8 + b^8 + c^8 + 3) R^4 \ge 8r^2a^2b^2c^2$.

Mihai Bogdan Ion, elev, Craiova

Soluţie. Se ştie că în orice triunghi au loc $R \ge 2r$ şi $a^4 + b^4 + c^4 \ge 16S^2$, cu egalitate pentru triunghiul echilateral. Atunci:

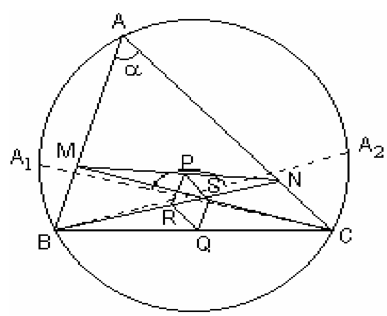
$$(a^8 + b^8 + c^8 + 3)R^4 = 2\left(\frac{a^8+1}{2} + \frac{b^8+1}{2} + \frac{c^8+1}{2}\right)R^4 \ge 2\left(\sqrt{a^8} + \sqrt{b^8} + \sqrt{c^8}\right)R^4 =$$

$$= 2(a^4 + b^4 + c^4)R^4 \ge 2 \cdot 16S^2 \cdot R^4 \ge 2 \cdot \frac{a^2b^2c^2}{R^2} \cdot R^2 \cdot 4r^2 = 8r^2a^2b^2c^2.$$

IX.20. *Pe laturile AB şi AC ale tringhiului ABC se consideră punctele M, respectiv N, astfel încât BM ≡ CN = k (constant). Dacă B şi C sunt fixe şi* $m(\hat{A})$ *este constantă, să se afle locul geometric al mijlocului segmentului MN.*

Cătălin Calistru, Iaşi

Soluţie. Fie P, Q, R, S respectiv mijloacele segmentelor $[MN]$, $[BC]$, $[BN]$, $[CM]$. Laturile patrulaterului $PRQS$ sunt linii mijlocii în triunghiurile NMB, BNC, CMB, respectiv MNC şi cum $BM \equiv CN = k$, rezultă că $PRQS$ este romb de latură $\frac{k}{2}$. În plus, unghiurile acestui romb au măsuri constante (α, respctiv π-α), deci indiferent de poziţia punctului A, diagonala PQ a rombului are lungime constantă $QP = k \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$. Cum Q este fix, rezultă că P descrie



un arc de cerc de centru Q şi rază $r = k \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$, delimitat de dreptele CA_1 şi CA_2 corespunzătoare poziţiilor limită ale punctului A pe arcul capabil de unghi α ($BA \ge k$, $CA \ge k$). Dacă A descrie arcul simetric din semiplanul inferior, P parcurge un alt arc de cerc, simetricul primului faţă de BC.

Clasa a X-a

X.16. *Să se determine numărul funcţiilor* $f : \{1,2,\ldots n\} \to \{-1,1\}$ *cu proprietatea că* $\sum_{i=1}^{n} f(i) = k, \ k, n \in \mathbf{N}, \ n \ge 2, \ k < n$.

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. Fie $X \subset \{1,2,...,n\}$ mulţimea acelor elemente a căror imagine prin *f* este –1. Evident că $X \neq \varnothing$, altfel $\sum_{i=1}^{n} f(i) = n > k$. Notăm $x = \text{card}\, X$. Atunci

$$k = \sum_{i=1}^{n} f(i) = \sum_{i \in X} f(i) + \sum_{j \notin X} f(j) = -x + (n-x) \Rightarrow 2x = n-k \Rightarrow x = \frac{n-k}{2}.$$

Dacă *n* şi *k* au parităţi diferite, nu există funcţii ca în enunţ. Pentru *n* şi *k* de aceeaşi paritate, funcţiile căutate sunt bine determinate de submulţimea *X*; numărul lor va fi deci egal cu numărul submulţimilor cu $\frac{n-k}{2}$ elemente ale mulţimii $\{1,2,...,n\}$, adică $C_n^{\frac{n-k}{2}}$.

X.17. *Fie* $f : \mathbf{R} \to (0,\infty)$ *definită prin* :

$$f(x) = \begin{cases} a^x, & x \in \mathbf{Q} \\ b^x, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases} \qquad a,b \in \mathbf{N} \setminus \{0,1\},\ a \neq b.$$

Notăm cu $\boldsymbol{M}_{a,b}$ *mulţimea acestor funcţii şi cu* $\boldsymbol{I} = \{ f \in \boldsymbol{M}_{a,b} \mid f$ *injectivă* $\}$, $\boldsymbol{S} = \{ f \in \boldsymbol{M}_{a,b} \mid f$ *surjectivă* $\}$.

1) $\boldsymbol{I} \neq \varnothing$, $\boldsymbol{S} \neq \varnothing$ *şi* $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{S}$.

2) *dacă* $(a, b) = 1$, *atunci f nu-i nici injectivă şi nici surjectivă.*

3) *este adevarată reciproca afirmaţiei de la punctual* ***2)****?*

Dumitru Gherman, Paşcani

Soluţie. Vom demonstra că *f* surjectivă $\Leftrightarrow$ *f* injectivă $\Leftrightarrow \exists r \in \mathbf{Q}^*$ astfel încât $b = a^r$.

a) *f surjectivă* $\Rightarrow$ *f injectivă.* Într-adevăr, să presupunem prin absurd că *f* nu este injectivă; atunci $\exists x_1 \in \mathbf{Q}$, şi $\exists x_2 \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ astfel încât $f(x_1) = f(x_2)$, de unde $a^{x_1} = b^{x_2}$, adică $x_1 = x_2 \log_a b$, deci $\log_a b \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, prin urmare ecuaţia $f(x) = b$ nu are soluţie, ceea ce contrazice faptul că *f* este surjectivă.

b) *f injectivă* $\Rightarrow \exists r \in \mathbf{Q}^*$ *astfel încât* $b = a^r$. Vom proceda tot prin reducere la absurd; presupunem că $b \neq a^r, \forall r \in \mathbf{Q}^*$. Atunci $\log_b a \notin \mathbf{Q}$ şi, ca urmare, $f(\log_b a) = b^{\log_b a} = a = f(1)$. Cum *f* injectivă, urmează că $\log_b a = 1$, imposibil.

c) $\exists r \in \mathbf{Q}^*$ *astfel încât* $b = a^r \Rightarrow$ *f surjectivă.* Pentru $y \in (0,\infty)$, considerăm ecuaţia $f(x) = y$. Dacă $\log_a y \in \mathbf{Q}$, atunci $x_1 = \log_a y$ este soluţie a acestei ecuaţii; în caz contrar, $x = \frac{1}{r}\log_a y \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ este soluţie a ecuaţiei.

Acum cerinţele problemei sunt imediate. Pentru *a*=2, *b*=4, avem $f \in \boldsymbol{I}$ iar $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{S}$ conform primei echivalenţe dovedite. Punctul **2)** rezultă din ultima echivalenţă, iar reciproca sa este falsă: de exemplu, $f \notin \boldsymbol{I}$ pentru *a*=2 şi *b*=6, însă $(2,6) \neq 1$.

X.18. *Fie ABCD un patrulater convex, orientat pozitiv, ale cărui vârfuri au afixele a,* b, c, d *.Să se arate că ABCD este pătrat dacă şi numai dacă* $d-a=i(b-a)$ *şi* $a+c=b+d$*.*

Adrian Corduneanu, Iaşi

Soluție. Prin translația $z \to z - a$, obținem patrulaterul $A'B'C'D'$ congruent cu *ABCD*, unde $A'(0)$, $B'(b-a)$, $C'(c-a)$, $D'(d-a)$. Avem: *ABCD* pătrat $\Leftrightarrow$ $A'B'C'D'$ pătrat $\Leftrightarrow$ $A'B'C'D'$ paralelogram şi OD' se obține din OB' printr-o rotație de unghi $\frac{\pi}{2}$ în sens direct $\Leftrightarrow$ $c-a=(b-a)+(d-a)$. şi $d-a=i(b-a)$ $\Leftrightarrow$ $a+c=b+d$ şi. $d-a=i(b-a)$.

X.19. *Fie x, y, z, a, b, c* $\in$ **C.** *Notăm α = xa + yb + zc, β = xb + yc + za şi γ = xc + ya + zb. Să se arate că dacă numerele complexe α, β, γ sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral, atunci cel puțin unul din tripletele* (*x, y, z*) *şi* (*a, b, c*) *reprezintă afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.*

Constantin Cocea, Iaşi

Soluție. Concluzia problemei se obține imediat folosind următoarele observații :

(i) *u, w, z* sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral dacă şi numai dacă $u^2 + w^2 + z^2 - uw - uz - wz = 0$;

(ii) Are loc relația (ce se poate verifica printr-un calcul de rutină):

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=\left(x^2+y^2+z^2+xy+xy+yz\right)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac\right).$$

X.20. *Stabiliți natura triunghiului în care au loc simultan relațiile:*

$2^{\cos A+\cos B-1}=2^{2\cos A}+2,\ \ 2^{\cos B+\cos C+1}=2^{2\cos B}+2,\ \ 2^{\cos C+\cos A+1}=2^{2\cos C}+2.$

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

Soluție. Cu notațiile $x=2^{\cos A}$, $y=2^{\cos B}$ şi $z=2^{\cos C}$, ipoteza problemei se scrie $2xy=x^2+2$, $2yz=y^2+2$, $2zx=z^2+2$. Avem: $2xy\le x^2+y^2$ şi analoagele şi atunci se obține că $2\le y^2, 2\le z^2, 2\le x^2$. Deci, $1\le 2\cos B$, $1\le 2\cos C$, $1\le 2\cos A$, de unde m($\hat{A}$)≤60°, m($\hat{B}$)≤60°, m($\hat{C}$)≤60°. Deoarece m($\hat{A}$) + m($\hat{B}$) + m($\hat{C}$) = 180°, inegalitățile precedente se transformă în egalități, adică triunghiul *ABC* este echilateral.

Clasa a XI-a

XI.16. *Fie numerele* $a, b \in$ ***C*** *şi matricele* $A, B \in M_n$ ***(C)*** *astfel încât* $aAB+bBA=I_n$, I_n *fiind matricea unitate de ordin* $n\ge 1$. *Să se demonstreze că* $\det(AB-BA)=0$ *sau există* $\omega\in U_n=\{z\in C \mid z^n=1\}$ *încât* $a+b\omega=0$.

Dan Popescu, Suceava

Soluție. Din ipoteză obținem că $a(AB-BA)+(a+b)BA=I_n$, deci are loc egalitatea $a(AB-BA)=I_n-(a+b)BA$. Analog $-b(AB-BA)=I_n-(a+b)AB$. Pe de altă parte, $\det(I_n-tAB)=\det(I_n-tBA)$ $\forall t\in$ **C**, căci matricele *AB* şi *BA* au acelaşi polinom caracteristic. Rezultă că $\det(a(AB-BA))=\det((-b)(AB-BA))$. Presupunând că $\det(AB-BA)\ne 0$, urmează că $a^n = (-b)^n$, relație care împreună cu ipoteza asigură că $ab \neq 0$ (deci $b \neq 0$) şi atunci $(-a/b)^n = 1$, ceea ce încheie demonstrația.

XI.17. *Fie* $0 < x_1 < x_2$ *şi* $\alpha, \beta \in (0,1)$. *Să se arate că şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *dat de* $x_{2n+1} = x_{2n-1}^{\alpha} x_{2n}^{1-\alpha}$, $x_{2n+2} = x_{2n}^{\beta} x_{2n-1}^{1-\beta}$, $n \geq 1$, *este convergent.*

Gheorghe Costovici, Iaşi

Soluție. Pornind de la observația că $0 < x_1 < x_3 < x_4 < x_2$, se arată prin inducție matematică faptul că $0 < x_{2n-1} < x_{2n+1} < x_{2n+2} < x_{2n}$, $\forall n \geq 1$. Atunci subşirul $(x_{2n-1})_{n\geq 1}$ este crescător şi mărginit superior de x_2 ,deci este convergent la l_1, subşirul $(x_{2n})_{n\geq 1}$ este descrescător şi mărginit inferior de x_1, deci este convergent la l_2 şi în plus $l_1 \leq l_2$. Trecând la limită în relațiile de recurență, obținem că $l_1 = l_1^{\alpha} l_2^{1-\alpha}$, deci $l_1^{1-\alpha} = l_2^{1-\alpha}$, adică $l_1 = l_2$, aşadar $(x_n)_{n\geq 1}$ este un şir convergent.

XI.18. *Să se demonstreze inegalitatea* $\displaystyle\sum_{k=1}^{99} e^{\arcsin(k/100)} > \frac{1999 \cdot 99}{\pi^7}$.

Lucian-Georges Lăduncă, Iaşi

Soluție. Plecând de la inegalitatea cunoscută $\sin x < x, x \in (0,1]$ şi folosind monotonia funcției arcsin, rezultă că $x < \arcsin x$, $x \in (0,1)$, de unde $e^{\arcsin x} > e^x$, $x \in (0,1]$. Pe de altă parte, se arată imediat că $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$, $\forall x > 0$, deci $e^{\arcsin x} > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$, $\forall x \in (0,1)$. Facem, pe rând, $x = 1/100, 2/100, \ldots, 99/100$ şi sumăm inegalitățile obținute. Se deduce că $\displaystyle\sum_{k=1}^{99} e^{\arcsin(k/100)} > 99 + \frac{1}{100}\sum_{k=1}^{99} k + \frac{1}{2\cdot 100^2}\sum_{k=1}^{99} k^2 = \frac{99\cdot 1999}{1200} > \frac{99\cdot 1999}{\pi^7}$.

XI.19. *Determinați funcțiile* $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *continue în* $x_0 = 1$ *şi care verifică relația:*

$$f(a^2x - a^2 + 1) - 2f(ax - a + 1) + f(x) = (a-1)^2(x-1),\ \forall x \in \mathbf{R},$$

unde a>1 este un număr real dat.

Dumitru - Dominic Bucescu, Iaşi

Soluție. Cu substituția $x - 1 = t$, ecuația funcțională dată devine:

$$f(a^2t + 1) - 2f(at + 1) + f(t) = (a-1)^2 t,\quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad (1)$$

Evident că funcția identică $1_{\mathbf{R}}$ verifică (1); fie f o altă soluție. Avem $(f - 1_{\mathbf{R}})(a^2t + 1) - 2(f - 1_{\mathbf{R}})(at + 1) + (f - 1_{\mathbf{R}})(t) = 0,\ \forall t \in \mathbf{R}$, echivalent cu $g(a^2t) - 2g(at) + g(t) = 0\ \forall t \in \mathbf{R}$, unde funcția $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(t) = (f - 1_{\mathbf{R}})(t+1)$ este continuă în $t_0 = 0$. Definim $h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(t) = g(at) - g(t)$, funcție continuă în $t_0 = 0$, cu proprietățile: $h(0) = 0$, $h(at) - h(t) = 0$, $\forall t \in \mathbf{R}$. Inductiv, obținem

$$h(t)=h\left(\frac{1}{a}t\right)=h\left(\frac{1}{a^2}t\right)=\ldots h\left(\frac{1}{a^n}t\right)\ ,\ \forall t\in\mathbf{R},\ \forall t\in\mathbf{N}^*$$

şi făcând $n\to\infty$, rezultă că $h(t)=\lim_{n\to\infty} h\left(\frac{1}{a^n}t\right)=h\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^n}t\right)=h(0)=0$, $\forall t\in\mathbf{R}$, deci

$g(at)-g(t)=0$, $\forall t\in\mathbf{R}$. Reluând raționamentul anterior obținem că $g(t)=g\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^n}t\right)=$ $=h(0)=c$, deci $g=1_{\mathbf{R}}+c\ \ (c\in\mathbf{R})$. Reciproc, aceste funcții verifică evident relația (1).

XI.20. *Într-un plan dat se consideră punctele fixe A, A' şi punctul mobil P. Se notează cu P' proiecția punctului P pe mediatoarea segmentului A A' şi cu P" simetricul lui P față de dreapta A A'. Să se afle locul geometric al punctului P ştiind că dreapta P'P" este paralelă cu dreapta lui Euler a triunghiului PAA'.*

Paraschiva Bîrsan, Iaşi

Soluție. Fie $\{G\}=PO\cap P'P''$, unde *O* este mijlocul lui *AA'*. Din $\Delta OGP'\sim\Delta PGP''$, obținem $\frac{OG}{GP}=\frac{OP'}{PP''}=\frac{1}{2}$, deci *G* este centrul de greutate al $\Delta PAA'$. Cum dreapta lui Euler conține punctul G, rezultă din ipoteză că aceasta esta chiar *P'P"*. Deoarece centrul cercului circumscris Δ AA' P este intersecția dreptei lui Euler cu o mediatoare, urmează că *P'* este punctul din plan egal depărtat de *P, A, A'*. Atunci $P'P^2=P'A^2=P'O^2+OA^2$. Raportând planul la un reper ortogonal cu originea în *O* şi având pe *AA'* drept axă a absciselor, fie (x,y) coordonatele lui *P*. Relația precedentă conduce la $x^2-y^2=a^2$, unde *AA'*=*a*. Deci locul geometric al punctului *P* este hiperbola echilateră de semiaxe a şi având ca axe de simetrie dreptele AA' şi mediatoarea segmentului $[AA']$.

Clasa a XII-a

XII.16. *Cercetați dacă există funcții continue* $f:\mathbf{R}^*\to\mathbf{R}^*$ *pentru care*

$$F(2x+1/x)=2F(x)\cdot F(1/x),\ \forall x\in R^*,$$

unde F este o primitivă a funcției f.

Gabriel Popa, Iaşi

Soluție. Pentru început, să observăm că relația din enunț are sens, întrucât $2x+1/x\neq 0\ \ \forall x\in\mathbf{R}^*$, adică putem defini $F(2x+1/x)$. Cum *F* este derivabilă, derivând membru cu membru relația dată, se obține: $(2-1/x^2)f(2x+1/x)=$ $=2f(x)F(1/x)-(2/x^2)F(x)\cdot f(1/x),\forall x\in R^*$. Luând în această egalitatea $x=1\in\mathbf{R}^*$, obținem că $f(3)=0\notin\operatorname{Im} f$, deci nu există funcții f cu proprietățile cerute.

XII.17. *Dacă funcția* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^*$ *este continuă, impară şi periodică de perioadă principală T, calculați* $I=\int_0^T f(f(x)+kx)dx,\ k\in\mathbf{Z}$.

Dumitru Gherman, Paşcani

Soluție. Cu schimbarea de variabilă $x=T-u$ obținem:

$$I=-\int_T^0 f(f(T-u)+k(T-u))du=\int_0^T f(f(-u)-ku+kT)du=\int_0^T f(-f(u)-ku)du=$$

$$=-\int_0^T f(f(u)+ku)du=-I \Rightarrow I=0 .$$

XII.18. *Calculați* $I=\int \frac{x^{2000}}{x^{2668}+1}dx$ *și* $J=\int \frac{x^{666}}{x^{2668}+1}dx$, $x\in(0,\infty)$.

Lucian-Georges Lăduncă, Iași

Soluție.

$$I+J=\int \frac{x^{2000}+x^{666}}{x^{2668}+1}dx=\int \frac{x^{666}+1/x^{668}}{x^{1334}+1/x^{1334}}dx=\frac{1}{667}\int \frac{\left(x^{667}-1/x^{667}\right)'}{\left(x^{667}-1/x^{667}\right)^2+2}dx=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{1334}\operatorname{arctg}\frac{x^{667}-1/x^{667}}{\sqrt{2}}+C .$$

$$I-J=...=\frac{1}{667}\int \frac{\left(x^{667}+1/x^{667}\right)'}{\left(x^{667}+1/x^{667}\right)^2-2}dx=\frac{\sqrt{2}}{2668}\ln\frac{x^{667}+1/x^{667}-\sqrt{2}}{x^{667}+1/x^{667}+\sqrt{2}}+C .$$

Formând un sistem din relațiile obținute, aflăm valorile lui *I* și *J*.

XII.19. *Dacă* $T>0$ *este perioadă pentru funcția continuă* $f:[0,\infty)\to \mathbf{R}$ *și* $g:[0,T]\to \mathbf{R}$ *este continuă, să se demonstreze relația:*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T g(x)f(nx)dx=\frac{1}{T}\left(\int_0^T f(x)dx\right)\cdot\left(\int_0^T g(x)dx\right).$$

Dan Popescu, Suceava

Soluție. A se vedea nota **D. Popescu și F. Popovici** – *O generalizare a lemei lui Riemann* , în acest număr al revistei, p.12.

XII.20. *Fie* $(G,\cdot)$ *un grup comutativ de ordin n. Să se arate că:* $(\prod_{i=1}^{n-1}a_i)^{n-2}=$ $(\prod_{i=1}^{n-1}a_i)^{n+2}=$ $=e$, *unde* $e,a_1,a_2,\dots a_{n-1}$ *sunt elementele grupului G, e- elementul neutru.*

Cristian Frăsinaru, Iași

Soluție. Deoarece $|G|=n$, rezultă că $a_i^n=e,\forall i=\overline{1,n-1}$ (fie din teorema lui Lagrange, fie cf. pb. R-4, cap.III, §3 din manualul în vigoare – în cazul comutativ), deci $(\prod_{i=1}^{n-1}a_i)^n=e$ (1). Aplicația $f:G\to G$, $f(x)=x^{-1},\forall x\in G$, este injectivă și cum *G* este finit, rezultă că *f* este bijectivă. Atunci: $\{e,a_1,...,a_{n-1}\}=G=\{e^{-1},a_1^{-1},...,a_{n-1}^{-1}\}$ și deci are loc egalitatea $e\cdot a_1\cdot....\cdot a_{n-1}=e^{-1}\cdot a_1^{-1}\cdot...\cdot a_{n-1}^{-1}$, ceea ce implică $(\prod_{i=1}^{n-1}a_i)^2=e$ (2). Din (1) și (2), concluzia problemei urmează imediat.