ARTICOLE ŞI NOTE

Strofoida – câteva proprietăţi elementare

Temistocle BÎRSAN[1]

Abstract. In this note, some elementary properties of the strophoid are given. The whole content is accessible to highschool students and section 1 can be understood by junior highschool students as well.

Keywords: strophoid, ellipse, hyperbola, parabola.

MSC 2000: 53A04.

Scopul propus este de a prezenta, în limitele cunoştinţelor de geometrie dobândite în cursul şcolii, începând cu cele din clasa a VI-a, câteva proprietăţi ale strofoidei. În mod necesar, selecţia acestora a fost severă, dar sperăm că faptele reţinute sunt suficiente pentru introducerea cititorului în universul fascinant al strofoidei.

Nume ilustre sunt legate de studiul acestei curbe: *E. Torricelli* (1645), *G.P. Roberval* (1645), *I. Barrow* (1970), *Jean Bernoulli, A.L.J. Quételet* (1910) ş.a. Denumirea de strofoidă i-a fost dată de *E. Montucci* în 1846 ($\sigma\tau\rho o\varphi o\varsigma$ (strophos)=cordon/sfoară răsucit(ă), $\varepsilon\iota\delta o\varsigma$ (eidos)=aspect). Alte denumiri: pteroides torricellana, logociclica, focala lui Quételet.

1. Fie date un punct A şi o dreaptă Δ care nu-l conţine. Fie O proiecţia punctului A pe Δ. O dreaptă variabilă d ce trece prin A intersectează Δ în P. Vom numi *strofoidă* locul geometric al punctelor S şi S' situate pe d şi verificând condiţia $PS = PS' = PO$. Punctul A se va numi *vârful* strofoidei, O-*centrul* său, iar Δ-*axa* sa (fig. 1). Când d variază astfel încât P parcurge axa Δ de sus în jos, punctul S descrie ramura de strofoidă indicată de săgeţile pline, iar S' descrie ramura indicată de săgeţile întrerupte; S se îndreaptă către A, iar S' porneşte din A (vom stabili riguros forma curbei în secţiunea **2**).

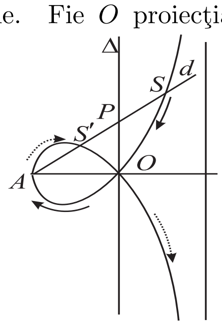

Fig. 1

Evident, condiţia $PS = PS' = PO$ implică faptul că O, S, S' se află pe cercul cu centrul în P şi tangent la OA. Ca urmare, are loc

Propoziţia 1. *Strofoida este locul geometric al intersecţiilor cercurilor tangente în O la OA cu diametrii lor care trec prin vârful A.*

Vom utiliza mai jos notaţiile $\mathcal{C}_A$ şi $\mathcal{C}_O$ pentru cercurile $\mathcal{C}(A, AO)$ şi $\mathcal{C}(O, OA)$. O nouă caracterizare a strofoidei va decurge imediat din lema următoare (demonstraţia căreia utilizează relaţia între unghiurile cu laturile perpendiculare):

Lemă. *Fie M intersecţia perpendicularelor în A pe AS şi în O pe OS. Atunci, S satisface condiţia $PS = PO$ dacă şi numai dacă $M \in \mathcal{C}_A$. Afirmaţie similară relativă la punctele S' şi M' (fig. 2).*

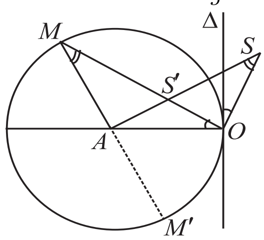

Fig. 2

[1]Prof. dr., Catedra de matematică, Univ. Tehnică "Gh. Asachi", Iaşi

Propoziţia 2. *Strofoida este locul punctelor S cu proprietatea că perpendicularele în A şi O pe dreptele AS şi respectiv OS se intersectează pe $\mathcal{C}_A$.*

Propoziţia 3. *Strofoida (de vârf A şi centru O) este locul ortocentrelor H ale triunghiurilor MAO, unde M este un punct mobil pe $\mathcal{C}_O$.*

Demonstraţie. Dacă $M \in \mathcal{C}_O$ şi H este ortocentrul triunghiului MAO, atunci OL este axă de simetrie a triunghiului isoscel OAM şi avem $\widehat{AHL} \equiv \widehat{MHL}$. Rezultă că $\widehat{PHO} \equiv \widehat{POH}$ sau $PH \equiv PO$, adică H este pe strofoidă.

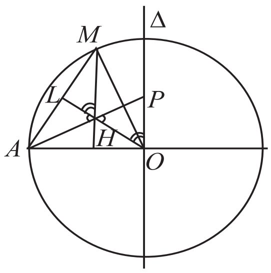

Fig. 3

Invers, dacă H este un punct pe strofoidă (pe arcul superior al buclei în fig. 3), notăm cu M intersecţia paralelei prin H la axa Δ a strofoidei. Se arată, pe cale inversă, că $PH \equiv HO$ implică $\widehat{AHL} \equiv \widehat{MHL}$ şi apoi că $\triangle AHO \equiv \triangle MHO$ (cazul LLU!) şi se obţine că $OL \perp AM$. Cum şi $MH \perp AO$ (prin construcţia punctului M), rezultă că H este ortocentru în $\triangle MAO$, ceea ce încheie demonstraţia.

Propoziţia 4. *Dreptele Δ şi Δ' trec prin punctele O şi respectiv A şi sunt perpendiculare pe AO. Fie $M \in \Delta$ mobil şi $N = pr_{\Delta'}M$. Locul geometric al simetricelor punctelor N faţă de dreapta AM este strofoida de vârf A şi centru O.*

Demonstraţie. Fie $\{P\} = AS \cap OM$ (fig. 4). Dacă S se obţine din M ca în enunţ, atunci triunghiurile ANS şi PAM sunt isoscele şi avem $AS = AN = MO$ şi $AP = MP$. Deci $PS = AS - AP = MO - MP = PO$, adică $PS = PO$ şi punctul P aparţine strofoidei.

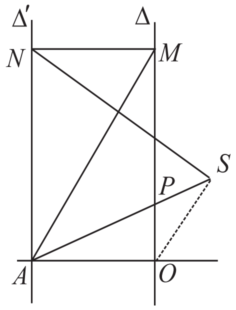

Fig. 4

Invers, dacă S este pe strofoidă, fie M punctul obţinut intersectând Δ cu paralela prin A la OS. Din $PS = PO$ şi $\triangle PSO \sim \triangle PAM$ deducem $AP = MP$ şi apoi $AS = OM$. Dacă $N = \mathrm{pr}_{\Delta'}M$, urmează că triunghiul ANS este isoscel. Din $AM \| OS$ şi $\Delta \| \Delta'$ rezultă uşor că (AM este bisectoarea unghiului $\widehat{NAS}$, deci şi mediatoarea segmentului $[NS]$, adică S este simetricul lui N faţă de AM şi demonstraţia este completă.

Cititorul va putea rezolva, cu mijloacele la fel de elementare, problemele:

Problema 1. *Fie date punctele A şi O şi fie Δ, Δ' perpendicularele în O şi respectiv A pe AO. Se consideră un punct $M \in \Delta'$ mobil şi fie S punctul în care dreapta OM retaie cercul de centru A ce trece prin M. Arătaţi că locul punctului S este strofoida de vârf A şi centru O.*

Problema 2. *Fie B punctul diametral opus lui A în cercul $\mathcal{C}_O$ şi $M \in \mathcal{C}_O$ mobil. Arătaţi că strofoida de vârf A şi centru O este locul punctelor S de intersecţie a perpendicularei prin M pe AO cu paralela prin O la MB.*

Problema 3. *Arătaţi că, dacă M este un punct mobil pe $\mathcal{C}_O$, atunci locul centrului cercului înscris în triunghiul MAO este bucla strofoidei de vârf O şi centru A.*

2. Unele proprietăţi ale strofoidei necesită cunoştinţe de geometrie mai avansate. Vom prezenta câteva dintre acestea, cu grija de a rămâne în limitele programelor.

Propoziţie 5. *Transformata strofoidei prin inversiune faţă de cercul $\mathcal{C}_A$ este curba însăşi.*

Demonstraţie. Să arătăm că punctele S şi S' (fig. 1) sunt inverse în raport cu $\mathcal{C}_A$. Într-adevăr, punctele A, S şi S' sunt coliniare şi avem $AS \cdot AS' = (AP + PS) \cdot (AP - PS') = (AP + PO) \cdot (AP - PO) = AP^2 - PO^2 = AO^2$, deci $AS \cdot AS' = AO^2$.

În continuare, vom abandona abordarea sintetică a problemelor, preferând utilizarea metodei coordonatelor. Vom lua originea axelor de coordonate în punctul O-centrul strofoidei (fig.1), dreapta AO cu sensul de parcurs de la A la O ca axă a x-lor şi Δ ca axă a y-lor. Considerând $AO = a$, avem $A(-a, 0)$. Ca parametru luăm ordonata t a punctului variabil P, adică $P(0, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Fie $S(x, y)$ pe dreapta $AP : y = \frac{t}{a}(x+a)$. Condiţia $PS = PO$ se scrie $\sqrt{x^2 + (y - t)^2} = |t|$. Sistemul acestor două ecuaţii se mai scrie: $x^2 + y^2 - 2yt = 0$ şi $t = \frac{ay}{x + a}$. Introducând t în prima ecuaţie, obţinem, după câteva calcule simple, ecuaţia carteziană a strofoidei:

$$x(x^2 + y^2) = a(y^2 - x^2) \tag{1}$$

sau, în formă explicită,

$$y = \pm x\sqrt{\frac{a + x}{a - x}}, \quad x \in [-a, a). \tag{2}$$

Pentru ramura strofoidei cu "+" avem: $\lim\limits_{x \to a} y = +\infty$ (dreapta $x = a$ este asimptotă), $y' = \frac{-x^2 + ax + a^2}{(a - x)\sqrt{a^2 - x^2}}$ cu $x_0 = \frac{a}{2}(1 - \sqrt{5})$ singura ei rădăcină în $[-a, a)$ şi tabelul de variaţie

x	$-a$		$\frac{a}{2}(1-\sqrt{5})$		0		a
y'	$-\infty$	$-$	0	$+$	1	$+$	$+\infty$
y	0	$\searrow$	$\approx -0,3a$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Graficul strofoidei este compus din graficul acestei ramuri şi al simetricului său faţă de axa x-lor (fig. 1).

Tangentele în origine la strofoidă sunt bisectoarele axelor de coordonate.

Pentru calculul ariei buclei de strofoidă avem (cu substituţiile $\sqrt{\frac{a + x}{a - x}} = t$ şi $t = \operatorname{tg} u$) succesiv:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &= 2\int_{-a}^{0} |x|\sqrt{\frac{a + x}{a - x}}dx = -8a^2 \int_0^1 \frac{t^2(t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^3}dt = \\ &= 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 u \cos 2u \, du = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) a^2.\end{aligned}$$

Pentru aria domendiului cuprins între strofoidă şi asimptota sa obţinem, în urma unui calcul similar, $\mathcal{A}_2 = \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) a^2$. Aria totală a domeniului mărginit de strofoidă şi asimptota sa este $\mathcal{A}{=}\mathcal{A}_1{+}\mathcal{A}_2{=}4a^2$, adică de patru ori aria pătratului de latură AO.

Intersectând strofoida dată prin (1) cu dreapta $y = tx$ dusă prin nodul ei, obţinem ecuaţiile parametrice:

$$x = a\frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = a\frac{t(1-t^2)}{1+t^2}; \tag{3}$$

tot din (1) se obţine şi ecuaţia polară a strofoidei

$$\rho = -a\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta} \tag{4}$$

$\left(\rho^2{=}x^2{+}y^2{=}a\dfrac{y^2-x^2}{x}{=}a\rho\dfrac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\cos\theta}{=}{-}a\rho\dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}\right)$.

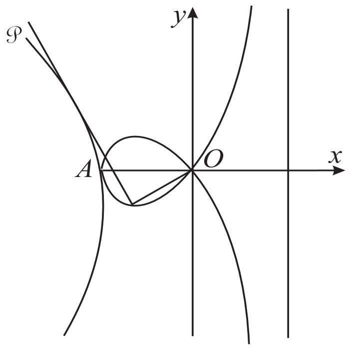

Fig. 5

Proprietăţile următoare indică legături ale strofoidei cu curbele de ordinul doi familiare: parabola, elipsa şi hiperbola.

Propoziţia 6. *Fie $\mathcal{P}$ o parabolă de vârf A şi O intersecţia axei cu directoarea sa. Locul proiecţiilor lui O pe tangentele la $\mathcal{P}$ într-un punct mobil al ei este strofoida de vârf A şi centru O.*

Demonstraţie. Alegem O ca origine, axa parabolei ca axa x-lor şi directoarea ca axă a y-lor. Atunci $\mathcal{P}$ are ecuaţia $y^2 = -4a(x+a)$. Fie $(\alpha,\beta) \in \mathcal{P}$ un punct mobil. Impunând condiţiile din enunţ obţinem ecuaţiile: $\beta^2 = -4a(\alpha+a)$ – punctul $(\alpha,\beta) \in \mathcal{P}$, $\beta y = -2a(x+a+\alpha+a)$ – ecuaţia tangentei în (α,β) şi $y = \dfrac{\beta}{2a}x$ – ecuaţia perpendicularei în O pe tangentă. Eliminăm α şi β din sistemul acestor ecuaţii: $\beta = \dfrac{2ay}{x}$ se introduce în a doua ecuaţie şi se obţine $\alpha + a = -\left(\dfrac{y^2}{x} + x + a\right)$. Înlocuind acestea în prima ecuaţie, vom găsi ca ecuaţie a locului tocmai ecuaţia carteziană (1) a strofoidei.

Observaţie. Date o curbă Γ şi un punct fix A, se numeşte *podara* curbei Γ faţă de *polul* A curba descrisă de proiecţia lui A pe tangenta la Γ într-un punct mobil al ei. Proprietatea perecedentă se poate enunţa astfel: *podara parabolei fată de punctul de intersecţie a directoarei cu axa sa este strofoidă cu centrul în acest punct şi vârful în vârful parabolei.*

Propoziţia 7. *Curba inversă a hiperbolei echilatere de vârfuri O şi A faţă de cercul $\mathcal{C}_O$ este strofoida de vârf A şi centru O.*

Demonstraţie. Cum $A(-a,0)$ (fig. 1), centrul hiperbolei este punctul $\left(-\dfrac{a}{2}, 0\right)$, iar ecuaţia ei este $\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2 - y^2 = \dfrac{a^2}{4}$ sau $x^2 - y^2 + ax = 0$.

Fie $H(\alpha,\beta)$ pe hiperbolă, deci $\alpha^2 - \beta^2 + a\alpha = 0$ (*). Inversul acestui punct, fie el $S(x,y)$, este coliniar cu O şi H şi satisface relaţia $OS \cdot OH = a^2$ (cercul $\mathcal{C}_O$ având raza $OH = a$). Aşadar, avem $y = \dfrac{\beta}{\alpha}x$ şi $(x^2+y^2)(\alpha^2+\beta^2) = a^4$. Rezolvând sistemul acestor două ecuaţii în α şi β, obţinem $\alpha = \dfrac{a^2x}{x^2+y^2}$, $\beta = \dfrac{a^2y}{x^2+y^2}$. Scriind că (α,β) verifică ecuaţia hiperbolei echilatere, adică introducând în (*) aceste expresii, obţinem ecuaţia locului punctului S: $\left(\dfrac{a^2x}{x^2+y^2}\right)^2 - \left(\dfrac{a^2y}{x^2+y^2}\right) + \dfrac{a^3x}{x^2+y^2} = 0$, de unde $x(x^2+y^2) = a(y^2-x^2)$ – strofoida de vârf A şi centru O.

Într-un plan π considerăm punctele A şi O şi dreapta Δ ce trece prin O şi este perpendiculară pe AO. Notăm cu C_Δ cilindrul de rotaţie de axă Δ ce trece prin A.

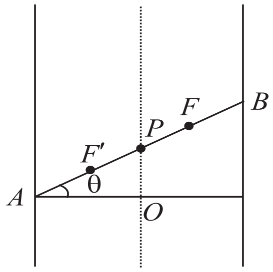

Fig. 6

Propoziţia 8. *Locul focarelor elipselor de secţiune a cilindrului C_Δ cu planele care trec prin A şi sunt perpendiculare pe π este strofoida situată în π şi având vârful A şi centrul O.*

Demonstraţie. Notăm cu θ unghiul pe care-l face un plan oarecare (ce îndeplineşte cerinţele propoziţiei) cu cel al secţiunii circulare. De asemenea, notăm AB axa mare a elipsei de secţiune rezultate, F şi F' focarele şi $P \in \Delta$ centrul ei. Evident, $PF = PF'$ şi rămâne să arătăm că $PO = PF$. În triunghiul dreptunghic OAP avem $PO = a\operatorname{tg}\theta$ şi $AP = \dfrac{a}{\cos\theta}$. Elipsa de secţiune având semiaxele $\dfrac{a}{\cos\theta}$ şi a, rezultă că $PF^2 = \left(\dfrac{a}{\cos\theta}\right)^2 - a^2 = a^2\operatorname{tg}^2\theta$. Ca urmare, $PF = a\operatorname{tg}\theta = PO$, ceea ce încheie demonstraţia.

4. Aducând modificări elementelor "de temelie" ale strofoidei: A (vârful), O (centrul) şi Δ (axa) în privinţa poziţiei sau formei lor, se vor obţine generalizări importante.

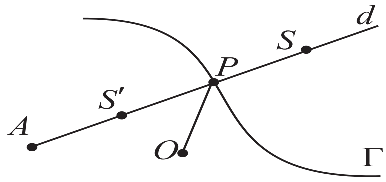

Fig. 7

Fie date o curbă Γ şi două puncte A şi O. Curba *strofoidală* a curbei Γ relativ la punctele A şi O este locul geometric al punctelor S şi S' ale unei drepte variabile d ce trece prin A şi care îndeplinesc condiţia $PS = PS' = PO$, unde P este un punct de intersecţie (altul decât A) al dreptei d cu curba Γ. Dacă Γ este o dreaptă, notată d, $O \in d$ şi $AO \perp d$, vom obţine *strofoida dreaptă* (pe scurt, *strofoida*), curbă la care ne-am referit în secţiunile precedente. Renunţând la condiţia $AO \perp d$, obţinem *strofoida oblică*, cu proprietăţi asemănătoare cu ale strofoidei drepte. Dacă Γ este un cerc, O este centrul său şi A se află pe cerc, se obţine *melcul trisector*. Dacă Γ este o dreaptă, O nu-i aparţine şi A este "la infinit", curba strofoidală corespunzătoare este *hiperbolă*.

Bibliografie

1. **C. Climescu** - *Strofoida* (*Logociclica*), Recreaţii Ştiinţifice, 2(1884), 141-143.
2. **I. Creangă** şi colab. - *Curs de geometrie analitică*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1951.
3. **R. Ferréol** - *Strophoïde droite* (*ou strophoide de Newton*), http://www.mathcurve.com/courbes2d/strophoiddroite/strphoiddroite.shtml.
4. **R. Ferréol** - *Courbe strophoïdale*, http://www.mathcurve.com/courbes2d/strophoidale/strophoidale.shtml.
5. **J. Lemaire** - *Hyperbole équilatère et courbes dérivées*, Vuibert, Paris, 1927.