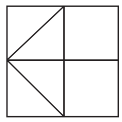
Probleme propuse[1]

Clasele primare

P.196. Mioara aranjează patru mărgele, două albe şi două galbene, una lângă alta, pentru a confecţiona o salbă păpuşii sale. În câte feluri poate aranja Mioara mărgelele?
(*Clasa I*) **Inst. Maria Racu, Iaşi**

P.197. Dan împarte o ciocolată astfel: o linie întreagă de 4 pătrăţele pentru fratele său, o coloană întreagă de 4 pătrăţele pentru sora sa, iar restul pentru sine. Câte pătrăţele de ciocolată i-au revenit lui Dan?
(*Clasa I*) **Maria Ursu, elevă, Iaşi**

P.198. Număraţi figurile geometrice din desenul alăturat şi scrieţi:
a) numărul triunghiurilor;
b) numărul figurilor geometrice care sunt pătrate sau dreptunghiuri.
(*Clasa a II-a*) **Andreea Amarandei, studentă, Iaşi**



P.199. Dacă $a - 15 = 15 - b$, poate fi diferenţa $a - b$ un număr impar?
(*Clasa a II-a*) **Andreea Bîzdîgă, elevă, Iaşi**

P.200. Dintr-un număr de 12 bile, 11 au mase egale, iar una are o masă mai mare decât a celorlalte. Care este cel mai mic număr de cântăriri prin care se poate depista bila cu masa mai mare?
(*Clasa a III-a*) **Ana Cojocaru, Iaşi**

P.201. Diferenţa dintre suma vârstelor a două persoane şi diferenţa lor este 20 de ani. Triplul sumei vârstelor este egal cu de 7 ori diferenţa vârstelor. Care este vârsta fiecărei persoane?
(*Clasa a III-a*) **Valeria Avasîlcei, Iaşi**

P.202. Aflaţi numerele $\overline{ab}$ şi c astfel încât, dacă mărim cifrele a şi b cu câte o unitate, atunci produsul $\overline{ab} \cdot c$ se dublează.
(*Clasa a III-a*) **Amalia Munteanu, elevă, Iaşi**

P.203. Cei doi tigri de la Zoo au suficientă hrană pentru 3 săptămâni. Au mai fost aduşi, însă, încă 5 tigri. Dacă fiecare mănâncă aceeaşi cantitate de hrană pe zi, câte zile le va mai ajunge acum hrana?
(*Clasa a IV-a*) **Inst. Laura Chirilă, Iaşi**

P.204. Aflaţi toate numerele naturale n astfel încât triplul predecesorului lui n nu depăşeşte dublul succesorului lui n.
(*Clasa a IV-a*) **Andreea Simion, elevă, Iaşi**

P.205. Fie S suma a zece numere naturale nenule.
a) Dacă $S = 54$, arătaţi că există cel puţin două numere egale.
b) Aflaţi zece numere naturale distincte pentru care $S = 57$. Câte posibilităţi sunt? Justificaţi!
(*Clasa a IV-a*) **Constanţa Tudorache şi Nelu Tudorache**

[1]Se primesc soluţii până la data de 31 iunie 2011.

Clasa a V-a

V.123. Un spiriduş îi şopteşte Ioanei: ”Pentru a salva lumea de rău, prepară o poţiune din praf de aur şi praf de stele. În camera albastră este un dulap uriaş, cu numeroase rafturi, fiecare conţinând câte 20 de sticluţe numerotate: de la 1 la 20 pe primul raft, de la 21 la 40 pe al doilea etc. Numărul raftului cu sticluţa cu praf de aur este egal cu numărul sticluţei cu praf de stele. Suma dintre numărul sticluţei cu praf de aur şi numărul sticluţei cu praf de stele este 243”. Care sunt numerele sticluţelor pe care trebuie să le aleagă Ioana?

Cristina Timofte, Iaşi

V.124. Arătaţi că numărul $A = 100\left(\frac{7}{1\cdot 2}+\frac{7}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{7}{99\cdot 100}\right)+589\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{587\cdot 589}\right)$ este cel mai mare număr natural de trei cifre distincte.

Anca Chiriţescu, Ţigănaşi (Iaşi)

V.125. Se consideră numărul $a = 1+2+3+\ldots+2010$ şi mulţimea $M = \{n \in \mathbb{N} | na = k^2, k \in \mathbb{N}\}$. Determinaţi cele mai mici cinci elemente ale lui M.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

V.126. Se consideră mulţimea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2010\}$. Scrieţi mulţimea A ca reuniune a trei mulţimi disjuncte două câte două, având acelaşi cardinal şi aceeaşi sumă a elementelor.

Mirela Marin, Iaşi

V.127. Determinaţi numerele naturale A pentru care $A + S(A) = 2010$. (Am notat cu $S(A)$ suma cifrelor numărului A.)

Cătălin Budeanu, Iaşi

V.128. Reconstituiţi o împărţire, ştiind că împărţitorul, câtul şi restul sunt cifre ale deîmpărţitului.

Ioan Săcăleanu, Hârlău

V.129. Fie a, b, c trei numere impare, iar $A = 2^{\frac{a+b}{2}} \cdot 3^{\frac{a+c}{2}} \cdot 5^{\frac{b+c}{2}}$. Ştiind că $30A$ nu este pătrat perfect, arătaţi că măcar unul dintre a, b, c nu este pătrat perfect.

Andrei Nedelcu, Iaşi

Clasa a VI-a

VI.123. Stabiliţi în câte moduri îl putem scrie pe 2010 ca sumă de trei numere naturale nenule, direct proporţionale cu trei numere naturale consecutive.

Mirela Obreja şi Ioan Lungu, Vaslui

VI.124. Într-o duminică, bunica face clătite pentru nepoţi; 40% dintre clătite sunt cu gem, iar restul cu ciocolată. În duminica următoare, bunica face cu 10% mai multe clătite cu gem şi cu 5% mai puţine clătite cu ciocolată. În care dintre duminici a făcut bunica mai multe clătite?

Doru Turbatu, Iaşi

VI.125. Determinaţi restul împărţirii prin 2010 a numărului $A = 1^{2011} + 2^{2011} + \ldots + 2011^{2011}$.

Andrei Paşa, elev, Iaşi

VI.126. Pe tablă sunt scrise numerele $1, 2, 3, \ldots, 2010$. Andrei şterge de pe tablă două numere, înlocuindu-le cu media lor aritmetică şi procedează astfel în mod repetat, până când pe tablă rămâne un singur număr. Este posibil ca acest ultim număr să fie $2009,25$?

Gabriel Popa, Iaşi

VI.127. Considerăm punctele coliniare distincte A, B, C, D şi E astfel încât $AB = b$, $AC = a$, $BD = b - a$ $(2a < b < 3a)$, E este simetricul lui B faţă de D, iar mijlocul segmentului $[AC]$ este punctul E. Aflaţi numerele a şi b, ştiind că $BD = 6$.

Matei Hăvârneanu, elev, Iaşi

VI.128. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $m(\widehat{A}) = 120°$. Perpendiculara în A pe AC intersectează bisectoarea unghiului $\widehat{C}$ în F şi latura BC în E. Paralela prin E la AB taie CF în M şi notăm $\{P\} = AM \cap BC$. Determinaţi măsura unghiului $\widehat{APB}$.

Gabriela Popa, Iaşi

VI.129. Se consideră triunghiul ABC. Determinaţi un punct M pe latura $[AC]$, aflat la egală distanţă de vârful A şi de dreapta BC.

Mihaela Cianga, Iaşi

Clasa a VII-a

VII.123. Determinaţi numerele $\overline{abc}$, scrise în baza 10, pentru care numărul $A = \sqrt{\overline{abc} - \sqrt{\overline{abc} - 28}}$ este natural.

Vasile Chiriac, Bacău

VII.124. Demonstraţi că nu există numere naturale n pentru care numărul $A = \sqrt{n} + \sqrt{n + 2010}$ să fie pătrat perfect.

Neculai Stanciu, Buzău

VII.125. Demonstraţi că numărul $A = 2009 \cdot 2011^{2010} - 2010 \cdot 2011^{2009} + 1$ este divizibil cu 2010^2.

Tamara Culac, Iaşi

VII.126. Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, iar p este semiperimetrul acestuia, demonstraţi că $\dfrac{a}{p-a} + \dfrac{b}{p-b} + \dfrac{c}{p-c} \geq 6$.

Ionel Nechifor, Iaşi

VII.127. Se consideră triunghiul ABC, punctul D pe latura (BC) şi romburile $BDEF$ şi $CDGH$ cu $E, G \in (AD)$, astfel încât A, F şi H sunt de aceeaşi parte a dreptei BC, iar AD separă F şi H. Demonstraţi că dreptele AD, BH şi CF sunt concurente.

Dan Popescu, Suceava

VII.128. Pe latura (AB) a triunghiului ascuţitunghic ABC se consideră punctul M, iar pe segmentul (CM) punctul N, astfel încât $\triangle BNM \sim \triangle CAM$. Demonstraţi că $AN \perp BC$.

Constantin Apostol, Rm. Sărat

VII.129. Se consideră triunghiul ABC cu $BC > AC > AB$ şi punctele D, E pe latura (BC) şi F pe (AC), astfel încât $AB = BD = AF$, iar $AC = CE$. Dreapta

BF intersectează AD şi AE în G, respectiv H. Arătaţi că punctele D, E, G şi H sunt conciclice.

Daniela Brumă, Deleni (Iaşi)

Clasa a VIII-a

VIII.123. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $2x^2 + 2y^2 - 2xy + 2x - 10y + 14 = 0$.

Ionica Marcovschi, Paşcani

VIII.124. Demonstraţi ca numărul

$$A = \frac{(2^4 + 2^2 + 1)(3^4 + 3^2 + 1)\dots(2010^4 + 2010^2 + 1)}{3(2010^2 + 2010 + 1)}$$

este pătrat perfect.

Bianca Maria Filip, elevă, Iaşi

VIII.125. Determinaţi numerele întregi n pentru care

$$\left[\sqrt{n^2 + 3n + 9}\right] = \sqrt{n^2 + 3n + 9}.$$

Ionuţ Stroe, student, Iaşi

VIII.126. Fie $a, b, c, p \in \mathbb{N}^*$ cu a, b, c distincte şi $\sqrt{p} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, iar $A = \{a\sqrt{p}, b\sqrt{p}, c\sqrt{p}\}$. Funcţia $f : A \to \mathbb{N}$ este definită prin $f(x) = x^2 + (2c - a - b)x - b - 1$. Dacă $x, y \in A$, $x < y$, demonstraţi că $f(x) < f(y)$.

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

VIII.127. Determinaţi numerele reale x, y şi z, ştiind că $4(x-1)y^2z^2 + 4(y-1)z^2x^2 + 4(z-1)x^2y^2 = 3x^2y^2z^2$.

Lucian Tuţescu şi Mariana Mărculescu, Craiova

VIII.128. Dacă cercurile înscrise în trei feţe ale unui tetraedru sunt tangente două câte două, atunci cercul înscris în a patra faţă este tangent primelor trei.

Mihàly Bencze, Braşov

VIII.129. Să se arate că din feţele unui cub de muchie l, confecţionat din carton, putem construi, fără resturi, feţele a şase cuburi de muchii $l_1, l, \dots, l_6$ astfel încât $l^2 = l_1^2 + l_2^2 + \dots + l_6^2$.

Petru Asaftei, Iaşi

Clasa a IX-a

IX.111. Let a, b, c be positive real numbers. Prove that $\dfrac{a^2+1}{b+c} + \dfrac{b^2+1}{c+a} + \dfrac{c^2+1}{a+b} \geq 3$.

Pedro H.O. Pantoja, Brazil

IX.112. Arătaţi că pentru fiecare număr natural $n \geq 2$, există numerele naturale $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ astfel încât $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dots + \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{2010}$.

Radu Sava, Iaşi

IX.113. Coardele AB şi CD ale unui cerc de centru O sunt perpendiculare şi se intersectează în P. Dacă E şi F sunt mijloacele segmentelor AC, respectiv BD, arătaţi că $PE = OF$.

Petru Asaftei, Iaşi

IX.114. a) Dacă O este punctul de intersecţie a diagonalelor patrulaterului convex $ABCD$, atunci $AB \| CD$ dacă şi numai dacă $AO^2 + DO^2 + BC^2 = BO^2 + CO^2 + AD^2$.

b) Presupunem că $AB \| CD$ şi notăm cu r_1, r_2 razele cercurilor înscrise în triunghiurile AOD, respectiv BOC şi cu R_1, R_2 razele cercurilor circumscrise acestor triunghiuri. Arătaţi că $AD = BC \Leftrightarrow r_1 = r_2 \Leftrightarrow R_1 = R_2$.

Claudiu Ştefan Popa, Iaşi

IX.115. Trei ceviene concurente împart un triunghi ABC în şase triunghiuri mai mici, având razele cercurilor circumscrise $R_1, R_2, \ldots, R_6$. Dacă $R = R_1 + R_2 + \ldots + R_6$, demonstraţi că măcar două dintre numerele $R_1, R_2, \ldots, R_6$ sunt cel mult egale cu $\frac{1}{6}R$.

Marius Drăgan, Bucureşti

Clasa a X-a

X.111. Rezolvaţi ecuaţia $[\log_{1+|x|}(\sqrt{1+x^2} + |x|)] \cdot [\log_{\sqrt{1+x^2}+|x|}(1 + |x|)] = a$, unde a este un parametru real, iar $[t]$ este partea întreagă a lui t.

Ştefan Gavril, Piatra Neamţ

X.112. Se consideră mulţimile finite X, Y şi Z astfel încât $Z \subset Y$, $|X| = 4$, $|Y| \geq 5$ şi $|Z| = 3$. Determinaţi $|Y|$, ştiind că numărul funcţiilor $f : X \to Y$ a căror imagine include Z este 108.

Mihai Haivas şi Constantin Chirilă, Iaşi

X.113. Fie $a, b, x_1, x_2, \ldots, x_n$ numerele reale strict pozitive ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) şi σ o permutare a mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$. Demonstraţi că

$$\left(ax_1 + \frac{b}{x_{\sigma(1)}}\right) \ldots \left(ax_n + \frac{b}{x_{\sigma(n)}}\right) \leq \left(ax_1 + \frac{b}{x_1}\right) \ldots \left(ax_n + \frac{b}{x_n}\right).$$

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

X.114. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| \neq 1$ şi $z_1 - z_2z_3$, $z_2 - z_3z_1$ şi $z_3 - z_1z_2$ sunt numere reale. Demonstraţi că $(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1) = 0$.

Ionuţ Ivănescu, Craiova

X.115. Fie $ABCD$ un patrulater convex şi punctele $P, Q \in AC$, $R, S \in BD$ astfel încât $\frac{PA}{PC} = \frac{QA}{QC} = \frac{AB}{CD} = \frac{RB}{RD} = \frac{SB}{SD}$. Dacă M şi N sunt mijloacele segmentelor PQ, respectiv RS, demonstraţi că $2MN < PQ + RS$.

Titu Zvonaru, Comăneşti

Clasa a XI-a

XI.111. Demonstraţi că $4(x^3 + y^3) \geq 9xy|x - y|$, $\forall x, y \in [0, \infty)$.

Lucian Tuţescu, Craiova

XI.112. Fie şirurile $(w_n)_{n\geq 1}$ şi $(p_n)_{n\geq 1}$, unde $w_n = \left[\dfrac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \dfrac{1}{2n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (şirul lui Wallis), iar p_n este al n-lea număr prim. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2w_n}{\pi}\right)^{\frac{p_n}{\ln \frac{2w_n}{\pi} \cdot \ln n^n}}$.

Gabriel Mîrşanu, Iaşi

XI.113. Calculaţi limita şirului (x_n) definit prin: $x_1 \in (0,\infty)$, $\alpha \in (0,1)\cup(1,\infty)$, $x_{n+1} = -1 + (1+\alpha x_n)^{1/\alpha}$, $\forall n \geq 1$.

Gheorghe Costovici, Iaşi

XI.114. Fiind date $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, determinaţi funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea:

$$\begin{vmatrix} x-\alpha & y-\alpha \\ f(x)-\beta & f(y)-\beta \end{vmatrix} = af(x) + bf(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Marius Tiba, elev, Bucureşti

XI.115. Determinaţi matricele $X, Y, Z \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, având determinantul 1, ştiind că $X^4 + Y^4 + Z^4 = X^2 + Y^2 + Z^2 + 6I_2$.

Florin Stănescu, Găeşti

Clasa a XII-a

XII.111. Fie x, y, z numere reale nenule. Dacă $x + y + z = 0$ şi $x^5 + y^5 + z^5 = x^7 + y^7 + z^7$, calculaţi valoarea expresiei $A = x^2 + y^2 + z^2$.

Mihai Crăciun, Paşcani

XII.112. Calculaţi limita şirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $a_n = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^n + x^{n+2}}dx$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Bogdan Victor Grigoriu, Fălticeni

XII.113. Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} \displaystyle\int_{\frac{1}{x+1}}^{\frac{1}{x}} \operatorname{ctg} t^2 dt$.

Silviu Boga, Iaşi

XII.114. Se consideră funcţia continuă $f : [0,1] \to (0,1]$. Demonstraţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există un unic $x_n \in (0,1)$ astfel încât $\displaystyle\int_0^{x_n} f(t)dt = n\int_{x_n}^1 f(t)dt$. Calculaţi limita şirului (x_n) şi arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} n(1-x_n) = \dfrac{1}{f(1)}\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$.

Florin Stănescu, Găeşti

XII.115. Fie $\mathcal{F}$ mulţimea funcţiilor de două ori derivabile pe $[a,b]$ cu derivata de ordin doi continuă, pentru care $f(a) = \alpha$ şi $f(b) = \beta$, unde α şi β sunt constante fixate. Notăm $I(f) = \displaystyle\int_a^b [f'(x)]^2 dx$, $\forall f \in \mathcal{F}$ şi $J(f) = \displaystyle\int_a^b [f'(x)(1+2f(x))]^2 dx$, $\forall f \in \mathcal{F}$. Determinaţi $\min\{I(f) | f \in \mathcal{F}\}$ şi $\min\{J(f) | f \in \mathcal{F}\}$.

Adrian Corduneanu, Iaşi