Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor propuse în nr. 2/2009

A. Nivel gimnazial

Notă (**Titu Zvonaru**, Comăneşti). După soluţia din *RecMat 1/2008*, p. 73, a problemei **G124**, autorul spune că "după calcule laborioase, se poate demonstra că problema este echivalentă cu inegalitatea $\dfrac{m_a}{h_a} \leq \dfrac{R}{2r}$". De fapt, calculele nu sunt deloc laborioase:

Din patrulaterul $A'QAP$ înscris în cercul de diametru AA', rezultă că $PQ = AA' \cdot \sin A = m_a \sin A$. Folosind formule uzuale, avem că $\dfrac{p}{\sin A} = \dfrac{p \cdot 2R}{a} = \dfrac{h_a \cdot p \cdot 2R}{ah_a} = h_a \cdot \dfrac{p \cdot 2R}{2S} = h_a \cdot \dfrac{R}{r}$. Atunci $4PQ \leq AB + BC + CA \Leftrightarrow 4m_a \sin A \leq 2p \Leftrightarrow 2m_a \leq \dfrac{p}{\sin A} \Leftrightarrow \dfrac{m_a}{h_a} \leq \dfrac{R}{2r}$.

G166. *Demonstraţi că următoarele propoziţii sunt adevărate.*

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\exists x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât* $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1 = x_1x_2 \ldots x_n$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5$, $\nexists x_1, x_2, \ldots, x_n \in 2\mathbb{N}^*$ *astfel încât* $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1 = x_1x_2 \ldots x_n$.

c) $\exists x_1, x_2, \ldots, x_n \in 2\mathbb{N} + 1$ *astfel încât* $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1 = x_1x_2 \ldots x_n \Leftrightarrow n \in 2\mathbb{N}^* + 1$.

Dan Popescu, Suceava

Soluţie. a) De exemplu, considerăm $x_1 = 3$, $x_2 = \ldots = x_{n-2} = 1$, $x_{n-1} = n + 2$, $x_n = 1$, dacă $n \geq 4$. Pentru $n = 2$, x_1 şi x_2 pot fi alese arbitrar, iar pentru $n = 3$ putem lua $x_1 = x_2 = x_3 = 3$.

b) Se demonstrează uşor (de exemplu, prin inducţie) că $2^{n-2} > n$, $\forall n \geq 5$. Dacă presupunem că există $x_i = 2y_i$, $i = \overline{1, n}$, având proprietatea din enunţ, atunci $y_1y_2 + y_2y_3 + \ldots + y_ny_1 = 2^{n-2}y_1y_2 \ldots y_n$. Însă $2^{n-2}y_1y_2 \ldots y_n > ny_1y_2 \ldots y_n > y_1y_2 + y_2y_3 + \ldots + y_ny_1$ şi astfel se ajunge la o contradicţie.

Concluzia se păstrează şi pentru $n = 2$, însă nu mai are loc pentru $n = 3$ (putem considera $x_1 = 2$, $x_2 = x_3 = 4$), nici pentru $n = 4$ (alegem $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 2$).

c) Dacă are loc relaţia din enunţ, cu toate numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ impare, atunci membrul drept, deci şi cel stâng, va fi impar. În stânga avem n termeni impari cu suma impară, prin urmare n va fi impar. Reciproc, dacă n este impar şi $n \geq 3$, putem considera exemplele de la a).

G167. *Fie* $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$ *toţi divizorii pozitivi ai numărului natural* n. *Dacă există* i, j *cu* $j > i > 13$ *şi* $d_7^2 + d_i^2 = d_j^2$, *arătaţi că* n *este multiplu de* 8.

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Se ştie (sau se arată uşor) că, dacă $a, b, c \in \mathbb{N}$ sunt astfel încât $a^2 = b^2 + c^2$, atunci abc se divide cu 60; în cazul nostru rezultă că $d_7d_id_j \vdots 60$, de unde $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 3$, $d_4 = 4$, $d_5 = 5$, $d_6 = 6$ şi $10|n$, deci $d_7 \in \{7, 8, 9, 10\}$. Dacă $d_7 = 7$, atunci $d_j^2 - d_i^2 = 49 \Leftrightarrow (d_j - d_i)(d_j + d_i) = 49$ şi, cum $d_j - d_i < d_j + d_i$ şi cele două numere au aceeaşi paritate, deducem că $d_j - d_i = 1$, $d_j + d_i = 49$, deci $d_i = 24$, prin urmare $n \vdots 8$. Dacă $d_7 = 8$, concluzia este evidentă, iar dacă $d_7 = 9$ sau $d_7 = 10$, cu un raţionament analog celui de mai sus, obţinem că $d_i = 40$, respectiv $d_i = 24$. Aceste relaţii arată că $n \vdots 8$, însă intră în contradicţie cu faptul că $d_7 > 8$.

G168. *Pentru $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$, demonstraţi că are loc inegalitatea*

$$\frac{x(y+z)}{x+yz} + \frac{y(x+z)}{y+xz} + \frac{z(x+y)}{z+xy} \le 2\left(\frac{x^2}{x+yz} + \frac{y^2}{y+xz} + \frac{z^2}{z+xy}\right).$$

Ştefan Gavril, Piatra Neamţ

Soluţie. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $0 < x \le y \le z$; atunci $0 < xy \le xz \le yz$ şi $0 < \frac{1}{z} \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{x}$, deci $\frac{xy}{z} \le \frac{xz}{y} \le \frac{yz}{x}$, de unde $0 < \frac{1}{1+\frac{yz}{x}} \le \frac{1}{1+\frac{xz}{y}} \le \frac{1}{1+\frac{xy}{z}}$, adică $0 < \frac{x}{x+yz} \le \frac{y}{y+xz} \le \frac{z}{z+xy}$. Folosind inegalitatea rearanjărilor, rezultă că

$$y\frac{x}{x+yz} + z\frac{y}{y+xz} + x\frac{z}{z+xy} \le x\frac{x}{x+yz} + y\frac{y}{y+xz} + z\frac{z}{z+xy};$$

$$z\frac{x}{x+yz} + x\frac{y}{y+xz} + y\frac{z}{z+xy} \le x\frac{x}{x+yz} + y\frac{y}{y+xz} + z\frac{z}{z+xy}.$$

Adunând aceste două relaţii se obţine inegalitatea dorită.

G169. *Demonstraţi că există o infinitate de numere iraţionale α cu proprietatea că α^3 şi $\alpha^2 + \alpha$ sunt, de asemenea, iraţionale.*

Gabi Ghidoveanu şi Dumitru Mihalache, Bârlad

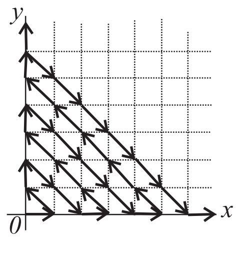
Soluţie. Orice număr $\alpha = a\sqrt{2}$, cu $a \in \mathbb{Q}^*$, satisface condiţiile din problemă.

G170. *O mulţime $A \subset \mathbb{R}$, de cardinal 2009, are proprietatea că fiecare element al ei este mai mare decât o zecime din suma celor 2008 numere rămase. Arătaţi că A conţine cel puţin 12 numere negative.*

Andrei Nedelcu, Iaşi

Soluţie. Presupunem, prin absurd, că A conţine cel mult 11 numere negative, fie acestea $a_1, a_2, \ldots, a_k$, unde $k \le 11$; completăm cu încă $11 - k$ numere (nenegative), $a_{k+1}, \ldots, a_{11}$ şi fie $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2009}$. Din ipoteza problemei, avem că $a_1 > \frac{S - a_1}{10}$, $a_2 > \frac{S - a_2}{10}, \ldots, a_{11} > \frac{S - a_{11}}{10}$, de unde $10(a_1 + a_2 + \ldots + a_{11}) > 11S - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{11})$, deci $a_1 + a_2 + \ldots + a_{11} > S$. Rezultă de aici că $a_{12} + a_{13} + \ldots + a_{2009} < 0$, ceea ce nu este posibil, întrucât $a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{2009}$ sunt toate nenegative. Astfel, rămâne adevarată concluzia problemei.

G171. *Punctele planului care au, în raport cu un reper cartezian, ambele coordonate numere naturale, le parcurgem în sensul indicat de săgeţi în figură, pornind din origine. Notăm cu $a_{n,k}$ poziţia punctului de coordonate (n, k) în şirul obţinut (de exemplu, $a_{0,0} = 1$, $a_{0,2} = 4$, $a_{2,2} = 13$ etc.). Exprimaţi numărul $a_{n,k}$ în funcţie de n şi de k.*



Lucian Georges Lăduncă, Iaşi

Soluţie. Pentru a ajunge din origine în punctul de coordonate (n, k) vor fi parcurse toate punctele situate pe diagonalele perpendiculare pe prima bisectoare, pe care suma coordonatelor este mai mică decât $n + k$; aceste puncte sunt în număr de $1 + 2 + 3 + \ldots + (n + k) = \dfrac{(n + k)(n + k + 1)}{2}$. Apoi, trebuie să ne deplasăm pe diagonala pe care suma coordonatelor este constantă, egală cu $n + k$. Observăm că dacă $n + k$ este par, această diagonală este parcursă de sus în jos, în ordinea $(0, n + k); (1, n + k - 1); \ldots ; (n - 1, k + 1); (n, k)$, deci mai sunt necesare $n + 1$ deplasări. În cazul în care $n + k$ este impar, această diagonală este parcursă invers, deci vom avea nevoie de $k + 1$ deplasări. În concluzie, $a_{n,k} = \dfrac{(n + k)(n + k + 1)}{2} + \dfrac{1 + (-1)^{n+k}}{2} n + \dfrac{1 + (-1)^{n+k+1}}{2} k + 1$.

G172. *O tablă dreptunghiulară $m \times n$, $m, n \geq 2$, are pătrăţelele unitate de la intersecţiile liniilor de ordin impar cu coloanele de ordin impar colorate în negru, restul pătrăţelelor fiind albe. A recolora o linie (coloană) înseamnă a schimba culorile tuturor pătrăţelelor acelei linii (coloane). Arătaţi că tabla nu poate fi transformată într-una complet albă prin recolorarea câtorva linii şi coloane.*

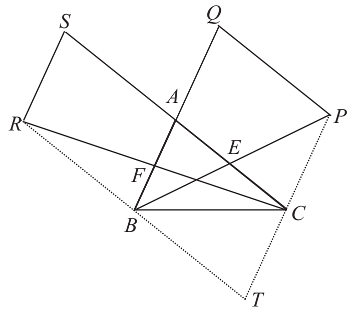
Răzvan Ceucă, elev, Iaşi

Soluţie. Problema este de aceeaşi natură cu binecunoscutele aplicaţii ale principiului invariantului prezentate, spre exemplu, în *Invarianţi şi jocuri* de I. Boreico şi M. Teleucă, Ed. Gil, Zalău, 2007. Ne fixăm atenţia asupra colţului tablei aflat la intersecţiile liniilor 1 şi 2 cu coloanele 1 şi 2. Iniţial, acest colţ conţine un pătrăţel negru şi trei pătrăţele albe. La o recolorare a unei linii (coloane), numărul pătrăţelelor negre ale colţului rămâne 1 sau devine 3. Cum acest număr nu ajunge niciodată să fie 0, înseamnă că tabla nu poate fi transformată într-una complet albă prin recolorare.

G173. *Notăm cu $T(a, b, c)$ triunghiul care are laturile de lungimi a, b şi c. Demonstraţi că triunghiurile $T(b, 2c, 2m_b)$ şi $T(c, 2b, 2m_c)$ pot fi confecţionate (pe rând), dintr-o aceeaşi bucată de carton, fără pierdere de material, plecând de la $T(a, b, c)$.*

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie (**Daniel Văcaru**, Piteşti). Fie ABC un triunghi de laturi $a, b,$ şi c, BE şi CF mediane, P şi Q simetricele lui B faţă de E, respectiv A, R şi S simetricele lui C faţă de F, respectiv A, iar T cel de-al patrulea vârf al paralelogramului $ABTC$. Este clar că $\triangle BPQ$ este de laturi $b, 2c, 2m_b$, iar $\triangle CRS$ este de laturi $c, 2b, 2m_c$. Deoarece $ABTC$ şi $AQPC$ sunt paralelograme congruente, iar $\triangle ABE \equiv \triangle CPE$, rezultă că $\triangle BPQ$ poate fi construit din paralelogramul $ABTC$. Analog, $\triangle CRS$ poate fi construit din acelaşi paralelogram.



G174. *Se consideră triunghiul ABC isoscel cu $m(\widehat{A}) = 40°$. Să se arate că nu există puncte $P \in Int ABC$ pentru care $m(\widehat{PAB}) = 30°$, $m(\widehat{PBC}) = 10°$ şi $m(\widehat{PCA}) = 35°$.*

Gabriel Popa şi Paul Georgescu, Iaşi

Soluţie. Caz I. $m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = 70°$; atunci $m(\widehat{PAC}) = 10°$, $m(\widehat{PCB}) = 35°$ şi de aici rezultă că $\triangle APC \equiv \triangle BPC$ (L.U.U.), prin urmare $AC = BC$, ceea ce este imposibil, triunghiul nefiind echilateral.

Caz II. $m(\widehat{B}) = 40°$, $m(\widehat{C}) = 100°$; atunci $\triangle PAB$ este isoscel cu $m(\widehat{PAB}) = m(\widehat{PBA}) = 30°$. Rezultă că $AP = BP$ şi cum $AC = BC$, $PC = PC$, urmează că $\triangle PAC \equiv \triangle PBC$. Deducem că $\widehat{PCA} \equiv \widehat{PCB}$, absurd.

Caz III. $m(\widehat{B}) = 100°$, $m(\widehat{C}) = 40°$; atunci $m(\widehat{PAC}) = 10°$, $m(\widehat{PBA}) = 90°$, $m(\widehat{PCB}) = 5°$ şi de aici $m(\widehat{BPC}) = 165°$. Fie $AP = 2$; din $\triangle ABP$ dreptunghic cu unghi de 30°, găsim că $BP = 1$, $AB = \sqrt{3}$, prin urmare $BC = \sqrt{3}$. Cu teorema sinusurilor în $\triangle BPC$, obţinem:

$$\frac{BC}{\sin BPC} = \frac{BP}{\sin BCP} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sin 165°} = \frac{1}{\sin 5°} \Leftrightarrow \sin 15° = \sqrt{3}\sin 5°.$$

Notând $t = \sin 5°$, rezultă că $3t - 4t^3 = t\sqrt{3} \Leftrightarrow t(3 - \sqrt{3} - 4t^2) = 0 \Leftrightarrow t \in \left\{0, \pm\frac{\sqrt{3-\sqrt{3}}}{2}\right\}$, ceea ce reprezintă o contradicţie (singura valoare care ar putea intra în discuţie ar fi $\sin 5° = \frac{\sqrt{3-\sqrt{3}}}{2}$, însă $\frac{\sqrt{3\sqrt{3}}}{2} > \frac{1}{2} = \sin 30°$).

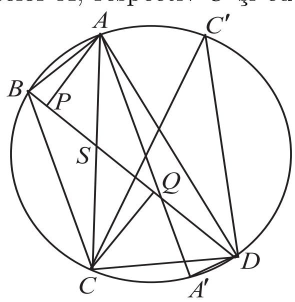
Notă. Dl. **Titu Zvonaru**, Comăneşti, semnalează o altă modalitate prin care se pot obţine contradicţii în cele trei cazuri, anume folosirea teoremei lui Ceva sub formă trigonometrică.

Spre exemplu, în cel de-al treilea caz, din $\sin\widehat{PAC}\cdot\sin\widehat{PBA}\cdot\sin\widehat{PCB} = \sin\widehat{PAB}\cdot\sin\widehat{PBC}\cdot\sin\widehat{PCA}$, ar rezulta că $\sin 10°\cdot\sin 90°\cdot\sin 5° = \sin 30°\cdot\sin 10°\cdot\sin 35°$, prin urmare $\sin 35° = 2\sin 5°$, fals.

G175. *Fie $ABCD$ un patrulater înscris în cercul de rază R. Demonstraţi că $AB\cdot AD + CB\cdot CD \le 4R^2$.*

Gheorghe Costovici, Iaşi

Soluţie. Notăm cu P şi Q proiecţiile pe BD ale punctelor A, respectiv C şi cu A', C' punctele diametral opuse lui A, respectiv C. Avem că $\triangle ABP \sim \triangle AA'D$ şi $\triangle CBQ \sim \triangle CC'D$, prin urmare $AB\cdot AD = AP\cdot AA'$ şi $CB\cdot CD = CQ\cdot CC'$. Adunând aceste relaţii, obţinem că $AB\cdot AD + CB\cdot CD = AP\cdot AA' + CQ\cdot CC' = 2R(AP+CQ) \le 2R(AS+CS) = 2R\cdot AC \le 2R\cdot 2R = 4R^2$, unde $\{S\} = AC\cap BD$. Egalitatea se atinge când $ABCD$ este pătrat.



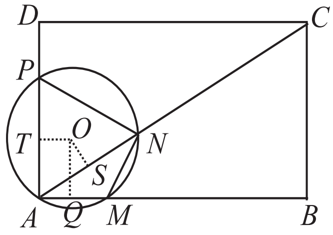
Notă. Din prima teoremă a lui Ptolemeu, rezultă că $AB\cdot CD + AD\cdot BC = AC\cdot BD \le 2R\cdot 2R = 4R^2$.

B. Nivel liceal

L166. *Fie $ABCD$ un dreptunghi, iar $\mathcal{C}$ un cerc prin A, care intersectează (AB), (AC) şi (AD) în M, N, respectiv P. Arătaţi că $AM\cdot AB + AP\cdot AD = AN\cdot AC$.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţia 1 (a autorului). Notăm $\alpha = m(\widehat{BAC})$, $\beta = m(\widehat{ANM})$. Din teorema sinusurilor, avem că $\dfrac{AM}{\sin\beta} = \dfrac{AN}{\sin(\pi-\alpha-\beta)}$, deci $AM = AN\cdot\dfrac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, iar $\dfrac{AP}{\sin\widehat{PNA}} = \dfrac{AN}{\sin\widehat{APN}}$. Însă $m(\widehat{MNP}) = 90^\circ$ (unghi înscris în semicerc), prin urmare $m(\widehat{PNA}) = \dfrac{\pi}{2} - \beta$ şi $m(\widehat{APN}) = \pi - \left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right) - \left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = \alpha+\beta$, astfel că $AP = AN\dfrac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. Cum $AB = AC\cdot\cos\alpha$, $AD = AC\cdot\sin\alpha$, obţinem:



$$AM\cdot AB + AP\cdot AD = AN\cdot\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}AC\cdot\cos\alpha + AN\cdot\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}AC\cdot\sin\alpha =$$
$$= AN\cdot AC\cdot\frac{\sin\beta\cos\alpha+\cos\beta\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = AN\cdot AC.$$

Soluţia 2 (**Titu Zvonaru**). Fie O centrul cercului $\mathcal{C}$. Notăm cu Q,S,T proiecţiile lui O pe AB, AC, respectiv AD şi fie $a = AB$, $b = BC$, $u = AQ$, $v = AT$, iar $r = \sqrt{u^2+v^2}$ este raza lui $\mathcal{C}$. Avem că $AM = 2AQ$, $AP = 2AT$, $AN = 2AS$ şi $AS = r\cos\widehat{OAS} = r\cdot\cos(\widehat{OAB}-\widehat{BAC}) = r\cos\widehat{OAB}\cos\widehat{BAC} + r\sin\widehat{OAB}\cos\widehat{BAC} = r\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\dfrac{u}{r} + r\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\dfrac{v}{r} = \dfrac{au+bv}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Relaţia de demonstrat devine

$$AQ\cdot AB + AT\cdot AD = AS\cdot AC \Leftrightarrow au+bv = \frac{au+bv}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\sqrt{a^2+b^2},$$

deci este adevărată.

Soluţia 3 (**Titu Zvonaru, Daniel Văcaru**). Folosind puterea punctului faţă de cerc şi teorema lui Pitagora, obţinem:

$$AM\cdot AB = (AB-BM)\cdot AB = a^2 - BM\cdot BA = a^2 - (BO^2 - r^2)$$
$$= a^2+u^2+v^2 - [(a-u)^2+v^2] = 2au.$$

Analog se arată că $AP\cdot AD = 2bv$ iar $AN\cdot AC = 2au+2bv$, de unde concluzia problemei.

Soluţia 4 (**Cristinel Mortici, Titu Zvonaru**). Alegem un sistem cartezian în raport cu care $A(0,0), B(a,0), C(a,b), D(0,b), O(u,v)$. Ecuaţia cercului $\mathcal{C}$ este $(x-u)^2+(y-v)^2 = u^2+v^2$, adică $x^2+y^2-2ux-2vy=0$. Se obţin uşor coordonatele punctelor M,N,P, care sunt $M(2u,0), P(0,2v), N\left(\dfrac{2a(au+bv)}{a^2+b^2}, \dfrac{2b(au+bv)}{a^2+b^2}\right)$. Deoarece

$$AN\cdot AC = \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{\frac{4a^2(au+bv)^2+4b^2(au+bv)^2}{(a^2+b^2)^2}} = 2au+2bv,$$

re;aţia de demonstrat este adevărată.

Notă (**Cristinel Mortici**). Problema poate fi privită ca o extindere a teoremei lui Pitagora, care se obţine când cercul $\mathcal{C}$ este cel circumscris dreptunghiului dat.

L167. *Fie ABC un triunghi cu $AB > AC$. Cercul înscris în triunghi este tangent laturilor BC şi AC în D, respectiv E. Considerăm T un punct pe latura $[BC]$ şi notăm cu J centrul cercului înscris în $\triangle ABT$. Dacă DE trece prin mijlocul segmentului $[CJ]$, demonstraţi că triunghiul ATC este isoscel.*

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Fie $\{M\} = AJ \cap BT$, $\{P\} = DE \cap CJ$, $x = AT$, $y = BM$. Cu notaţiile uzuale, avem: $CE = CD = p - c$, $AE = p - a$, $BD = p - b$, iar $MD = BD - BM = p - b - y$. Din teorema bisectoarei, obţinem că $\dfrac{BM}{MT} = \dfrac{AB}{AT}$, deci $MT = \dfrac{xy}{c}$, iar $\dfrac{AJ}{JM} = \dfrac{AT}{MT}$, de unde $\dfrac{AJ}{AM} = \dfrac{c}{y+c}$, iar $\dfrac{JM}{AM} = \dfrac{y}{y+c}$. Folosind relaţia (R_1) din *RecMat1/2005*, pg. 15, avem că $\dfrac{CP}{PJ} = \dfrac{AM \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{CD}{DM}}{AJ \cdot \frac{CE}{EA} + JM \cdot \frac{CD}{DM}}$ şi, cum P este mijlocul lui CJ, obţinem succesiv:

$$\frac{AJ}{AM} \cdot \frac{EC}{EA} + \frac{JM}{AM} \cdot \frac{DC}{DM} = \frac{EC}{EA} \cdot \frac{DC}{DM} \Leftrightarrow \frac{c}{y+c} \cdot \frac{p-c}{p-a} +$$
$$+ \frac{y}{y+c} \frac{p-c}{p-b-y} = \frac{p-c}{p-a} \frac{p-c}{p-b-y} \Leftrightarrow pc - bc - cy + py - ay = py + pc - cy - c^2$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{c(b-c)}{a}, \text{ iar } BT = \frac{(c-b)(c+x)}{a}.$$

Cu teorema cosinusului în $\triangle ABT$, deducem:

$$x^2 = c^2 + \frac{(c-b)^2(c+x)^2}{a^2} - 2c\frac{(c-b)(c+x)^2}{a^2} - 2c\frac{(c-v)(c+x)}{a}\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2x^2 = a^2c^2 + (c-b)^2(c^2+2cx+x^2) - (c-b)(a^2+c^2-b^2)(c+x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2[a^2 - (c-b)^2] + (c-b)[a^2+c^2-b^2-2c^2+2bc]x - a^2c^2 - c^2(c^2-2bc+b^2) +$$
$$+ (c^2-2bc)(a^2+c^2-b^2) = 0 \Leftrightarrow x^2[a^2-(c-b)^2] - (b-c)[a^2-(c-b)^2 -$$
$$- bc[a^2-(c-b)^2] = 0 \Leftrightarrow x^2 - (b-c)x - bc = 0.$$

Această ecuaţie are unica soluţie convenabilă $AT = b = AC$.

L168. *Demonstraţi că în orice triunghi, cu notaţiile uzuale, are loc inegalitatea*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{11p^2 - 15r^2 - 60Rr}{6p^2 - 6r^2 - 24Rr} \geq \frac{3}{2}.$$

Marius Olteanu, Rm. Vâlcea

Soluţia 1 (a autorului). Este cunoscuta identitatea $a^2+b^2+c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr$ (Traian Lalescu-*Geometria triunghiului*, 16.54), de unde rezultă imediat că $ab + bc + ca = p^2 + r^2 + 4Rr$. Scăzând aceste două relaţii, obţinem că $3r^2 + 12Rr = p^2 - (a^2 +$

$b^2+c^2)+(ab+bc+ca)\leq p^2$ şi astfel este demonstrată inegalitatea din dreapta. Pentru prima inegalitate, pornim de la

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geq\frac{13}{6}-\frac{2(xy+xz+yz)}{3(x^2+y^2+z^2)},\ \forall x,y,z>0$$

(vezi, de exemplu, V. Cârtoaje-*Algebraic Inequalities*, GIL, Zalău, 2006). Înlocuind $x=a,\ y=b, z=z, x^2+y^2+z^2=2p^2-2r^2-8Rr,\ xy+xz+yz=p^2+r^2+4Rr$ şi efectuând calculele, urmează concluzia problemei.

Soluţia 2 (**Titu Zvonaru**, Comăneşti). Are loc egalitatea:

$$\frac{11p^2-15r^2-60Rr}{6p^2-6r^2-24Rr}=\frac{26p^2-15(p^2+r^2+4Rr)}{12p^2-p(p^2+r^2+4Rr)}=\frac{26p^2-15(\Sigma ab)}{12p^2-6(\Sigma ab)}=$$
$$=\frac{13(\Sigma a)^2-30(\Sigma ab)}{6(\Sigma a)^2-12(\Sigma ab)}=\frac{13(\Sigma a^2)-4(\Sigma ab)}{6(\Sigma a^2)}=\frac{3}{2}+\frac{2(\Sigma a^2)-2(\Sigma ab)}{3(\Sigma a^2)}$$

şi, cum $\Sigma a^2\geq\Sigma ab$, inegalitatea din dreapta este demonstrată. Pentru partea stângă, ar trebui să arătăm că $\Sigma\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{3}{2}\geq\dfrac{\Sigma(a-b)^2}{3(\Sigma a^2)}$, însă vom demonstra o inegalitate mai tare, anume

$$\sum\frac{a}{b+c}-\frac{3}{2}\geq\frac{\sum(a-b)^2}{3(\sum a^2)}+\frac{\sum(a+b-c)^2(a+b)}{6(a+b)(b+c)(c+a)(\sum a^2)}\Leftrightarrow$$

$$(*)\qquad \sum\frac{(a-b)^2}{2(a+b)(b+c)}\geq\frac{\sum(a-b)^2}{3(\sum a^2)}+\sum\frac{(a+b-c)^2}{6(a+c)(b+c)(\sum a^2)}.$$

Avem:

$$\frac{(a-b)^2}{3(a+c)(b+c)}-\frac{(a-b)^2}{3a^2+3b^2+3c^2}-\frac{(a+b-c)^2}{6(a+c)(b+c)(a^2+b^2+c^2)}=$$
$$(a-b)^2\cdot\frac{3a^2+3b^2+3c^2-2c^2-2ab-2bc-2ac-a^2-b^2-c^2-2ab+2ac+2bc}{6(a+c)(b+c)(a^2+b^2+c^2)}$$
$$(a-b)^2\frac{2a^2+2b^2-4ab}{6(a+c)(b+c)(a^2+b^2+c^2)}\geq 0,$$

prin urmare are loc (*) şi soluţia problemei este completă.

Remarcăm că, în locul inegalităţii (*), putem demonstra că

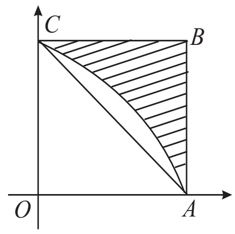
$$(**)\qquad \sum\frac{a}{b+c}-\frac{3}{2}\geq\frac{\sum(a-b)^2}{3(\sum a^2)}+\sum\frac{(a-b)^2}{3(a+c)(b+c)(\sum a^2)}.$$

Să mai spunem că identitatea $\sum\dfrac{a}{b+c}-\dfrac{3}{2}=\sum\dfrac{(a-b)^2}{2(a+c)(b+c)}$ se poate verifica direct; o modalitate de a o obţine este prezentată în *RecMat 2/2008*, p. 125.

L169. *Care este probabilitatea ca razele cercurilor exînscrise unui triunghi, ales aleator, să fie laturile unui nou triunghi?*

Petru Minuţ, Iaşi

Soluţie. Alegând convenabil unitatea de măsură, putem considera că lungimile laturilor triunghiului sunt $a = 2x$, $b = 2y$, $c = 2$, cu $0 < x \le y \le 1$ şi $x + y > 1$. Razele cercurilor exînscrise sunt $r_a = \dfrac{S}{p-a} = \dfrac{S}{-x+y+1}$, $r_b = \dfrac{S}{p-b} = \dfrac{S}{x-y+1}$ şi $r_c = \dfrac{S}{p-c} = \dfrac{S}{x+y-1}$; se observă că $0 < r_a \le r_b \le r_c$. În aceste condiţii, r_a, r_b şi r_c sunt laturile unui triunghi dacă şi numai dacă



$$r_a + r_b > r_c \Leftrightarrow \frac{1}{-x+y+1} + \frac{1}{x-y+1} > \frac{1}{x+y-1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y - 3 > 0.$$

Considerăm un reper cartezian xOy. Domeniul cazurilor favorabile este mulţimea D a soluţiilor sistemului de inecuaţii $0 < x \le y \le 1$, $x + y > 1$, deci este interiorul triunghiului ABC, unde $A(1,0), B(1,1)$ şi $C(0,1)$. Domeniul cazurilor favorabile este mulţimea d a punctelor interioare triunghiului ABC şi exterioare parabolei $\mathcal{P}$: $x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0$ (care trece prin A şi prin C). Aria suprafeţei cuprinsă între $\mathcal{P}$ şi axe este $\displaystyle\int_0^1 (x - 1 + 2\sqrt{1-x})dx = \frac{5}{6}$ şi atunci aria$(d) = 1 - \dfrac{5}{6} = \dfrac{1}{6}$. Cum aria$(D) = \dfrac{1}{2}$, rezultă că probabilitatea cerută este $P = \dfrac{\text{aria}(d)}{\text{aria}(D)} = \dfrac{1}{3}$.

L170. *Fie* $n \in \mathbb{N}, n \ge 2$ *şi* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$ *cu* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = S$. *Considerăm* $k \in \mathbb{N}, 1 \le k \le n-1$ *şi* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_+$ *cu* $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. *Demonstraţi inegalitatea*

$$\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} (a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_k})^{\alpha_1} (S - a_{i_1} - \ldots - a_{i_k})^{\alpha_2} \le \frac{k^{\alpha_1}(n-k)^{\alpha_2}}{n} C_n^k S.$$

(*În legătură cu 6117 din R.M.T. 1/1987*).

Paul Georgescu şi Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Notăm cu T membrul stâng al inegalităţii din enunţ şi observăm că

$$T = k^{\alpha_1} \cdot (n-k)^{\alpha_2} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \left(\frac{a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_k}}{k} \right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{S - a_{i_1} - \ldots - a_{i_k}}{n-k} \right)^{\alpha_2}.$$

Aplicând inegalitatea mediilor generalizată, obţinem că

$$T \le k^{\alpha_1}(n-k)^{\alpha_2} \sum_{1 \le i_1 < \ldots i_k \le n} \left(\alpha_1 \frac{a_{i_1} + \ldots + a_{i_k}}{k} + \alpha_2 \frac{S - a_{i_1} - \ldots - a_{i_k}}{n-k} \right) =$$
$$= k^{\alpha_1}(n-k)^{\alpha_2} \left(\alpha_1 \frac{C_n^k S}{n} + +\alpha_2 \frac{C_n^{n-k} S}{n} \right) = k^{\alpha_1}(n-k)^{\alpha_2} \frac{C_n^k S}{n},$$

deoarece $C_n^k = C_n^{n-k}$, iar $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

Problema 6117 din *R.M.T.* se obţine pentru $k = 1$, $n = 3$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dfrac{1}{2}$.

L171. *Pentru $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, demonstraţi că are loc inegalitatea*

$$\sqrt{x} + 3\sqrt{2(x+y)} + \sqrt{y} \leq 2(\sqrt{3x+y} + \sqrt{x+3y}).$$

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţia 1 (a autorului). Inegalitatea se poate scrie în forma echivalentă

$$2(2\sqrt{2(x+y)} - \sqrt{3x+y} - \sqrt{x+3y}) \leq \sqrt{2(x+y)} - \sqrt{x} - \sqrt{y}.$$

Dacă amplificăm cu expresiile conjugate, găsim că

$$\sqrt{2(x+y)} - \sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{\sqrt{2(x+y)} + \sqrt{x} + \sqrt{y}};$$

$$2\sqrt{2(x+y)} - \sqrt{3x+y} - \sqrt{x+3y} = \frac{(\sqrt{3x+y} - \sqrt{x+3y})^2}{2\sqrt{2(x+y)} + \sqrt{3x+y} + \sqrt{x+3y}} =$$

$$= \frac{4(x-y)^2}{(2\sqrt{2(x+y)} + \sqrt{3x+y} + \sqrt{x+3y})(\sqrt{3x+y} + \sqrt{x+3y})^2},$$

astfel că demonstrarea inegalităţii noastre revine la a arăta că

$$8(\sqrt{2(x+y)} + \sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \leq$$
$$\leq (2\sqrt{2(x+y)} + \sqrt{3x+y} + \sqrt{x+3y})(\sqrt{3x+y} + \sqrt{x+3y})^2.$$

Această din urmă inegalitate rezultă din

$$2(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \leq \sqrt{3x+y} + \sqrt{x+3y}$$

(care, după ridicare la pătrat, duce la $(x-y)^2 \geq 0$).

Soluţia 2 (**Titu Zvonaru**, Comăneşti). Datorită omogenităţii, putem presupune că $x + y = 1$. Notăm $2\sqrt{xy} = t$ şi atunci $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x+y+2\sqrt{xy}} = \sqrt{1+t}$, iar $3x^2 + 3y^2 + 10xy = 3(x+y)^2 + 4xy = 3 + t^2$. Prin ridicări la pătrat ale unor cantităţi pozitive, inegalitatea de demonstrat se scrie succesiv:

$$\sqrt{1+t} + 3\sqrt{2} \leq 2(\sqrt{3x+y} + \sqrt{x+3y}) \Leftrightarrow 3 + t + 6\sqrt{2}\sqrt{1+t} \leq 8\sqrt{3+t^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 9 + 6t + t^2 + 72(1+t) + 12\sqrt{2}(3+t)\sqrt{1+t} \leq 192 + 64t^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\sqrt{2}(t+3)\sqrt{t+1} \leq 21t^2 - 26t + 37 \Leftrightarrow$$
$$(32t+32)(t^2+6t+9) \leq (21t^2 - 26t + 37)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 441t^4 - 1124t^3 + 2006t^2 - 2404t + 1081 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (t-1)^2(441t^2 - 242t + 1081) \geq 0,$$

care este adevărată, întrucât cea de-a doua paranteză are discriminantul negativ. Egalitatea se atinge dacă şi numai dacă $x = y$.

L172. *Fie $P \in \mathbb{Q}[X]$, cu $grP = n \geq 1$. Dacă P admite o rădăcină complexă a, având ordinul de multiplicitate m, cu $n < 2m$, demonstraţi că $a \in \mathbb{Q}$.*

Adrian Reisner, Paris

Soluţie. Fie $A \in \mathbb{Q}[X]$ polinomul minimal al lui a peste $\mathbb{Q}$, având gradul $p \geq 1$. Avem că $p = 1 \Leftrightarrow a \in \mathbb{Q}$, deoarece în acest caz $A = X - a$. Presupunem, prin absurd, că $a \notin \mathbb{Q}$, deci $p \geq 2$. Numărul a nu poate fi rădăcină multiplă a lui A, deoarece altfel polinomul A', de grad $p - 1 < p$ ar admite rădăcina a şi A nu ar mai fi minimal. Rezultă că A are o rădăcină complexă $b \neq a$. Cum toate polinoamele $P, P', \ldots, P^{(m-1)}$ au rădăcina a, ele se divid cu A, deci admit şi rădăcina b şi astfel deducem că multiplicitatea m' a rădăcinii b a polinomului P verifică $m' \geq m$. Obţinem că $n \geq m + m' \geq 2m$, ceea ce contrazice ipoteza $2m > n$. Prin urmare, rămâne adevărată concluzia problemei.

L172. *a) Există funcţii $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $|f(x) - f(y)| \geq c$, $\forall x \neq y \in (a, b)$, unde c este o constantă pozitivă?*

b) Există funcţii $f : (a, b) \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $|f(x) - f(y)| \geq c$, $\forall x \neq y \in (a, b) \cap \mathbb{Q}$, unde c este o constantă pozitivă?

Geanina Hăvârneanu, Iaşi

Soluţie. a) Vom arăta că nu există astfel de funcţii prin reducere la absurd. Din densitatea lui $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$ rezultă că oricare ar fi $x \in (a, b)$, putem găsi numere raţionale (şi fie $q(x)$ un astfel de număr, fixat odată cu x) astfel încât $|f(x) - q(x)| < \dfrac{c}{3}$. Dacă presupunem că funcţia f are proprietatea din enunţ, pentru $x \neq y$ din (a, b) obţinem că

$$\begin{aligned}|q(x) - q(y)| &= |q(x) - f(x) + f(x) - f(y) + f(y) - q(y)| \geq \\ &\geq |f(x) - f(y)| - |f(x) - q(x)| - |f(y) - q(y)| \geq \frac{c}{3} \Rightarrow q(x) \neq q(y).\end{aligned}$$

Rezultă că funcţia $q : (a, b) \to \mathbb{Q}$ este injectivă, ceea ce este imposbil, întrucât $\mathbb{Q}$ este numărabilă, în timp ce (a, b) este mulţime nenumărabilă.

b) Cum $\mathbb{Q}$ este numărabilă, există o funcţie bijectivă $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$. Pentru $c > 0$ fixat arbitrar, definim $f : (a, b) \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(x) = cg(x)$ şi această funcţie verifică cerinţa problemei: dacă $x \neq y$, atunci $g(x) \neq g(y)$ şi deoarece $g(x)$, $g(y) \in \mathbb{N}$, rezultă că $|g(x) - g(y)| \geq 1$, prin urmare $|f(x) - f(y)| \geq c$.

Notă. Principial aceeaşi soluţie a fost dată de către dl. **Cristinel Mortici**, Târgovişte.

L173. *Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ numere reale pozitive şi $a = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{a_i}\right)^2$, $b = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{b_i}\right)^2$. Arătaţi că există $x_0 > 0$ astfel încât $\left[\sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{a_i x + b_i}\right] - [\sqrt{ax + b}] \in \{0, 1\}$, $\forall x > x_0$.*

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţia 1 (a autorului). Fie funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{a_i x + b_i}\right)^2 - ax$.

Ea este derivabilă, cu $f'(x)=\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_ix+b_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\sqrt{a_ix+b_i}}\right)-a\geq\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}\right)^2-a$ $=0$, $\forall x\geq 0$ (am utilizat inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwartz), deci f este crescătoare pe $[0,\infty)$. Urmează că $f(0)\leq f(x)\leq \lim\limits_{x\to\infty}f(x)$, $\forall x\in[0,\infty)$. Dar $f(0)=$ b, iar $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{(\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{a_i+b_ix})^2-a}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i+b_ix}\right)\cdot$ $\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{\sqrt{a_i+b_ix}}\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{\sqrt{a_i}}\right)=c$. Avem deci $b\leq f(x)\leq c\Leftrightarrow$ $\sqrt{ax+b}\leq\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{a_ix+b_i}\leq\sqrt{ax+c}$, $\forall x\geq 0$. Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{ax+c}-\sqrt{ax+b})=0$, există $x_0>0$ astfel încât $0<\sqrt{ax+c}-\sqrt{ax+b}<1$, $\forall x>x_0$. Notând $n=[\sqrt{ax+b}]$, obţinem că $n\leq\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{a_ix+b_i}<n+2$, $\forall x>x_0$, adică $\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{a_ix+b_i}\right]\in\{n,n+1\}$ şi problema este astfel rezolvată.

Soluţia 2 (**Cristinel Mortici**, Târgovişte). Notăm $s_n(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{a_ix+b_i}$, $x>$ 0. Vom demonstra că

$$(*)\qquad s_n(x)-\sqrt{ax+b}\geq 0,\forall x\geq 0\ \text{ şi }\ \lim_{x\to\infty}(s_n(x)-\sqrt{ax+b})=0.$$

Dacă vom dovedi (*), din $s_n(x)\geq\sqrt{ax+b}$, $\forall x\geq 0$, va rezulta că $[s_n(x)]\geq[\sqrt{ax+b}]$, $\forall x\geq 0$. Cum $\lim\limits_{x\to\infty}(s_n(x)-\sqrt{ax+b})=0$, există $x_0>0$ astfel încât $0\leq s_n(x)-\sqrt{ax+b}<1$, $\forall x\geq x_0$. În cazul în care ar exista $x\geq x_0$ pentru care $[s_n(x)]\geq[\sqrt{ax+b}]+2$, numerele $s_n(x)$ şi $\sqrt{ax+b}$ ar diferi cu mai mult de 1, contradicţie. Rămâne că $[s_n(x)]-[\sqrt{ax+b}]\in\{0,1\}$, $\forall x\geq x_0$, deci are loc cerinţa problemei.

Să justificăm deci (*). Cu inegalitatea

$$\sqrt{u_1^2+v_1^2}+\ldots+\sqrt{u_n^2+v_n^2}\geq\sqrt{(u_1+\ldots+u_n)^2+(v_1+\ldots+v_n)^2},$$

obţinem că $s_n(x)\geq\sqrt{(\sqrt{a_1x}+\ldots+\sqrt{a_nx})^2+(\sqrt{b_1}+\ldots\sqrt{b_n})^2}=\sqrt{ax+b}$. Pentru demonstrarea limitei, vom folosi o consecinţă a formulei lui Taylor:

$$\sqrt{1+y}=1+\frac{1}{2}y+O(y^2).$$

În cazul nostru,

$$s_n(x)-\sqrt{ax+b}=\sqrt{a_1x}\cdot\sqrt{1+\frac{b_1}{a_1x}}+\ldots+\sqrt{a_nx}\cdot\sqrt{1+\frac{b_n}{a_nx}}-\sqrt{ax}\sqrt{1+\frac{b}{ax}}=$$

$$= \sqrt{a_1 x}\left(1 + \frac{b_1}{2a_1 x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) + \ldots + \sqrt{a_n x}\left(1 + \frac{b_n}{2a_n x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) -$$
$$- \sqrt{ax}\left(1 + \frac{b}{2ax} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) =$$
$$= \frac{b_1}{2\sqrt{a_1 x}} + \ldots + \frac{b_n}{2\sqrt{a_n x}} - \frac{b}{2\sqrt{ax}} + O\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right) \to 0, \text{ pentru } x \to \infty$$

şi cu aceasta soluţia problemei este completă.

L175. *Arătaţi că*

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2k}\Omega_k = 2^n\Omega_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

unde $\Omega_k = \dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$, $k \in \mathbb{N}^*$ *(se convine ca* $\Omega_0 = 1$*).*

Gheorghe Costovici, Iaşi

Soluţie. Se ştie că $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^k x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k x dx = \begin{cases} \dfrac{(k-1)!!}{k!!}\dfrac{\pi}{2}, & k \text{ par}, \\ \dfrac{(k-1)!!}{k!!}, & k \text{ impar}. \end{cases}$

Avem, ţinând seama de aceste relaţii, următoarele:

$$\frac{\pi}{2}\Omega_n = \frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx = \frac{1}{2^n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2x)^n dx =$$
$$= \frac{1}{2^{n+1}}\int_0^{\pi} (1+\cos t)^n dt = \frac{1}{2^{n+1}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos t)^n dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1+\cos t)^n dt\right] =$$
$$= \frac{1}{2^{n+1}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos t)^n dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin u)^n du\right] =$$
$$= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^k t dt + (-1)^k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k u du\right] =$$
$$= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n} [1+(-1)^k] C_n^k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^k t dt =$$
$$= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k} t dt = \frac{1}{2^n}\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2k}\Omega_k,$$

de unde deducem identitatea din enunţ.