PROBLEME ŞI SOLUŢII

Soluţiile problemelor propuse în nr. 2/2009

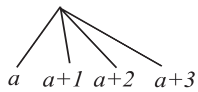
Clasele primare

P.174. *Mirela are un măr, o pară şi o portocală. Mama îi spune să aşeze fructele pe două farfurii identice, astfel încât pe fiecare farfurie să fie cel mult două fructe. În câte moduri poate aşeza Mirela cele trei fructe?*

(*Clasa I*) **Inst. Maria Racu, Iaşi**

Soluţie. Mirela poate aşeza cele trei fructe astfel: (măr, pară)-(portocală); (măr, portocală)-(pară); (pară, portocală)-(măr), deci există trei modalităţi de aranjare.

P.175. *Scrieţi toate numerele mai mici ca* 27 *care se pot descompune sub forma indicată alăturat.*



(*Clasa I*) **Diana Tănăsoaie, elevă, Iaşi**

Soluţie. Avem $1 + 2 + 3 = 6$, $27 - 6 = 21$. Trebuie să aflăm toate numerele mai mici ca 21 care se pot scrie sub forma $a + a + a + a$. Acestea sunt $20; 16; 12; 8; 4; 0$. Numerele cerute de problemă sunt $26, 22, 18, 14, 10, 6$.

P.176. *Într-o bombonieră sunt cinci bomboane cu fructe şi şapte bomboane cu ciocolată. Care este cel mai mic număr de bomboane pe care trebuie să-l luăm din bombonieră, fără să ne uităm, pentru a avea cel puţin două bomboane cu ciocolată?*

(*Clasa a II-a*) **Alexandru Dumitru Chiriac, elev, Iaşi**

Soluţie. Situaţia cea mai nefavorabilă este când luăm întâi toate cele cinci bomboane cu fructe. Trebuie să luăm minimum 7 bomboane.

P.177. *Cum măsurăm* 1 *litru de apă folosind două vase negradate, unul de* 5 *litri, iar celălalt de* 8 *litri?*

(*Clasa a II-a*) **Mariana Nastasia, elevă, Iaşi**

Soluţie. Umplem vasul de 8 litri, iar din acesta pe cel de 5 litri. Golim vasul de 5 litri şi turnăm în el cei 3 litri rămaşi în vasul de 8 litri. Umplem din nou vasul de 8 litri şi turnăm din el 2 litri peste cei 3 litri din vasul de 5 litri. Golim vasul de 5 litri şi îl umplem din cei 6 litri rămaşi în vasul de 8 litri. În vasul de 8 litri rămâne 1 litru de apă.

P.178. *Arătaţi că, dacă restul este o cincime din scăzător, atunci descăzutul se împarte exact la* 6. *Care este cel mai apropiat descăzut de numărul* 100 *cu această proprietate?*

(*Clasa a III-a*) **Mirela Cucoranu, elevă, Iaşi**

Soluţie. Din formula scăderii, $D - S = R$, deducem $D = S + R = 5R + R = 6R$, de unde rezultă că descăzutul se împarte exact la 6. Cel mai apropiat descăzut de numărul 100, având această proprietate, este 102.

P.179. *Se dau produsele:* $a \times b = 60$, $a \times c = 70$, $a \times d = 95$. *Ştiind că* $b + c + d$ *este de nouă ori mai mare decât* a, *să se afle valoarea lui* a.

(*Clasa a III-a*) **Andreea Amarandei, elevă, Iaşi**

Soluţie. $a \times b + a \times c + a \times d = 225 \Rightarrow a \times (b + c + d) = 225 \Rightarrow a \times (9 \times a) = 225 \Rightarrow a \times a = 225 : 9 \Rightarrow a \times a = 25 \Rightarrow a = 5$.

P.180. *Arătaţi că din şirul* $7, 28, 31, 46, 61, 100$ *nu putem extrage patru numere a căror sumă să se împartă exact la trei.*

(*Clasa a III-a*) **Dragoş Iacob, elev, Iaşi**

Soluţie. Observăm că: $7 = 2 \cdot 3 + 1$, $28 = 9 \cdot 3 + 1$, $31 = 10 \cdot 3 + 1$, $46 = 15 \cdot 3 + 1$, $61 = 20 \cdot 3 + 1$, $100 = 33 \cdot 3 + 1$. Suma a patru numere, din cele de mai sus, este de forma $p \cdot 3 + 4$, care nu se împarte exact la 3.

P.181. *Un triunghi şi un pătrat au acelaşi perimetru, exprimat printr-un număr natural. Care este cea mai mică valoare a perimetrului? Câte valori posibile ale perimetrului sunt cuprinse între* 100 *şi* 200*?*

(*Clasa a IV-a*) **Andreea Alexa, elevă, Iaşi**

Soluţie. a) Dacă a este latura triunghiului, iar b este latura pătratului, atunci $3 \cdot a = 4 \cdot b$, deci b trebuie să se împartă exact la 3. Pentru $b = 3$ obţinem perimetrul minim, care este 12.

b) Avem $100 < 12 \cdot 9 < 12 \cdot 10 < \ldots < 12 \cdot 16 < 200$. Între 100 şi 200 sunt cuprinse 8 valori ale perimetrului.

P.182. *Aflaţi cea mai mică valoare a lui* k *astfel încât* $\dfrac{1}{21} + \dfrac{2}{21} + \dfrac{3}{21} + \cdots + \dfrac{k}{21}$ *să fie un număr natural.*

(*Clasa a IV-a*) **Ionela Bărăgan, elevă, Iaşi**

Soluţie. $\dfrac{1}{21} + \dfrac{2}{21} + \dfrac{3}{21} + \ldots + \dfrac{k}{21} = \dfrac{1 + 2 + 3 + \ldots + k}{21} = \dfrac{(1 + k) \cdot k : 2}{21}$. Pentru $k = 6$ se obţine $\dfrac{1}{21} + \dfrac{2}{21} + \ldots + \dfrac{6}{21} = 1$, iar pentru valori mai mici ale lui k, sumele sunt subunitare.

P.183. *Se consideră nouă numere naturale* $a, b, c, \ldots, i$*. Media aritmetică a numerelor* a *şi* b *este* 1*, media numerelor* c, d *şi* e *este* 5*, iar media numerelor* f, g, h *şi* i *este* 11*. Aflaţi media aritmetică a numerelor* $a, b, c, \ldots, i$ *şi* 9.

(*Clasa a IV-a*) **Ionel Nechifor, Iaşi**

Soluţie. $a + b + c + d + e + f + g + h + i + 9 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 11 + 9 = 70$, iar $70 : 10 = 7$.

Clasa a V-a

V.109. *Aflaţi câtul şi restul împărţirii numărului* $3 \cdot 2^{2009}$ *la* $5 \cdot 2^{2007}$.

Damian Marinescu, Târgovişte

Soluţie. Deoarece $3 \cdot 2^{2009} = (5+1) \cdot 2^{2008} = (5 \cdot 2^{2007}) \cdot 2 + 2^{2008}$, iar $2^{2008} < 5 \cdot 2^{2007}$, câtul căutat este 2, iar restul este 2^{2008}.

V.110. *Determinaţi patru numere naturale* x, y, z, t *cu proprietatea că* $2^{x-1} + 3 \cdot 2^{2y+1} + 5 \cdot 2^{3z+2} + 11 \cdot 2^{5t+1} = 2009$.

Cătălina Drăgan, Galaţi

Soluţie. Trecând numărul 2009 în baza 2, avem că $2009 = 11111011001_{(2)} = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^0$. Pe de altă parte, $2^{x-1} + 3 \cdot 2^{2y+1} + 5 \cdot 2^{3z+2} + 11 \cdot 2^{5t+1} = 2^{x-1} + (2+1) \cdot 2^{2y+1} + (2^2+1) \cdot 2^{3z+2} + (2^3+2+1) \cdot 2^{5t+1} =$

$2^{x-1}+2^{2y+2}+2^{2y+1}+2^{3z+4}+2^{3z+3}+2^{5t+4}+2^{5t+2}+2^{5t+1}$. Identificând, rezultă că $t=1$, $z=2$, $x=y=1$.

V.111. *Demonstraţi că numărul* 20^{200} *are* 261 *de cifre în scrierea în baza* 10.

Geanina Hăvârneanu, Iaşi

Soluţie. Trebuie să demonstrăm că $10^{260} \leq 20^{200} < 10^{261}$, deci că $10^{60} \leq 2^{200} < 10^{61}$. Pentru prima inegalitate, observăm că $10^3 = 1000 < 1024 = 2^{10}$, prin urmare $10^{60} = (10^3)^{20} < (2^{10})^{20} = 2^{200}$. Demonstrăm acum a doua inegalitate:

$$2^{200} = 2^2 \cdot 2^{198} = 4 \cdot (2^{33})^6 = 4 \cdot 8589934592^6 < 10 \cdot (10^{10})^6 = 10^{61}$$

(calculul lui 2^{33} a fost efectuat cu ajutorul unui calculator de buzunar).

V.112. *Demonstraţi că mulţimea* $A = \left\{x = \dfrac{3n+4}{4n+3} \middle| n \in \mathbb{N}, 1000 \leq n \leq 2009\right\}$ *are* 1010 *elemente.*

Daniela Munteanu, Iaşi

Soluţie. Trebuie să demonstrăm că, dacă vom da valori distincte lui n, vom obţine valori distincte ale lui x. Pentru aceasta, să presupunem că avem $\dfrac{3n_1+4}{4n_1+3} = \dfrac{3n_2+4}{4n_2+3}$; atunci $(3n_1+4)(4n_2+3) = (4n_1+3)(3n_2+4)$, de unde $12n_1n_2 + 9n_1 + 16n_2 + 12 = 12n_1n_2 + 16n_1 + 9n_2 + 12$. Rezultă că $n_1 = n_2$ şi rezolvarea este completă.

V.113. *Dacă* $S = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{2009}$, *demonstraţi că* $S > \dfrac{13}{2}$.

Al. Gabriel Mîrşanu, Iaşi

Soluţie. Cum $\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{12}$ şi $\dfrac{1}{12} > \dfrac{39}{2010} > \dfrac{1}{2010} + \dfrac{1}{2011} + \ldots + \dfrac{1}{2048}$, deducem că $S > 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} + \ldots + \dfrac{1}{2048}$. Utlizând acum procedeul uzual, obţinem că $S > 1 + \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}\right) + \left(\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\underbrace{\dfrac{1}{2048} + \ldots + \dfrac{1}{2048}}_{1024 \text{ de termeni}}\right) = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{2} = \dfrac{13}{2}$.

V.114. *Se consideră în plan cinci drepte distincte, care împart planul în mai multe regiuni. Arătaţi că oricum am alege* 2009 *puncte din plan care nu aparţin dreptelor, vor exista cel puţin* 126 *de puncte dintr-o aceeaşi regiune.*

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

Soluţie. Numărul maxim de regiuni în care dreptele împart planul se obţine atunci când ele sunt concurente două câte două, fără însă să existe trei care trec printr-un acelaşi punct. În acest caz, obţinem 16 regiuni; presupunând că în fiecare ar exista cel mult 125 de puncte, numărul total de puncte ar fi cel mult egal cu $125 \cdot 16 = 2000$, absurd. Rămâne atunci adevărată concluzia problemei.

V.115. *O mulţime de numere naturale* $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_9\}$ *are elementele aranjate strict crescător; media aritmetică a primelor două elemente este* 1, *media următoarelor trei este* 5, *iar media ultimelor patru este* 11. *Câte astfel de mulţimi există?*

Ionel Nechifor şi Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Primele două elemente nu pot fi decât $a_1 = 0$, $a_2 = 2$. Suma următoarelor trei este 15, iar $3 \leq a_3 < a_4 < a_5$; avem posibilităţile $(a_3, a_4, a_5) \in \{(3,4,8); (3,5,7); (4,5,6)\}$. Dacă $a_5 = 8$, atunci $(a_6, a_7, a_8, a_9) \in \{(9,10,11,14); (9,10,12,13)\}$. Când $a_5 = 7$, pe lângă cele două cazuri dinainte, mai obţinem încă şapte, anume $(8,9,10,17)$; $(8,9,11,16)$; $(8,9,13,14)$; $(8,10,11,15)$; $(8,10,12,14)$; $(8,11,12,13)$. Dacă $a_5 = 6$, convin cele nouă posiblităţi enunţate, la care se adaugă încă 14 : $(7,8,9,20); \ldots$; $(7,8,14,15)$; $(7,9,10,18); \ldots$; $(7,8,13,15); (7,10,11,16); (7,10,12,15)$; $(7,10,13,14)$; $(7,11,12,14)$. În total, numărul mulţimilor A este $2 + 9 + 23 = 34$.

Clasa a VI-a

Notă. (**Titu Zvonaru, Comăneşti**) În soluţia problemei *VI.95* din *RecMat 2/2009*, pg. 138, se spune că din relaţia $a_1 + 1004a_2 = 2009$, unde $a_1, a_2 \in \mathbb{N}^*$, rezultă că $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. De fapt, mai există şi posibilitatea $a_1 = 1005$, $a_2 = 1$, când obţinem $a_3 = 3 \cdot 1005$, $a_5 = 5 \cdot 1005, \ldots, a_{2007} = 2007 \cdot 1005$, $a_4 = 2$, $a_6 = 3, \ldots, a_{2006} = 1003$, $a_{2008} = 1004$.

VI.109. *Determinaţi $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ pentru care $2a + 3b + 5c + 7d = 87$, dacă:*
a) a, b, c, d sunt numere prime;
b) a, b, c, d sunt pătrate perfecte.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

Soluţie. Observăm că d nu poate lua valori prea mari (cel mult 7 la punctul a), cel mult 9 la b)). Dăm, pe rând, toate valorile posibile lui d şi facem consideraţii asupra mărimii lui c etc. Obţinem soluţiile:

a) $(a, b, c, d) \in \{(2,3,5,7); (2,11,3,5); (3,7,5,5); (3,19,2,2); (5,7,7,3); (7,3,3,7); (11,2,2,7); (11,3,7,3); (11,5,3,5); (13,5,5,3)\}$;

b) $(a, b, c, d) \in \{(0,0,16,1); (0,25,1,1); (1,4,9,4); (4,9,9,1); (16,1,9,1); (16,9,0,4); (16,16,0,1); (36,1,1,1)\}$.

VI.110. *Determinaţi perechile de numere naturale care au suma 2009 şi produsul multiplu al numărului 2009.*

Dan Popescu, Suceava

Soluţie. Fie $a, b \in \mathbb{N}$ astfel încât $a + b = 2009$, iar $ab \vdots 2009$. Cum $2009 = 7^2 \cdot 41$, rezultă că $41|a$ sau $41|b$. Fie $a = 41a_1$; obţinem că $b = 2009 - 41a_1 = 41(49 - a_1)$, deci $b = 41b_1$, cu $a_1 + b_1 = 49$. Din $7^2 \cdot 41 | 41^2 \cdot a_1 b_1$, deducem că $7^2 | a_1 b_1$ şi, ţinând seama şi de condiţia precedentă, găsim că $(a_1, b_1) \in \{(0,49); (7,42); (14,35); (21,28); (28,21); (35,14); (42,7); (49,0)\}$. Corespunzător, obţinem opt perechi (a, b).

VI.111. *Demonstraţi că numărul $A = 40! \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{40}\right)$ este natural, divizibil cu $2009 \cdot 7^2$ (unde $40! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 40$).*

Mihai Haivas, Iaşi

Soluţie. Desfăcând paranteza şi observând că fiecare dintre numitorii $2, 3, \ldots, 40$ divide $40!$, deducem că $A \in \mathbb{N}$. Apoi, avem:

$$A = 40! \cdot \left(1 + \frac{1}{40} + \frac{1}{2} + \frac{1}{39} + \ldots + \frac{1}{20} + \frac{1}{21}\right) = 41 \cdot \left(\frac{40!}{40} + \frac{40!}{2 \cdot 39} + \ldots + \frac{40!}{20 \cdot 21}\right).$$

Cum $40!$ se divide cu 7^5, iar numitorii fracţiilor se divid cel mult cu 7, rezultă că $A = 41 \cdot 7^4 \cdot B = 2009 \cdot 7^2 \cdot B$, cu $B \in \mathbb{N}$.

VI.112. *Fie $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $ad + bc = bd$. Demonstraţi că*

$$\frac{a^{2009}}{b^{2009}} + \frac{a^{2008}c}{b^{2008}d} + \ldots + \frac{a^2c}{b^2d} + \frac{ac}{bd} + \frac{c}{d} \in \mathbb{N}.$$

Cătălin Budeanu, Iaşi

Soluţie. Fie $S_n = x^n + x^{n-1}y + x^{n-2}y + \ldots + xy + y$, $n \in \mathbb{N}^*$, unde $x = \dfrac{a}{b}$, $y = \dfrac{c}{d}$; atunci $S_n = x^{n-1}(x+y) + x^{n-2}y + \ldots + xy + y = x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy + y = S_{n-1}$. Rezultă că $S_n = S_1 = x + y = 1$, deci $S_{2009} = 1$.

VI.113. *După două reduceri succesive, preţul unui frigider scade de la* 2000 *lei la* 1620 *lei. Ştiind că cele două reduceri sunt proporţionale cu preţurile rămase în urma lor, aflaţi preţul frigiderului după prima reducere.*

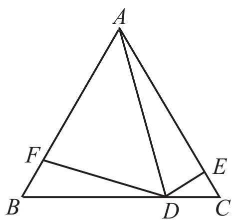
Ciprian Baghiu, Iaşi

Soluţie. Prima dată preţul se reduce cu $p\%$, ajungând la x lei, iar a doua oară se reduce cu $q\%$. Din ipoteză, avem că $\dfrac{p\% \cdot 2000}{(1 - p\%) \cdot 2000} = \dfrac{q\% \cdot x}{(1 - q\%) \cdot x}$, de unde obţinem că $p = q$. Rezultă că $\left(1 - \dfrac{p}{100}\right)^2 \cdot 2000 = 1620$, deci $\left(1 - \dfrac{p}{100}\right)^2 = \left(\dfrac{9}{10}\right)^2$, prin urmare $p = 10$. Asftel, $x = \dfrac{90}{100} \cdot 2000 = 1800$ lei.

VI.114. *Pe laturile $[BC], [AC], [AB]$ ale triunghiului isoscel ABC $(AB = AC)$ considerăm punctele D, E, respectiv F, astfel încât $m(\widehat{BAD}) = 2m(\widehat{EDC})$ şi $m(\widehat{DAC}) = 2m(\widehat{FDB})$. Demonstraţi că $\triangle AEF$ este isoscel.*

Doru Buzac, Iaşi

Soluţie. Fie $a = m(\widehat{EDC})$, $b = m(\widehat{FDB})$; atunci $m(\widehat{BAD}) = 2a$, iar $m(\widehat{CAD}) = 2b$. Măsurile unghiurilor $\widehat{B}$ şi $\widehat{C}$ sunt, fiecare, egale cu $\dfrac{1}{2}[180° - (2a + 2b)] = 90° - a - b$. Cum $\widehat{ADC}$ este unghi exterior triunghiului ABD, obţinem că $m(\widehat{ADC}) = 2a + 90° - a - b = 90° + a - b$. Pe de altă parte, $m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{ADE}) + a$ şi atunci $m(\widehat{ADE}) = 90° - b$. În triunghiul ADE, vom avea că $m(\widehat{AED}) = 180° - 2b - (90° - b) = 90° - b = m(\widehat{ADE})$, prin urmare $AD = AE$. Analog se arată că $AF = AD$ şi astfel rezultă concluzia problemei.



VI.115. *Dreptele a şi b sunt perpendiculare pe segmentul $[AB]$ în A, respectiv în B. Considerăm punctele $C \in (AB)$, $M \in a$, $N, P \in b$ astfel încât între oricare două dintre triunghiurile ACM, BCN şi BCP există câte o congruenţă. Ştiind că $m(\widehat{BPC}) = 25°$, determinaţi măsurile unghiurilor triunghiului MNP.*

Andrei Nedelcu, Iaşi

Soluţie. Între triunghiurile BCN şi BCP, singura congruenţă posibilă este $\triangle BCN \equiv \triangle BCP$. Dacă $\triangle ACM \equiv \triangle BCN \equiv \triangle BCP$, atunci $\widehat{ACM} \equiv \widehat{BCP}$ şi rezultă că punctele M, C, P sunt coliniare. În triunghiul MNP, mediana NC este egală cu jumătatea laturii pe care cade, prin urmare $m(\widehat{MNP}) = 90°$, iar $m(\widehat{NMC}) = 65°$.

În cazul în care $\triangle AMC \equiv \triangle BCN = \triangle BCP$, avem că $m(\widehat{ACM}) = m(\widehat{CNB}) = 90^\circ - m(\widehat{NCB})$, de unde $m(\widehat{MCN}) = 90^\circ$. Triunghiul CNM va fi dreptunghic isoscel, deci $m(\widehat{CNM}) = m(\widehat{CMN} = 45^\circ$. În $\triangle CMP$ isoscel, avem $m(\widehat{MCP}) = 360^\circ - 90^\circ - 2 \cdot 65^\circ = 140^\circ$, astfel că $m(\widehat{CMP}) = m(\widehat{CPM}) = 20^\circ$. Deducem că $m(\widehat{MNP}) = 45^\circ + 25^\circ = 70^\circ$, $m(\widehat{NMP}) = 45^\circ + 20^\circ = 65^\circ$, iar $m(\widehat{NPM}) = 25^\circ + 20^\circ = 45^\circ$.

Clasa a VII-a

VII.109. *Fie $ABCD$ dreptunghi, O mijlocul lui $[AC]$, $M \in (AO)$, $N \in (OC)$, $\{P\} = BM \cap AD$ şi $\{Q\} = BN \cap CD$. Demonstraţi că O este centrul de greutate al triunghiului BPQ dacă şi numai dacă $OM = ON = \dfrac{1}{6}AC$.*

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. Notăm $\{K\} = PQ \cap BD$. Dacă O este centru de greutate în $\triangle BPQ$, atunci K va fi mijlocul lui $[PQ]$, iar $KO = \dfrac{1}{2}OB = \dfrac{1}{2}OD$. În patrulaterul $OPDQ$, diagonalele se înjumătăţesc şi $m(\widehat{D}) = 90^\circ$, prin urmare $OPDQ$ este dreptughi. Obţinem că P şi Q sunt mijloace pentru $[AD]$, respectiv $[CD]$, deci M şi N vor fi centre de greutate în $\triangle BAD$, respectiv $\triangle BCD$. Rezultă că $OM = \dfrac{1}{3}OA = \dfrac{1}{6}AC$ şi, analog, $ON = \dfrac{1}{6}AC$. Reciproca se demontrează urmărind raţionamentul invers.

VII.110. *Măsurile unghiurilor A, B şi C ale triunghiului ABC sunt direct proporţionale cu $5, 4$ şi 3, iar $BC = (2+2\sqrt{2}+2\sqrt{3})$ cm. Demonstraţi că perimetrul şi aria triunghiului sunt numeric egale.*

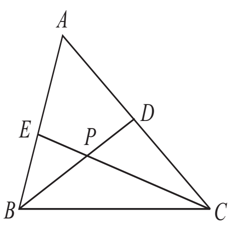
Constantin Apostol, Rm. Sărat

Soluţie. Obţinem imediat că $m(\widehat{A}) = 75^\circ$, $m(\widehat{B}) = 60^\circ$, iar $m(\widehat{C}) = 45^\circ$. Dacă ducem înălţimea AD şi notăm $BD = x$, din $\triangle ABD$ dreptunghic cu $m(\widehat{BAD}) = 30^\circ$ rezultă că $AB = 2x$, $AD = x\sqrt{3}$, iar din $\triangle ADC$ dreptunghic isoscel găsim că $CD = x\sqrt{3}$, $AC = x\sqrt{6}$. Astfel, $BC = x + x\sqrt{3} = 2 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$, de unde $x = \dfrac{2+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{6} - \sqrt{2}$, prin urmare $AB = (4 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2})cm$, $AC = (2\sqrt{6} + 6 - 2\sqrt{3})cm$, iar $AD = (2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - \sqrt{6})cm$. În concluzie, $P_{ABC} = AB + BC + AC = (12 + 4\sqrt{6})cm$ şi $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{BC \cdot AD}{2} = (12 + 4\sqrt{6})cm^2$.

VII.111. *Fie ABC un triunghi şi punctele $D \in (AC)$, $E \in (AB)$, $\{P\} = BD \cap CE$. Dacă $\dfrac{DA}{DC} = k$, demonstraţi că $k\dfrac{PC}{PE} - (k+1)\dfrac{PD}{PB} = 1$.*

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

Soluţie. Cu teorema lui Menelaus în $\triangle ACE$ şi transversala $B - P - D$, obţinem că $\dfrac{DA}{DC} \cdot \dfrac{PC}{PE} \cdot \dfrac{BE}{BA} = 1$, de unde $k \cdot \dfrac{PC}{PE} = \dfrac{AB}{BE}$. Aplicând acum Menelaus în $\triangle ABD$ cu transversala $C - P - E$, deducem că $\dfrac{EB}{EA} \cdot \dfrac{CA}{CD} \cdot \dfrac{PD}{PB} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{CA}{CD} \cdot \dfrac{PD}{PB} = \dfrac{EA}{BE}$, prin urmare $(k+1)\dfrac{PD}{PB} = \dfrac{EA}{BE}$. Scăzând membru cu membru relaţiile



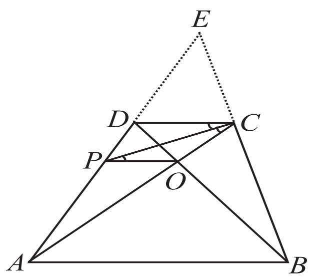
obţinute, rezultă concluzia problemei.

Nota autorului. Dacă BD este mediană, atunci $k = 1$, prin urmare $\dfrac{PC}{PE} - 2 \cdot \dfrac{PD}{PB} = 1$. Această relaţie are loc oricare ar fi ceviana CE, în particular şi atunci când CE este bisectoare. Am găsit astfel o generalizare a problemei 8.4 din *Foaie Matematică 4/2002.*

VII.112. *Fie $ABCD$ trapez cu baza mare $[AB]$, $\{E\} = AD \cap BC$, $\{O\} = AC \cap BD$, iar $OP \| AB$, cu $P \in (AD)$. Demonstraţi că CP şi CE sunt bisectoarele (interioară, respectiv exterioară) unghiului $\widehat{ACD}$, dacă şi numai dacă $AB = AC$.*

Claudiu Ştefan Popa, Iaşi

Soluţie. Presupunem că $AB = AC$. Din asemănările $\triangle APO \sim \triangle ADC$ şi $\triangle OAB \sim \triangle OCD$, obţinem că $\dfrac{AP}{PD} = \dfrac{AO}{OC} = \dfrac{CD}{AB} = \dfrac{CD}{CA}$. Reciproca teoremei bisectoarei arată că CP este bisectoarea unghiului $\widehat{ACD}$. Cum $\widehat{ECD} \equiv \widehat{CBA}$ (corespondente pentru $AB \| CD$, BC secantă) şi $\widehat{CBA} \equiv \widehat{ACB}$ ($\triangle ABC$ isoscel), deducem că $\widehat{ECD} \equiv \widehat{ACB}$, prin urmare $\widehat{ECP} \equiv \widehat{BCP}$. Rezultă astfel că $CP \perp CE$, deci CE va fi bisectoarea exterioară a unghiului $\widehat{ACD}$.



Reciproc, dacă CP şi CE sunt bisectoarele unghiului $\widehat{ACD}$, atunci $PC \perp BE$ şi $\widehat{PCD} \equiv \widehat{PCA}$. Urmează că $\widehat{ECD} \equiv \widehat{BCA}$ şi, cum $\widehat{ECD} \equiv \widehat{CBA}$, atunci $\widehat{ACB} \equiv \widehat{ABC}$, adică $\triangle ABC$ este isoscel cu $AB = AC$.

VII.113. *a) Demonstraţi că* $\sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \dfrac{\sqrt{3} \cdot bc}{\sqrt{b^2 + bc + c^2}}$, $\forall b, c \in \mathbb{R}_+^*$.

b) Considerând un triunghi ABC cu $m(\widehat{A}) = 120^\circ$, $AB = c$, $AC = b$, interpretaţi geometric inegalitatea de la a).

Dan Mocanu, elev, Iaşi

Soluţie. a) Cum b, c sunt pozitive, inegalitatea revine la $(b^2+c^2-bc)(b^2+c^2+bc) \geq 3b^2c^2$, adică $(b^2 + c^2)^2 - b^2c^2 \geq 3b^2c^2$, altfel spus $b^2 + c^2 \geq 2bc$, ceea ce este evident adevărat.

b) Din teorema cosinusului, obţinem că $BC^2 = b^2 + c^2 + bc$. Fie $[AM]$ şi $[AD]$ mediana, respectiv înălţimea din A. Observăm că $AM^2 = \dfrac{2(b^2 + c^2) - BC^2}{4} = \dfrac{b^2 + c^2 - bc}{2}$, deci $AM = \dfrac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 - bc}$, iar $AD = \dfrac{2S}{BC} = \dfrac{bc \sin A}{BC} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}bc}{\sqrt{b^2 + c^2 + bc}}$. Astfel, inegalitatea din enunţ arată că mediana AM este cel puţin egală cu înălţimea AD.

VII.114. *Demonstraţi că produsul a două numere naturale nenule consecutive nu poate fi egal cu produsul altor patru numere naturale consecutive.*

Mihai Crăciun, Paşcani

Soluţie. Presupunem, prin absurd, că există $m, n \in \mathbb{N}$ astfel încât $n(n + 1) = m(m+1)(m+2)(m+3)$; atunci $n^2+n+1 = (m^2+3m+1)^2$. Însă $n^2 < n^2+n+1 <$

$(n+1)^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, prin urmare numărul n^2+n+1 nu poate fi pătrat perfect. Contradicţia la care am ajuns arată că este adevărată concluzia problemei.

VII.115. *Demonstraţi că* $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{4^k\cdot n} > k$, $\forall n,k \in \mathbb{N}^*$.

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

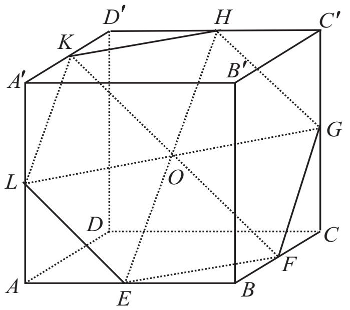
Soluţie. Pentru început, observăm că $S_a = \frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\ldots+\frac{1}{4a} = \left(\frac{1}{a+1}+\ldots+\frac{1}{2a}\right)+\left(\frac{1}{2a+1}+\ldots+\frac{1}{4a}\right) > a\cdot\frac{1}{2a}+2a\cdot\frac{1}{4a} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$, $\forall a \in \mathbb{N}^*$. Cum suma din enunţ este $S_n+S_{4n}+S_{4^2n}+\ldots+S_{4^{k-1}n}$, rezultă că ea depăşeşte $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{k\text{ termeni}} = k$.

Clasa a VIII-a

VIII.109. *Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub de muchie a. Notăm cu E,F,G,H,K,L mijloacele muchiilor $AB,BC,CC',C'D',D'A'$, respectiv $A'A$. Calculaţi volumul poliedrului $B'EFGHKL$.*

Adrian Corduneanu, Iaşi

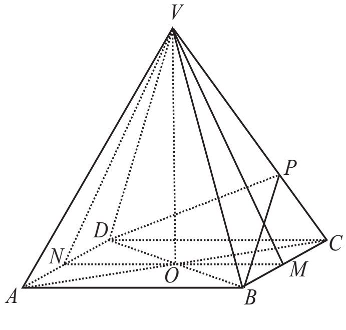
Soluţie. Se arată uşor că punctele E,F,G,H,K,L sunt coplanare. Fiecare dintre segmentele $[EF],[FG],\ldots,[LE],[OE],[OF],\ldots,[OL]$ are lungimea $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, deci $EFGHKL$ este un hexagon regulat de centru O. Mai observăm că $B'E = B'F = \ldots = B'L = \frac{a\sqrt{5}}{2}$; în concluzie, poliedrul $B'EFGHKL$ este o piramidă hexagonală regulată, având aria bazei $6\cdot\frac{EF^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$ şi înălţimea $B'O = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Volumul este $\frac{1}{3}\cdot\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3}{8}$.



VIII.110. *Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată. Notăm cu $u = m(\widehat{(VBC),(ABC)})$, $v = m(\widehat{(VBC),(VCD)})$ şi $t = m(\widehat{(VBC),(VAD)})$. Stabiliţi dacă printre numerele u,v,t pot exista perechi de numere egale. (În legătură cu VIII.98 din RecMat 2/2008.)*

Claudiu Ştefan Popa, Iaşi

Soluţie. Ca în soluţia problemei VIII.98, prezentată în *RecMat 2/2009*, pg. 142, fie $u = m(\widehat{VMN})$, $v = m(\widehat{BPD})$ şi $t = m(\widehat{MVN})$, unde M,N sunt mijloacele lui $[BC]$, respectiv $[AD]$, iar P este piciorul perpendicularei din B pe VC (şi, totodată, al perpendicularei din D pe VC). În locul amintit s-a demonstrat că $v > u$, prin urmare nu putem avea $u = v$. Vom arăta că în nicio piramidă patrulateră regulată nu putem avea $v = t$. Evident, poate avea loc egalitatea $u = t$, în cazul în care $VO = \frac{AB\cdot\sqrt{3}}{2}$, deci când $\triangle VMN$ este echilateral.



Presupunem, prin absurd că $v = t$; atunci $\widehat{OVM} \equiv \widehat{OPB}$ şi, cum cele două unghiuri sunt ascuţie, am obţine că $\operatorname{tg}\widehat{OVM} = \operatorname{tg}\widehat{OPB}$, deci $\dfrac{OM}{VO} = \dfrac{OB}{OP} \Leftrightarrow \dfrac{OM}{VO} = \dfrac{VC}{VO} \Leftrightarrow OM = VC$. Însă, în triunghiul dreptunghic OVC, avem că $VC > OC$, iar în triunghiul dreptunghic OMC avem că $OC > OM$, prin urmare $VC > OM$ în orice piramidă patrulateră regulată. În concluzie, nu este posibil ca două dintre cele trei numere să fie egale.

VIII.111. *Fie ABC un triunghi de laturi a, b, c, astfel încât $b + c = a\sqrt{2}$. Demonstraţi că triunghiul este ascuţitunghic dacă şi numai dacă b şi c sunt distincte şi se află în intervalul* $\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4}, \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}\right)$.

Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă, Blaj

Soluţie. Unghiul $\widehat{A}$ este ascuţit dacă şi numai dacă $a^2 < b^2 + c^2 \Leftrightarrow \dfrac{(b+c)^2}{2} < b^2 + c^2 \Leftrightarrow (b-c)^2 > 0$, deci atunci când $b \neq c$. Unghiul $\widehat{B}$ este ascuţit dacă şi numai dacă $b^2 < a^2 + c^2 \Leftrightarrow b^2 < \dfrac{(b+c)^2}{2} + c^2 \Leftrightarrow b^2 - c^2 < 2c^2 + 2bc \Leftrightarrow b - c < 2c \Leftrightarrow b < 3c$. Analog se arată că $\widehat{C}$ este ascuţit dacă şi numai dacă $c < 3b$. Cum $b + c = a\sqrt{2}$, urmează concluzia problemei.

VIII.112. *Fie $x, y \in \mathbb{R}^*$ astfel încât xy, $\dfrac{x}{y}$ şi $y\sqrt{x^2 + (x+1)^2 + x^2(x+1)^2}$ sunt toate numere raţionale. Demonstraţi că x şi y sunt tot numere raţionale.*

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

Soluţie. Observăm că $x^2 + (x+1)^2 + x^2(x+1)^2 = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (x^2+x+1)^2$, prin urmare $y(x^2+x+1) \in \mathbb{Q}$ şi, cum $xy \in \mathbb{Q}$, rezultă că $y(x^2+1) \in \mathbb{Q}$. Însă $x^2 = (xy) \cdot \dfrac{x}{y} \in \mathbb{Q}$, deci $x^2 + 1 \in \mathbb{Q}$ şi obţinem că $y \in \mathbb{Q}^*$, apoi că $x \in \mathbb{Q}^*$.

VIII.113. *Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, demonstraţi că* $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 2\left(\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a}\right)$ *dacă şi numai dacă $a = b = c$.*

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

Soluţie. Identitatea din enunţ se scrie echivalent sub forma $\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} - \dfrac{4}{a+b}\right) + \left(\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} - \dfrac{4}{b+c}\right) + \left(\dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{a} - \dfrac{4}{c+a}\right) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{(a-b)^2}{ab(a+b)} + \dfrac{(b-c)^2}{bc(b+c)} + \dfrac{(c-a)^2}{ca(c+a)} = 0$. Această din urmă egalitate are loc dacă şi numai dacă $(a-b)^2 = (b-c)^2 = (c-a)^2 = 0$, i.e. $a = b = c$.

VIII.114. *Demonstraţi că oricare ar fi numerele naturale impare m, n cu $m > n + 2$, există numere naturale x, a, b astfel încât $x = a(a+m) = b(b+n)$.*

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Observăm că $a(a+m) = b(b+n) \Leftrightarrow \left(a + \dfrac{m}{2}\right)^2 - \left(b + \dfrac{n}{2}\right)^2 = \dfrac{m^2 - n^2}{4} \Leftrightarrow \left(a + b + \dfrac{m+n}{2}\right)\left(a - b + \dfrac{m-n}{2}\right) = \dfrac{m^2 - n^2}{4}$. Facem alegerea (avem această libertate!) $a+b+\dfrac{m+n}{2}=\dfrac{m^2-n^2}{4}$, $a-b+\dfrac{m+n}{2}=1$, deci $a=\dfrac{(m-n-2)(m+n-2)}{8}$, $b=\dfrac{(m-n-2)(m+n+2)}{8}$. Rămâne să demonstrăm că a,b sunt numere naturale.

Deoarece m şi n sunt ambele impare, numerele $m-n-2$, $m+n-2$, $m+n+2$ sunt toate pare. Dacă $m=M_4+1$, $n=M_4+3$ sau invers, atunci $m-n-2=M_4$, deci $a,b\in\mathbb{N}$. Dacă $m=M_4+1$ şi $n=M_4+1$ sau $m=M_4+3$ şi $n=M_4+3$, atunci $m+n-2=M_4$, $m+n+2=M_4$, deci $a,b\in\mathbb{N}$, ceea ce încheie soluţia problemei.

VIII.115. *Demonstraţi că* $5(a^2+b^2)^2\le 4a^4b^4+(a+b)^4, \forall a,b\in[1,+\infty)$.

Lucian Tuţescu şi Ion Vişan, Craiova

Soluţie. După efectuarea ridicărilor la putere şi reducerea termenilor asemenea, inegalitatea din enunţ se scrie sub forma $a^4+b^4+a^2b^2\le a^4b^4+a^3b+ab^3$. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $1\le a\le b$; atunci $a^4\le a^3b$, $b^4\le a^4b^4$, iar $a^2b^2\le ab^3$. Sumând ultimele trei inegalităţi, obţinem ceea ce dorim. Egalitatea se atinge pentru $a=b=1$.

Clasa a IX-a

IX.101. *Prin inducţie matematică se arată că are loc inegalitatea lui Bernoulli*

$$(1)\qquad (1+x)^n\ge 1+nx,$$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$ *şi* $\forall x\in[-1,\infty)$, *egalitatea fiind atinsă pentru* $x=0$. *Arătaţi că:*

a) dacă $n=2k, k\in\mathbb{N}^*$, *atunci* (1) *are loc* $\forall x\in\mathbb{R}$;

b) dacă $n=2k+1, k\in\mathbb{N}^*$, *atunci* (1) *are loc* $\forall x\in[-2,\infty)$;

c) dacă $n=3$, *atunci* (1) *are loc* $\forall x\in[-3,+\infty)$, *cu egalitate când* $x\in\{-3,0\}$, *iar pentru* $x\in(-\infty,-3)$, (1) *are loc cu sens contrar.*

Dorin Dutkay, Orlando (U.S.A.) şi Florin Popovici, Braşov

Soluţie. a) Dacă $x\in(-\infty,-1)$, atunci $1+x<0$, prin urmare $(1+x)^{2k}>0>1+x>1+2kx$, deci are loc (1).

b) Dacă $x\in[-2,-1)$, atunci $-1\le 1+x<0$, de unde $|1+x|\le 1$. Obţinem că $|1+x|^n\le|1+x|, \forall n\in\mathbb{N}^*$, deci $(1+x)^{2k+1}=-|1+x|^{2k+1}\ge-|1+x|>1+(2k+1)x$.

c) Pentru $n=3$, avem că (1) $\Leftrightarrow 1+3x+3x^2+x^3\ge 1+3x\Leftrightarrow x^2(3+x)\ge 0$. Rezultă că $(1+x)^3=1+3x\Leftrightarrow x\in\{-3,0\}$, $(1+x)^3>1+3x\Leftrightarrow x\in(-3,0)\cup(0,\infty)$ şi $(1+x)^3<1+3x\Leftrightarrow x\in(-\infty,-3)$.

IX.102. *Rezolvaţi în* $\mathbb{R}^3$ *sistemul*:

$$x+y+z=2-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z};\,x^2+y^2+z^2=6-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}-\frac{1}{z^2};\,x^3+y^3+z^3=2-\frac{1}{x^3}-\frac{1}{y^3}-\frac{1}{z^3}.$$

Vasile Chiriac, Bacău

Soluţie. Cu notaţiile $u=x+\dfrac{1}{x}$, $v=y+\dfrac{1}{y}$, $w=z+\dfrac{1}{z}$, sistemul devine $u+v+w=2$, $u^2+v^2+w^2=12$, $u^3+v^3+w^3=8$. Cum $u^2+v^2+w^2=(u+v+w)^2-2(uv+uw+vw)$, obţinem că $uv+uw+vw=-4$. Apoi, deoarece $u^3+v^3+w^3=3uvw+(u+v+w)(u^2+v^2+w^2-uv-uw-vw)$, deducem că $uvw=-8$. Rezultă că numerele u,v şi w sunt soluţiile ecuaţiei $t^3-2t^2-4t+8=0$, i.e. $(t-2)^2(t+2)=0$, prin urmare $(u, v, w) \in \{(2, 2, -2); (2, -2, 2); (-2, 2, 2)\}$. De aici, rezultă că $(x, y, z) \in \{(1, 1, -1); (1, -1, 1); (-1, 1, 1)\}$.

IX.103. *Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$ cu $0 \le x \le y \le z$. Dacă $\alpha \in \mathbb{R}$ este astfel încât $\alpha x + (1-\alpha)z \ge 0$, demonstraţi că $\alpha x + (1-\alpha)y \ge 0$ şi $\alpha y + (1-\alpha)z \ge 0$.*

Ovidiu Pop, Satu Mare

Soluţie. Dacă $x = z$, atunci $x = y = z$ şi concluzia se impune; fie deci $x \ne z$. Notând $\alpha x + (1-\alpha)z = t \ge 0$, rezultă că $\alpha = \dfrac{t-z}{x-z}$ şi atunci $\alpha x + (1-\alpha)y = \dfrac{t(y-x) + x(z-y)}{z-x} \ge 0$, iar $\alpha y + (1-\alpha)z = \dfrac{t(z-y) + z(y-x)}{z-x} \ge 0$.

Altfel, considerăm cazurile $\alpha \in [0, 1]$, $\alpha \in (-\infty, 0)$ şi $\alpha \in (1, \infty)$ şi comparăm cele trei expresii din enunţ termen cu termen.

IX.104. *Fie A, B, C, D patru puncte ale cercului $\mathcal{C}(O, r)$, $\{M\} = AB \cap CD$, N şi P mijloacele coardelor $[AB]$, respectiv $[CD]$, iar Ω cel de-al patrulea vârf al paralelogramului $NMP\Omega$.*

a) Arătaţi că $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{M\Omega}$.

b) Paralelele prin C şi D la AB şi paralelele prin A şi B la CD se taie două câte două în patru puncte ce determină un paralelogram de centru Ω.

c) $\Omega = O$ dacă şi numai dacă $AB \perp CD$.

Diana Vrânceanu, elevă şi Dumitru Mihalache, Bârlad

Soluţie. a) Avem că $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$, unde G este mijlocul segmentului $[NP]$ (deci centrul de greutate al patrulaterului $ABCD$). Însă $\overrightarrow{M\Omega} = 2\overrightarrow{MG}$, de unde rezultă relaţia dorită.

b) Notăm $RSTU$ paralelogramul construit conform enunţului, astfel încât $A \in RU$, $B \in ST$, $C \in RS$, $D \in TU$. Atunci $AMDU$ şi $BMCS$ sunt paralelograme, prin urmare $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MU}$ şi $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MS}$. Notând cu O' mijlocul segmentului $[SU]$, obţinem că

$$2\overrightarrow{MO'} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MS} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{M\Omega} \Rightarrow O' = \Omega,$$

deci Ω este centrul paralelogramului $RSTU$.

c) Deoarece $ON \perp AB$, avem că $\Omega = O \Leftrightarrow ONMP$ paralelogram $\Leftrightarrow ONMP$ dreptunghi $\Leftrightarrow AB \perp CD$.

IX.105. *Într-un triunghi, cu notaţiile uzuale, demonstraţi echivalenţa condiţiilor: (i) $R = r_a$; (ii) $\cos A = \cos B + \cos C$.*

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţia 1. $R = r_a \Leftrightarrow \dfrac{a}{2\sin A} = p \cdot \operatorname{tg}\dfrac{A}{2} \Leftrightarrow a = 4p\sin^2\dfrac{A}{2} \Leftrightarrow 2\sin^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{a}{a+b+c} \Leftrightarrow (a+b+c)\cos A = (a\cos C + c\cos A) + (a\cos B + b\cos A) \Leftrightarrow (a+b+c)\cos A = a(\cos B + \cos C) + (b+c)\cos A \Leftrightarrow \cos A = \cos B + \cos C$.

Soluţia 2. $R = r_a \Leftrightarrow \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{S}{p-a} \Leftrightarrow 4S^2 = abc(p-a) \Leftrightarrow 4p(p-b)(p-c) = abc \Leftrightarrow (a+b+c)(a^2-b^2-c^2+2bc) = 2abc \Leftrightarrow a(a^2-b^2-c^2) + b(a^2-b^2-c^2) + 2b^2c + c(a^2-b^2-c^2) + 2bc^2 = 0 \Leftrightarrow a(b^2+c^2-a^2) = b(a^2+c^2-b^2) + c(a^2+b^2-c^2) \Leftrightarrow \cos A = \cos B + \cos C$.

Soluţia 3. Utilizând formulele $r_a = 4R \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ şi $\cos A - \cos B - \cos C = 1 - 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ (Traian Lalescu-*Geometria triunghiului*; 16.38 şi 13.5), avem:

$$R = r_a \Leftrightarrow 1 = 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \Leftrightarrow \cos A - \cos B - \cos C = 0.$$

Nota autorului. Problema este consistentă, în sensul că există triunghiuri în care să fie îndeplinite condiţiile echivalente din enunţ, de exemplu triunghiul isoscel şi dreptunghic în B sau cel isoscel de laturi $a = 2(\sqrt{3} - 1)$, $b = c = 2$.

Clasa a X-a

X.101. *Calculaţi suma* $S = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2k+1}}}{\arcsin\frac{\sqrt{2k+1}}{k+1}}$.

Bencze Mihály, Braşov

Soluţie. Fie $x_k = \arcsin\dfrac{\sqrt{2k+1}}{k+1}$ şi $y_k = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{2k+1}}$; evident că $x_k \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, iar $y_k \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$. Avem că $\operatorname{tg} x_k = \dfrac{\sin x_k}{\sqrt{1 - \sin^2 x_k}} = \dfrac{\sqrt{2k+1}}{k}$ şi $\operatorname{tg} 2y_k = \dfrac{2\operatorname{tg} y_k}{1 - \operatorname{tg}^2 y_k} = \dfrac{\sqrt{2k+1}}{k}$, prin urmare $\operatorname{tg} x_k = \operatorname{tg} 2y_k$. Cum funcţia tangentă este injectivă pe $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, deducem că $x_k = 2y_k$, deci $\dfrac{y_k}{x_k} = \dfrac{1}{2}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$. Suma cerută este $S = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2} = \dfrac{n}{2}$.

X.102. *Rezolvaţi ecuaţia* $\dfrac{1}{2^x} + \log_2\left(x - \dfrac{7}{4}\right) + \dfrac{7}{4} = 0$.

Eugen Jecan, Dej

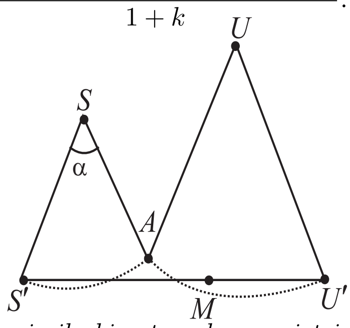
Soluţie. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \left(\dfrac{7}{4}, +\infty\right)$, $f(x) = \dfrac{1}{2^x} + \dfrac{7}{4}$. Evident, f este injectivă (fiind strict descrescătoare) şi surjectivă, deci este inversabilă, cu inversa $f^{-1} : \left(\dfrac{7}{4}, +\infty\right) \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = -\log_2\left(y - \dfrac{7}{4}\right)$. Ecuaţia dată se scrie atunci sub forma $f(x) = f^{-1}(x)$, care revine la $f(x) = x$ (graficele funcţiilor f şi f^{-1} nu se pot intersecta decât pe prima bisectoare). Cum f este strict descrescătoare, iar $g(x) = x$ este strict crescătoare, ecuaţia $f(x) = x$ are cel mult o soluţie. Se observă uşor că $x_0 = 2$ verifică ecuaţia, prin urmare este unica soluţie a acesteia.

X.103. *Fie S, U, A trei puncte distincte. Rotind vectorul $\overrightarrow{SA}$ în jurul lui S, cu un arc $\alpha \in (-\pi, \pi)$, obţinem punctul S'; rotind apoi $\overrightarrow{UA}$ în jurul lui U, cu un arc $\beta \in (-\pi, \pi)$, obţinem U', $U' \neq S'$. Fie $M \in S'U'$ astfel încât $\overrightarrow{S'M} = k \cdot \overrightarrow{MU'}$, unde $k \in \mathbb{R}\backslash\{0, -1\}$. Demonstraţi că poziţia punctului M nu depinde de A atunci şi numai atunci când $k = 1$, $\beta = \alpha \pm \pi$**.

Diana Vrânceanu, elevă şi Dumitru Mihalache, Bârlad

*Generalizare a *problemei comorii din insulă* a lui G. Gamow, din *One, Two, Three ... Infinity.*

Soluţie. Vom nota cu x afixul punctului X, prin raportare la un reper arbitrar din planul complex şi fie $\omega = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $\tau = \cos\beta + i\sin\beta$. Atunci $s' = s + \omega(a - s)$, $u' = u + \tau(a - u)$, prin urmare $m = \dfrac{s' + ku'}{1 + k} = \dfrac{s + ku + ws - k\tau u + a(\omega + k\tau)}{1 + k}$. Astfel, poziţia punctului M nu depinde de A dacă şi numai dacă $\omega + k\tau = 0$. Cum $k \neq 0$ şi $S' \neq U'$, nu vom putea avea $\omega = 0$ sau $\tau = 0$, deci $\omega + k\tau = 0 \Leftrightarrow k = -\dfrac{\omega}{\tau} = -\cos(a - \beta) - i\sin(\alpha - \beta) \in \mathbb{R}\backslash\{-1\} \Leftrightarrow \sin(\alpha - \beta) = 0$ şi $\cos(\alpha - \beta) \neq 1 \Leftrightarrow \alpha - \beta = \pm\pi$ şi $k = 1$, adică chiar cerinţa problemei.



Problema *comorii din insulă* se obţine pentru $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, $\beta = -\dfrac{\pi}{2}$.

X.104. *Fie p, l_a, l_b, l_c semiperimetrul, respectiv lungimile bisectoarelor unui triunghi. Determinaţi numerele reale α şi β, în funcţie de p, ştiind că soluţiile ecuaţiei $x^3 - p\sqrt{3}\cdot x^2 + \alpha x - \beta = 0$ sunt l_a, l_b şi l_c.*

Cătălin Calistru, Iaşi

Soluţie. Se ştie că $l_a^2 = \dfrac{4bc}{(b+c)^2}\cdot p(p-a)$, prin urmare $l_a^2 \leq p(p-a)$. Rezultă că $l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \leq p(p - a + p - b + p - c) = p^2$, de unde, aplicând CBS, deducem că $(l_a+l_b+l_c)^2 \leq 3(l_a^2+l_b^2+l_c^2) \leq 3p^2$, deci $l_a+l_b+l_c \leq p\sqrt{3}$, cu egalitate când $l_a = l_b = l_c$. Însă, cum l_a, l_b, l_c sunt soluţiile ecuaţiei din enunţ, avem că $l_a+l_b+l_c = p\sqrt{3}$. Obţinem că triunghiul este echilateral, iar $l_a = l_b = l_c = \dfrac{p\sqrt{3}}{3}$. Din relaţiile lui Viète găsim că $\alpha = \sum l_a l_b = p^2$, iar $\beta = l_a l_b l_c = \dfrac{p^3\sqrt{3}}{9}$.

X.105. *Determinaţi cel mai mare număr real α astfel încât inegalitatea*

$$\frac{\sin x + \sin y}{2} \leq \alpha\cdot\frac{\sin\frac{x+3y}{4} + \sin\frac{3x+y}{4}}{2} + (1-\alpha)\sin\frac{x+y}{2}$$

să fie adevărată pentru orice $x, y \in [0, \pi]$.

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Transformând sumele în produse, inegalitatea se scrie sub forma

$$\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \leq \alpha\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{4} + (1-\alpha)\sin\frac{x+y}{2}.$$

Însă $x, y \in [0, \pi]$, deci $\sin\dfrac{x+y}{2} \geq 0$ (cu egalitate când $x = y = 0$ sau $x = y = \pi$), deci ne rămâne

$$\cos\frac{x-y}{2} \leq \alpha\cos\frac{x-y}{4} + 1 - \alpha, \qquad \forall x, y \in [0, \pi] \tag{1}$$

(pentru cazurile $x = y = 0$ şi $x = y = \pi$, (1) se verifică direct). Observăm că $\dfrac{x-y}{4} \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$, $\forall x, y \in [0, \pi]$, astfel că $t = \cos\dfrac{x-y}{4}$ parcurge intervalul $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$, iar (1) devine

$$(2) \qquad 2t^2 - \alpha t - 2 + \alpha \le 0, \qquad \forall t \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right].$$

Considerând $t = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, obţinem că $\alpha \le 2 + \sqrt{2}$. Pentru $\alpha = 2 + \sqrt{2}$ relaţia (2) devine $2\left(t - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)(t-1) \le 0$, $\forall t \in \left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$ şi este evident adevărată. Rezultă că valoarea maximă dorită a lui α este $2 + \sqrt{2}$.

Clasa a XI-a

XI.101. *Pentru $a \in \mathbb{R}_+^*$, calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x - e^a\right)$.*

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

Soluţie. Avem:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} x\left(\left(1+\frac{a}{x}\right)^x - e^a\right) = \lim_{x\to\infty} e^a \cdot x \cdot (e^{x\ln(1+\frac{a}{x})-a} - 1) = \\
&= e^a \cdot \lim_{x\to\infty} x \frac{e^{x\ln(1+\frac{a}{x})-a} - 1}{x\ln(1+\frac{a}{x}) - a}(x\ln(1+\frac{a}{x}) - a) = \\
&= e^a \cdot 1 \cdot \lim_{x\to\infty} x(x\ln(1+\frac{a}{x}) - a) = e^a \lim_{x\to\infty} x^2\left(\ln(1+\frac{a}{x}) - \frac{a}{x}\right) = \\
&= a^2 e^a \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{a}{x}) - \frac{a}{x}}{(\frac{a}{x})^2} = a^2 e^a \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \frac{\ln(1+y) - y}{y^2} = \\
&= a^2 e^a \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \frac{\frac{1}{1+y} - 1}{2y} = \frac{a^2 e^a}{2} \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \frac{-y}{y(1+y)} = -\frac{a^2 e^a}{2}.
\end{aligned}$$

XI.102. *Determinaţi funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(x^2) - f(y^2) = (x+y)f(x-y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Considerând $x = y \neq 0$, obţinem că $0 = 2x \cdot f(0)$, deci $f(0) = 0$. Apoi, luând $y = 0$, obţinem că $f(x^2) = xf(x)$, prin urmare $\dfrac{f(x^2)}{x^2} = \dfrac{f(x)}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$. Astfel, funcţia $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ are proprietatea că $g(x^2) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$. Pentru $x > 0$, rezultă că $g(x) = g(\sqrt{x}) = g(\sqrt[2^2]{x}) = \ldots = g(\sqrt[2^n]{x})$ şi, folosind continuitatea lui g, deducem că $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g(\sqrt[2^n]{x}) = g(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{x}) = g(1)$, $\forall x \in (0, \infty)$. Pentru $x < 0$, $g(x) = g(x^2) = g(1)$, deci $g(x) = A$, $\forall x \neq 0$. Obţinem că $f(x) = Ax$, $\forall x \neq 0$ şi, cum $f(0) = 0$, avem că $f(x) = Ax$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

XI.103. *Fie $(x_n)_{n\ge1} \subset \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} n(x_{n+1} - x_n) = a \in (1, +\infty)$; definim şirul $(y_n)_{n\ge1}$ prin $y_n = \dfrac{n\ln n}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}$. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} (y_n)^n$.*

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

Soluţie. Cum $\lim_{n\to\infty} n(x_{n+1}-x_n)=a>1$, rezultă că există $k\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $p(x_{p+1}-x_p)>1, \forall p\geq k$, prin urmare $x_{p+1}-x_p>\frac{1}{p}, \forall p\geq k$. Dând lui p valorile $k, k+1,\ldots,n-1$ şi adunând relaţiile obţinute, deducem că $x_n-x_k>\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\ldots+\frac{1}{n-1}$, de unde $\lim_{n\to\infty} x_n=+\infty$. Conform lemei Stolz-Cesaro, calculul limitei şirului $(y_n)_{n\geq 1}$ revine la calculul limitei $\frac{(n+1)\ln(n+1)-n\ln n}{x_{n+1}}=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{x_{n+1}}+\frac{\ln(n+1)}{x_{n+1}}$. Limita primei fracţii este $\frac{1}{\infty}=0$, iar pentru cea de-a doua folosim din nou Stolz-Cesaro. Obţinem că $\lim_{n\to\infty} y_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+2)-\ln(n+1)}{x_{n+2}-x_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{(n+1)(x_{n+2}-x_{n+1})}=\frac{1}{a}\in(0,1)$, prin urmare $\lim_{n\to\infty}(y_n)^n=0$.

XI.104. *Calculaţi* $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^5}{5^1}+\frac{2^5}{5^2}+\frac{3^5}{5^3}+\ldots+\frac{n^5}{5^n}\right)$.

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

Soluţie. Notăm $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^5}{5^k}$, $b_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4}{5^k}$, $c_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{5^k}$, $d_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{5^k}$, $e_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{5^k}$, $f_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{5^k}$. Dezvoltând după formula binomului $(k+1)^i$, $i=\overline{1,5}$, împărţind prin 5^{k+1}, dând valori lui k de la 1 la n şi sumând, obţinem:

$$a_{n+1}-\frac{1}{5}=\frac{1}{5}(a_n+5b_n+10c_n+10d_n+5e_n+f_n) \tag{1}$$

$$b_{n+1}-\frac{1}{5}=\frac{1}{5}(b_n+4c_n+6d_n+4e_n+f_n) \tag{2}$$

$$c_{n+1}-\frac{1}{5}=\frac{1}{5}(c_n+3d_n+3e_n+f_n) \tag{3}$$

$$d_{n+1}-\frac{1}{5}=\frac{1}{5}(d_n+2e_n+f_n) \tag{4}$$

$$e_{n+1}-\frac{1}{5}=\frac{1}{5}(e_n+f_n). \tag{5}$$

Observăm că $\lim_{n\to\infty} f_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5}\cdot\frac{1-\frac{1}{5^n}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}$. Mai observăm că fiecare dintre şirurile $a_n, b_n, \ldots, e_n$ este convergent (cel mai simplu, folosind criteriul rădăcinii pentru serii, însă se pot face şi majorări elementare). Trecând succesiv la limită în relaţile (5), (4), …, (1), obţinem că $\lim_{n\to\infty} e_n=\frac{5}{16}$, $\lim_{n\to\infty} d_n=\frac{15}{32}$; $\lim_{n\to\infty} c_n=\frac{115}{128}$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\frac{285}{128}$ şi, în final, $\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{3535}{512}$.

XI.105. *Considerăm matricele* $A_k, B_k\in\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$, $k\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, *astfel încât* $detA_k=\alpha\in\mathbb{C}^*$, $\forall k\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. *Studiaţi convergenţa şirului* $(a_n)_{n\geq 2}$ *definit prin*

$$a_n = \lim_{x\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{det(A_k x + B_k)}{k! \cdot x^k}.$$

Cătălin Calistru, Iaşi

Soluţie. Ţinând cont de proprietăţile determinanţilor, avem:

$$a_n = \lim_{x\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{\det(A_k \cdot x + B_k)}{k! \cdot x^k} = \sum_{k=2}^{n} \left(\lim_{x\to\infty} \frac{\det(A_k + \frac{1}{x} B_k)}{k!} \right) =$$
$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{\det A_k}{k!} = \sum_{k=2}^{n} \frac{\alpha}{k!} = \alpha \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} - 2 \right),$$

prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha(e-2)$.

Clasa a XII-a

XII.101. *Rezolvaţi ecuaţia* $x^2 + x + 1 = 0$ *în* $\mathbb{Z}_{13}$ *şi în* $\mathbb{Z}_{19}$*, apoi deduceţi că* 247 *divide* $(3^{7^n-1} - 1)(7^{4^n-1} - 1)$*, oricare ar fi* $n \in \mathbb{N}$.

Mihai Haivas, Iaşi şi I.V. Maftei, Bucureşti

Soluţie. Prin verificări directe, obţinem că ecuaţia dată are în $\mathbb{Z}_{13}$ soluţiile $\widehat{3}$ şi $\widehat{9}$, iar în $\mathbb{Z}_{19}$ are soluţiile $\overline{7}$ şi $\overline{11}$. Cum $X^3 - 1 = (X-1) \cdot (X^2 + X + 1)$, rezultă că $\widehat{9}^3 = \widehat{1}$ (în $\mathbb{Z}_{13}$), iar $\overline{7}^3 = \overline{1}$ (în $\mathbb{Z}_{19}$). Atunci

$$\widehat{3}^{7^n-1} - \widehat{1} = \widehat{3}^{(7-1)(7^{n-1}+\ldots+7+1)} - \widehat{1} = \widehat{0} \Rightarrow 13 | 3^{7^n-1} - 1, \forall n \in \mathbb{N},$$
$$\overline{7}^{4^n-1} - \overline{1} = \overline{7}^{(4-1)(4^{n-1}+\ldots+4+1)} - \overline{1} = \overline{0} \Rightarrow 19 | 7^{4^n-1} - 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Obţinem astfel că $13 \cdot 19 \big| (3^{7^n-1} - 1)(7^{4^n-1} - 1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

XII.102. *Determinaţi primitivele funcţiei* $f : \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{\cos 2x}{(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^{2009}}$.

Nicoleta Bran, Craiova

Soluţie. Avem că

$$\int f(x)dx = \int \frac{\cos 2x}{\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right)^{2009}} dx = \int \frac{\cos 2x}{\left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x}\right)^{2009}} dx =$$
$$= \int \cos 2x \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^{2009} dx = \frac{1}{2^{2010}} \int \sin^{2009} 2x (\sin 2x)' dx = \frac{\sin^{2010} 2x}{2010 \cdot 2^{2010}} + \mathcal{C}.$$

XII.103. *Demonstraţi că există* $c \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ *pentru care*

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (e^{\operatorname{tg} x} - 1) dx \leq \frac{\pi^2}{32} \cdot \frac{e^{\operatorname{tg} c}}{\cos^2 c}.$$

Bogdan Victor Grigoriu, Fălticeni

Soluţie. Considerăm funcţia $f : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\operatorname{tg} x}$, pentru care $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} e^{\operatorname{tg} x} > 0$, iar $f''(x) = \frac{1 + \sin 2x}{\cos^4 x} e^{\operatorname{tg} x} > 0, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Rezultă că funcţia f este strict crescătoare şi convexă; graficul său având capetele $A(0,1)$ şi $B\left(\frac{\pi}{4}, e\right)$, înseamnă că G_f se află sub dreapta AB, de ecuaţie $y = \frac{4(e-1)}{\pi} x + 1$. Deducem că $e^{\operatorname{tg} x} - 1 \leq \frac{4(e-1)}{\pi} x$ şi, integrând această inegalitate pe $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, obţinem că $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (e^{\operatorname{tg} x} - 1) dx \leq \frac{\pi(e-1)}{8}$. Pe de altă parte, aplicând lui f teorema lui Lagrange, găsim $c \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ pentru care $\frac{f(\frac{\pi}{4}) - f(0)}{\frac{\pi}{4} - 0} = f'(c)$, adică $\frac{4(e-1)}{\pi} = \frac{1}{\cos^2 c} \cdot e^{\operatorname{tg} c}$. Combinând ultimele două relaţii, rezultă concluzia problemei.

XII.104. *Determinaţi funcţiile derivabile $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ pentru care $f(0) = 0$, iar $f'(x) = f(ax), \forall x \in [0,1]$, cu $a \in [0,1]$ fixat.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Funcţia f este continuă pe compactul $[0,1]$, deci este mărginită: $\exists M > 0$ astfel încât $-M \leq f(x) \leq M$. Cum $f'(x) = f(ax)$, $\forall x \in [0,1]$, cu $a \in [0,1]$, înseamnă că $-M \leq f'(x) \leq M$, $\forall x \in [0,1]$, de unde $-M \int_0^x dt \leq \int_0^x f'(t) dt \leq M \int_0^x dt$, adică $-Mx \leq f(x) \leq Mx$, $\forall x \in [0,1]$. Obţinem că $-Max \leq f'(x) \leq Max$ şi, după o nouă integrare, rezultă că $-Ma\frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq Ma\frac{x^2}{2}$. Continuând procedeul, deducem inductiv că $-M \cdot a \cdot a^2 \cdot \ldots \cdot a^{n-1} \frac{x^n}{n!} \leq f(x) \leq M \cdot a \cdot a^2 \cdot \ldots \cdot a^{n-1} \frac{x^n}{n!}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,1]$. Trecând la limită după $n \to \infty$, obţinem că $f(x) = 0$, $\forall x \in [0,1]$ şi această funcţie verifică toate condiţiile din enunţ.

XII.105. *Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie semiconvexă ($f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$, $\forall x, y \in (0, \infty)$).*

a) Demonstraţi că, pentru orice $x \in (0, \infty)$, şirul $(f_n(x))_{n \geq 1}$ definit prin $f_n(x) = n\left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right]$ este monoton.

b) Deduceţi că pentru orice $x \in (0, \infty)$, şirul $(e_n(x))_{n \geq 1}$ definit prin $e_n(x) = \left(1 + \frac{1}{nx}\right)^n$ este crescător.

Dan Ştefan Marinescu şi Viorel Cornea, Hunedoara

Soluţie. a) Dacă f este semiconvexă, se arată prin inducţie că $f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, de unde $f(rx + (1-r)y) \leq rf(x) + (1-r)f(y)$,

$\forall x, y \in (0, \infty)$, $\forall r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Fie $x \in (0, \infty)$ fixat; atunci

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = (n+1)\left[f\left(x + \frac{1}{n+1}\right) - f(x)\right] - n\left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right] =$$
$$= (n+1)\left[f\left(x + \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1}f(x) - \frac{n}{n+1}f\left(x + \frac{1}{n}\right)\right] \leq$$
$$\leq (n+1)\left[f\left(x + \frac{1}{n+1}\right) - f\left(\frac{1}{n+1}x + \frac{n}{n+1}\left(x + \frac{1}{n}\right)\right)\right] = 0,$$

prin urmare şirul $(f_n(x))_{n\geq 1}$ este descrescător.

b) Considerăm funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\lg x$, care este evident semiconvexă. Atunci, şirul de termen general $f_n(x) = n[\lg x - \lg(x + \frac{1}{n})]$ este descrescător, de unde şirul $(-f_n(x))_{n\geq 1}$ este crescător, unde $-f_n(x) = \lg(1 + \frac{1}{nx})^n$. Obţinem astfel că şirul $(e_n(x))_{n\geq 1}$ este crescător.

Recreaţii ... matematice

Pitagora şi şcoala pitagorică–miracolul grecesc

Gândirea pitagorică este un moment de răscruce în istoria cunoaşterii. *Cunoaşterea empirică* este înlocuită cu o nouă atitudine a gândirii în confruntarea cu realitatea înconjurătoare: *raţionamentul* şi *demonstraţia.* Cum s-a petrecut în mod precis, acum peste 2500 de ani, această schimbare va fi pentru totdeauna un mister. *Nici un matematician* – spune *Octav Onicescu* –, *atât cât această rasă ştiinţifică va continua să existe, nu poate renunţa la silinţa de a înţelege cum s-a realizat pentru întâia oară într-un mod precis şi categoric înlănţuirea logică, ce s-a chemat de atunci demonstraţie.*

De la **Pitagora** (∼580-∼500) nu s-a păstrat nimic scris. Lui **Pitagora** şi **şcolii pitagorice**, pe frontispiciul căreia era scrisă deviza *Numerele guvernează lumea,* le sunt atribuite prin tradiţie rezultate importante care constituie elemente fundamentale ale ştiinţei actuale.

La nord de antica *Crotona* (astăzi Cortona), unde profesa Pitagora, pe drumul ce duce la *Metapont* (astăzi Taranto), unde legenda spune că a murit Pitagora, există o regiune mică cunoscută sub numele ei latin de *Terra Imaginationis.* În această regiune, nu departe de autostrada care şerpuieşte de-a lungul coastei calabreze, se află cătunul *San Mathesis.* Puţin la stânga, în afara satului, se găseşte o capelă gotică cunoscută sub numele de *Capela Pitagora.* În această capelă, pe podea, în faţa altarului, se află o lespede de marmură albă stearsă de vremuri şi paşii vizitatorilor. Literele rămase din inscripţia de pe ea arată că în timpurile de demult legenda spunea: AICI ODIHNESC OASELE LUI PITAGORA DIN SAMOS. Un preot ţine aprinse, zi şi noapte, cinci candele aşezate în cinci firide în jurul altarului, ca o dovadă că *pentagrama* (pentagonul stelat) era semnul de unire al discipolilor lui Pitagora. Acelaşi preot dezvăluie vizitatorilor semnificaţia acestor candele: