Concursul de matematică "Student pentru o zi"
Ediţia a III-a, Suceava, 20 martie 2010

Problema 1. Se consideră funcţiile $f, g : (0, 3) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{3 - x}$ şi $g(x) = \dfrac{\ln(3 - x)}{x}$, pentru orice $x \in (0, 3)$.

a) Să se calculeze $\displaystyle\int_1^e (3 - x)f(x)dx$.

b) Să se arate că $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 g(x)dx$.

c) Să se arate că $\displaystyle\lim_{t \to 0} \int_t^1 g(x)dx = \infty$.

Problema 2. Se consideră polinomul definit prin $P(X) = X^3 + \widehat{6}X^2 + \widehat{11}X + \widehat{6}$, cu coeficienţii în $\mathbb{Z}_{2010}$.

a) Să se arate că polinomul are cel puţin trei rădăcini distincte în $\mathbb{Z}_{2010}$.

b) Să se arate că polinomul are o rădăcină de forma $\widehat{10k - 1}$, $k \in \mathbb{Z}$, diferită de $\widehat{2009}$.

c) Să se arate că polinomul are cel puţin şase rădăcini distincte în $\mathbb{Z}_{2010}$.

Cătălin Ţigăeru, Suceava

Problema 3. Fie M mulţimea funcţiilor $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue, cu proprietatea că $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$.

a) Determinaţi valorile lui a şi b pentru care funcţiile $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax+1$ şi $g(x) = \dfrac{1}{2} + \sqrt{\dfrac{x}{2} + b}$ aparţin mulţimii M.

b) Arătaţi că mulţimea M este infinită.

c) Determinaţi $\max\{\displaystyle\int_0^1 f(x)dx | f \in M\}$.

Ion Bursuc, Suceava