Concursul de matematică "Florica T. Câmpan"
Ediţia a X-a, Iaşi, 2010

Se aude (mai des decât ar intra în umbra unor posibile justificări) că matematicienii ar fi reci, ne-iubitori, severi şi inumani. Prostia este atât de mare încât nici nu merită combătută; moare sufocată de propria osânză.

Concursurile "Florica T. Câmpan" au împlinit 10 ani. Nu numărăm ediţii: judeţene, interjudeţene, adresate şi celor foarte mici etc. Fiecare exprimă prinos de afecţiuni: ale Floricăi pentru matematică şi pentru cei ce o îndrăgesc, ale propunătorilor şi corectorilor, ale sponsorilor, ale participanţilor.

10 ani de afecţiune reciprocă! Doar o mamă care şi-a crescut odrasla are o imagine sugestivă a unei astfel de perioade! Pe lângă satisfacţii apar mereu pozne, boli, influenţe negative, temeri de evoluţii strâmbe. Părinţii concursurilor "FTC" se arată încrezători în odraslă: merge pe drum drept şi bun.

În lumea asta există şi zmei răi, mai urâţi decât cei din poveşti. Nu le pasă că lumea sau şcoala se vestejesc; socotesc important doar ce curge spre buzunare proprii. Copii! Nu vă temeţi de Bau-Bau! Citiţi mai jos cum ultimul FTC pregăteşte paloşuri şi buzdugane contra zmeilor inconştienţi. Nu vă grăbiţi să deveniţi discipoli şi slugi ale zmeilor. Întăriţi-vă acum, ascuţiţi paloşe şi pregătiţi-vă de noi concursuri. Poate va veni o vreme când veţi fi destul de tari să ridicaţi buzdugane contra unor rele.

Prof.dr. Dan Brânzei

Etapa judeţeană, 20 februarie 2010

Clasa a IV-a

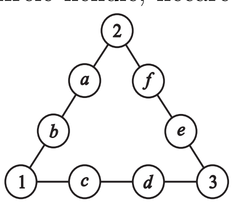
1. Suma a patru numere este 2021. Dacă îl împărţim pe primul la al doilea, pe al doilea la al treilea şi pe al treilea la al patrulea obţinem, de fiecare dată, câtul 2 şi restul 1. Aflaţi numerele.

Doina Lăcrămioara Nechifor

2. Cătălin, Lucian şi Gabriel au împreună 29 de portocale. Aflaţi câte portocale are fiecare dintre ei, ştiind că Lucian are de trei ori mai multe portocale decât Cătălin iar Gabriel are mai multe portocale decât Cătălin şi mai puţine decât Lucian.

Cătălin Budeanu

3. În figura alăturată, în locul literelor trebuie puse toate cifrele nenule, fiecare câte o singură dată; cifrele 1, 2 şi 3 sunt deja fixate.



a) Aflaţi suma celor patru numere de pe fiecare latură a triunghiului şi justificaţi cum aţi obţinut-o, ştiind că suma de pe fiecare latură este aceeaşi.

b) Înlocuiţi literele cu cifre pentru a obţine o astfel de sumă.

c) Câte astfel de distribuţii ale numerelor 4,5,6,7,8,9 pe această figură există, ţinând cont ca suma numerelor de pe fiecare latură să fie aceeaşi?

4. (*Problema suplimentară*) Un pătrat de hârtie are latura de 7 cm. Desenaţi cum se pot decupa din acest pătrat patru triunghiuri identice şi un pătrat. (Găsiţi cât mai multe modalităţi!)

Dan Brânzei

Clasa a V-a

1. Ciocolatele sunt ambalate în cutii de câte 6, 9 şi 20 de bucăţi. În câte moduri putem cumpăra 33 de ciocolate? Dar 43? (Notă: Cutiile nu se desfac.)

Nelu Tudorache

2. Se consideră mulţimea $A = \{2, 3, 4, \ldots, 11, 12\}$.

a) Care este cel mai mic număr de numere care trebuie excluse din A, astfel încât numerele rămase să poată fi împărţite în două mulţimi care au proprietatea că suma numerelor din prima mulţime este egală cu suma numerelor din a doua mulţime?

b) Care este cel mai mic număr de elemente care trebuie excluse din A, astfel încât numerele rămase să poată fi împărţite în două mulţimi care au proprietatea că produsul numerelor din prima mulţime este egal cu produsul numerelor din a doua mulţime?

3. a) Considerăm nouă numere diferite de 10. Arătaţi că printre acestea există cel puţin cinci numere care sunt fie mai mici decât 10, fie mai mari decât 10.

b) Un elev cumpără mai multe cărţi. Constată că toate cărţile au preţuri diferite, niciuna nu costă 10 lei şi în orice grupă de cinci cărţi găseşte două cu suma preţurilor egală cu 20 lei. Arătaţi că elevul a cumpărat cel mult 8 cărţi şi daţi un exemplu de listă de preţuri pentru cărţi care îndeplineşte toate condiţiile date.

Gheorghe Iurea şi Nelu Tudorache

Clasa a VI-a

1. Fie $a, b, c \in \mathbb{N}$ impare, $d_1 = (a, b, c)$, iar $d_2 = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}\right)$. Arătaţi că $d_1 = d_2$. (Notaţia (a, b, c) desemnează cel mai mare divizor comun al numerelor a, b, c.)

2. Gigel şi Costel se antrenează zilnic 1 oră 53 minute 24 secunde pentru a participa la Turul României la ciclism. Antrenamentul îl efectuează pe o pistă circulară cu lungimea de 2268 m, mişcându-se uniform. Ei pleacă în acelaşi timp şi din acelaşi loc A, în sensuri contrare. După ce s-au întâlnit prima dată în punctul B, lui Gigel i-au mai trebuit 81 de secunde iar lui Costel 144 de secunde pentru a ajunge în A.

a) Cu ce viteză s-a deplasat fiecare biciclist?

b) Ce distanţă a parcurs fiecare biciclist într-o zi de antrenament?

Artur Bălăucă

3. Itsy şi Bitsy sunt doi copii extratereştri de pe planeta Zizilon, ajunşi accidental pe Terra, primul în localitatea A şi celălalt în localitatea M. Prin staţie, li s-a comunicat să se îndrepte spre localitatea B. Localităţile A, M, B sunt legate printr-un drum drept, iar M se află la mijlocul distanţei dintre A şi B. Cei doi se deplasează numai în salturi, lungimile salturilor fiind programate de fiecare după anumite reguli. Itsy porneşte din A şi aterizează succesiv în punctele $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$, după următoarea regulă: $AA_1 = \frac{1}{n}AB, A_1A_2 = \frac{1}{2}AA_1, A_2A_3 = \frac{1}{2}A_1A_2, ..., A_{k-1}A_k = \frac{1}{2}A_{k-2}A_{k-1}$, unde n este un număr natural mai mare ca 1. Bitsy porneşte din M

şi aterizează succesiv în punctele $M_1, M_2, ..., M_k$, după regula: $MM_1 = \frac{1}{2m}MB$, $M_1M_2 = \frac{1}{2}MM_1, M_2M_3 = \frac{1}{2}M_1M_2, ..., M_{k-1}M_k = \frac{1}{2}M_{k-2}M_{k-1}$, unde m este un număr natural mai mare decât 1.

a) Este posibil ca Itsy să aterizeze în M?

b) Arătaţi că nu este posibil ca Bitsy să aterizeze în B.

c) Arătaţi că nu există valori ale lui k astfel încât punctele A_k şi M_k să coincidă.

Ioan Ţicalo

Clasa a VII-a

1. a) Aflaţi toate numerele întregi x pentru care $\frac{3x+2}{4x-3}$ şi $\frac{4x-3}{3x+2}$ sunt simultan numere întregi.

b) Fie $F(x) = \frac{nx+n-1}{(n+1)x-n}$, $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Demonstraţi că există cel puţin două numere naturale impare a şi b astfel încât $F(a) = b$ şi $F(b) = a$.

Claudiu Ştefan Popa

2. Două pătrate de hârtie sunt suprapuse unul peste celălalt astfel încât să coincidă, pe o suprafaţă plană presupusă nemărginită. Se alege un punct O pe pătratul situat deasupra. Se taie pătratul de deasupra după segmentele determinate de O şi vârfurile lui şi fiecare triunghi astfel obţinut se aşază pe suprafaţa plană, astfel încât latura care era şi latură a pătratului să rămână lipită de latura pătratului rămas, iar vârful opus ei să fie simetricul lui O faţă de aceeaşi latură a pătratului pe suprafaţa plană (nu se ia în considerare grosimea celor două pătrate).

a) Ce legătură există între aria unuia dintre cele două pătrate şi aria figurii geometrice obţinute?

b) Ce figură geometrică F se obţine prin procedeul expus în enunţ?

c) Dacă $OA_1 \cdot OA_4 = OA_2 \cdot OA_3$, unde A_1, A_2, A_3, A_4 sunt proiecţiile lui O pe cele patru laturi consecutive, demonstraţi că punctul O se află pe o diagonală a pătratului şi precizaţi proprietăţile caracteristice suplimentare ale figurii geometrice F.

Claudiu Ştefan Popa şi Al. Gabriel Mîrşanu

3. Trapezul $ABCD$ are baza mare AB, O este punctul de intersecţie al diagonalelor iar D' este simetricul lui D faţă de O. Demonstraţi că:

a) dacă $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle BDC$, atunci $ABCD$ este trapez isoscel;

b) dacă $AC \perp BD$ şi $AD' \perp BC$, atunci $ABCD$ este trapez isoscel.

Claudiu Ştefan Popa şi Constantin Chirilă

Clasa a VIII-a

1. a) Descompuneţi în factori expresia $N(x,y) = x^5 - x^4y - 13x^3y^2 + 13x^2y^3 + 36xy^4 - 36y^5$.

b) Arătaţi că nu există valori întregi ale numerelor x şi y pentru care $N(x,y) = 77$.

2. Fie A, B, C şi D patru puncte necoplanare în spaţiu, astfel încât $AB = CD$. Patru bondari zboară pe traiectorii rectilinii, paralele, trecând fiecare prin câte unul dintre cele patru puncte. Oricare bondar îşi alege traseul în aşa fel încât unghiurile formate de traiectoria sa cu dreptele AB, respectiv CD, să fie egale.

a) Demonstraţi că distanţa dintre traiectoriile bondarilor care trec prin A, respectiv prin B, este egală cu distanţa dintre traiectoriile bondarilor care trec prin C, respectiv prin D.

b) Arătaţi că nişte bondari inteligenţi îşi pot alege drumul în cel puţin $2^{20} + 2010^2$ moduri, astfel încât să fie respectate cerinţele problemei.

Gabriel Popa şi Cristian Lazăr

3. În fiecare pătrăţel al unei table de şah este scris câte un număr natural. Fiecare număr n utilizat pentru completarea tablei apare pe tablă de câte n ori, iar pe prima linie există, ordonate strict crescător, toate numerele folosite.

a) Arătaţi că, dintre cele opt numere de pe prima linie, cel mult şase sunt pare.

b) Determinaţi cel mai mare număr care poate apărea pe tablă.

c) Demostraţi că există o singură modalitate de completare a primei linii astfel încât produsul numerelor de această linie să fie impar.

Recreaţii Matematice 1/2010

Etapa interjudeţeană, 17 aprilie 2010

Clasa a IV-a

1. Tatăl, mama şi cei trei copii ai lor au împreună 82 de ani. Vârstele copiilor sunt exprimate prin trei numere naturale consecutive pare. Aflaţi vârsta fiecăruia ştiind că, la naşterea celui de-al doilea copil, fiecare dintre părinţii lui avea de 13 ori vârsta primului copil.

2. Avem scrise în ordine primele 2010 numere naturale nenule. Eliminăm din acest şir o parte din numere după următorul procedeu: tăiem primul număr, sărim al doilea număr, tăiem următoarele două numere, sărim următoarele două numere, tăiem următoarele trei numere, sărim următoarele trei numere ş.a.m.d., până când la pasul n rămân mai puţin de n numere.

a) Verificaţi dacă 2010 a fost tăiat sau nu.

b) Câte numere au rămas netăiate?

Cătălin Budeanu

3. În cele nouă pătrăţele ale pătratului mare alăturat sunt scrise numere distincte mai mici decât 24. Aflaţi literele corespunzătoare, ştiind că suma numerelor de pe fiecare linie şi de pe fiecare coloană este aceeaşi.

a	b	2a
e	4	d
6	f	12

Clasa a V-a

1. Avem la dispoziţie un număr nelimitat de jetoane, pe fiecare dintre ele fiind scris unul din numerele 5, 7 sau 11. Un număr natural n se numeşte *norocos* dacă există un numar de jetoane astfel încât suma numerelor scrise pe ele să fie egală cu n.

a) Arătaţi că 13 nu este norocos.

b) Arătaţi că 14, 15, 16, 17 şi 18 sunt numere norocoase.

c) Arătaţi că orice număr natural $n \geq 14$ este norocos.

2. Într-un supermarket, ciocolatele de un anumit tip sunt aşezate pe un stand în 25 de cutii a câte 11 bucăţi, iar clienţii îşi aleg ciocolatele, pentru a le cumpăra, dintr-o cutie la întâmplare. Arătaţi că, în orice moment, există 3 cutii care conţin acelaşi număr de ciocolate.

3. Pentru fiecare număr natural nenul n se noteaza cu $s(n)$ numărul de zerouri cu care se termină numarul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

a) Calculaţi $s(2010) - s(2000)$.

b) Determinaţi cel mai mic număr natural n cu proprietatea că $s(n+10) - s(n) = 2010$.

Clasa a VI-a

1. a) Să se arate că $2^n > 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3}$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.

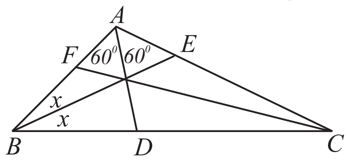
b) Se aleg la întâmplare 9 divizori distincţi ai numărului 2^{2010} şi se aşează în cele nouă pătraţele ale unei table 3×3, într-o ordine oarecare. Să se arate că sumele numerelor de pe fiecare linie, coloană sau diagonală ale tablei sunt distincte.

Marian Panţiruc

2. Aflaţi numerele naturale de forma $\overline{xyz}$ în baza 10, ştiind că produsul cifrelor lor este un cub perfect de forma $\overline{abc}$, iar numerele $x^2 + xy + xz$, $y^2 + xy + yz$, $z^2 + xz + yz$ sunt direct proporţionale, respectiv, cu numerele $y + z, x + z$ şi $x + y$.

Artur Bălăucă

3. Avem un cadru de tipul celui din desen, cu $x > 15°$ şi un echer dreptunghic. Să se precizeze dacă se poate aşeza unghiul drept al echerului în unul dintre punctele A, B, C, D, E, F astfel încât fiecare catetă a echerului să mai treacă prin câte un punct din cele şase numite mai sus şi să se justifice.



Al. Gabriel Mîrşanu şi Dan Brânzei

Clasa a VII-a

1. Întors de la Concursul *Florica T. Câmpan*, un copil este întrebat de mama sa ce a făcut.

- Totul, mai puţin o problemă. Să ţi-o zic: se face o operaţie, aceeaşi, cu fiecare două din trei numere reale şi, de fiecare dată, rezultatul obţinut este un număr raţional. Se cerea să se demonstreze că toate cele trei numere sunt raţionale.
- Bine, bine-spune mama-despre ce operaţie e vorba?
- Păi ... nu ţin minte, dar intru pe internet şi găsesc subiectele acolo. După aceea, mă laşi să joc un joc nou online?
- Sigur, repede la internet pentru orice informaţie! Tu memorie internă nu mai ai?
- Îmi aduc aminte doar că era ori adunare, ori înmulţire.
- Ei, atunci nu e greu. Uite, eu ştiu deja ce operaţie era în enunţul problemei şi cum să o rezolv.

Aflaţi şi voi cum a gândit mama băiatului şi justificaţi răspunsul.

Claudiu Ştefan Popa şi Al. Gabriel Mîrşanu

2. O lucrare poate fi efectuată, separat, de patru muncitori astfel: de primul muncitor în $2a$ ore, de al doilea muncitor în $2b$ ore, iar al treilea şi al patrulea efectuează aceeaşi lucrare, fiecare, în $a+b$ ore $(a, b \in \mathbb{R}, a > \frac{1}{2}, b > \frac{1}{2}, a \neq b)$. Se formează două echipe în care muncitorii lucrează împreună: în prima intră primul şi cel de al doilea muncitor, iar în a doua intră al treilea şi al patrulea. Cercetaţi care dintre cele două echipe termină lucrarea mai întâi.

Claudiu Ştefan Popa

3. Punctele M şi N sunt mijloacele laturilor $[AB]$, respectiv $[CD]$, ale patrulaterului $ABCD$, $AB \| CD$, iar O este punctul de intersecţie a diagonalelor sale. Punctele E şi F sunt simetricele punctului O faţă de M, respectiv N, iar $AC \cap DE = \{P\}$, $BD \cap CE = \{Q\}$, $AC \cap BF = \{R\}$ şi $BD \cap AF = \{S\}$.

a) Presupunând că $AB = CD$, demonstraţi că $PQRS$ este paralelogram, $P_{PQRS} \leq \frac{P_{ABCD}}{2}$ şi $A_{PQRS} \leq \frac{A_{ABCD}}{4}$.

b) Aceleaşi cerinţe, presupunând că $CD < AB$.

Claudiu Ştefan Popa şi Constantin Chirilă

Clasa a VIII-a

1. Fie n număr natural nenul; vom spune că un numar real strict pozitiv x este *n-insignifiant* dacă $x < 10^{-n}$. Stabiliţi, cu justificări, dacă următoarele propoziţii sunt adevărate sau false:

P_1 : "Există numere 2010-insignifiante care nu sunt 2000-insignifiante."

P_2 : "Orice număr 2000-insignifiant este 2010-insignifiant."

P_3 : "Dacă x şi y sunt 2010-insignifiante, atunci suma $x+y$ este 2010-insignifiantă."

P_4 : "Dacă x şi y sunt 2000-insignifiante, atunci produsul xy este 2010-insignifiant."

Dorel Luchian

2. Vom spune că un număr natural n este *2010-acceptabil* dacă un cub de latură n poate fi împărţit în cel puţin 2010 cuburi mai mici, toate având laturile numere naturale şi vom spune că este *2010-remarcabil* dacă un cub de latură n poate fi împărţit în exact 2010 cuburi mai mici, toate având laturile numere naturale.

a) Demonstraţi că numărul 12 nu este 2010-acceptabil.

b) Arătaţi că 13 este număr 2010-acceptabil şi 2010-remarcabil.

c) Demonstraţi că există o infinitate de numere 2010-remarcabile.

Gabriel Popa şi Cristian Lazăr

3. Pe Marte, moneda folosită în schimburile comerciale se numeste mart. Banca Planetară Marţiană bate monede având ca valori orice număr întreg pozitiv de marţi (există monede de 1 mart, 2 marţi, 3 marţi etc.). Un marţian perseverent strânge, ban cu ban, o gramadă de 2010 monede, a căror valoare totală este de 4018 marţi.

a) Care este cea mai mare valoare posibilă a unei monede din gramadă?

b) Demonstraţi că în gramadă se aflǎ cel puţin două monede de 1 mart.

c) Arătaţi că un marţian inteligent poate împărţi monedele în două grămezi mai mici, astfel încât valoarea totală a monedelor din fiecare gramăjoară să fie de 2009 marţi.

Cristian Lazăr şi Gabriel Popa