CONCURSURI ŞI EXAMENE

Concursul de matematică "Al. Myller"
Ediţia a VIII-a, Iaşi, 8 aprilie 2010

Clasa a VII-a

1. Fie x şi y două numere reale cu proprietatea că $x+y \geq 2$. Arătaţi că $x^2+y^2 \geq x+y$. Când are loc egalitatea?

2. Să se determine numerele prime a, b, c şi A, ştiind că $A = a^4 + b^4 + c^4 - 3$.

3. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_{2010} \in \{-1, 0, 1\}$, astfel încât $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2010} = 1$.
a) Calculaţi $a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_{2010}^3$.
b) Determinaţi numărul de valori distincte pe care le poate lua suma $S = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{2010}^2$.

4. Se consideră triunghiul ABC în care $AB = AC$ şi fie M mijlocul segmentului BC. Punctele D şi E sunt picioarele perpendicularelor din M pe dreptele AC, respectiv AB, iar H este mijlocul segmentului $[DE]$. Fie punctele $P, Q \in BC$ astfel încât $MQ = MP = MD$ şi $P \in (BM)$. Arătaţi că punctul H este ortocentrul triunghiului APQ.

Clasa a VIII-a

1. Fie x şi y două numere reale cu proprietatea că $x+y \geq 2$. Arătaţi că $x^3+y^3 \geq x+y$. Pentru care valori ale numerelor x şi y are loc egalitatea?

2. Piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu vârful V are latura bazei de 6 cm şi înălţimea de $\sqrt{6}$cm. Planul perpendicular în C pe dreapta AC intersectează dreapta AV în punctul P. Calculaţi distanţa de la P la planul (VBC).

3. Fie mulţimea $A = \{1, 2, 3, ..., 37\}$. Arătaţi ca, oricum am considera 13 elemente distincte din A, există două printre acestea, a şi b, cu proprietatea că $\frac{4}{5} < \frac{a}{b} < \frac{5}{4}$.

4. Fie $p \geq 2$ un număr prim. Să se arate că orice număr natural nenul admite un multiplu de forma $p^{2a} - p^a$, unde $a \in \mathbb{N}^*$.

Clasa a IX-a

1. Să se arate că, pentru orice număr real $x \geq \frac{25}{2}$, intervalul $[x, 2x]$ conţine trei întregi distincţi în progresie geometrică.

Mihai Bălună

2. Se consideră o mulţime A cu $n \geq 3$ elemente şi 2^{n-1} submulţimi distincte ale lui A. Se ştie că oricare trei dintre aceste submulţimi au intersecţia nevidă. Să se arate că intersecţia tuturor submulţimilor date este nevidă.

3. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ şi o mulţime $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de numere reale cu proprietatea $|x_i - x_j| \geq 1$, $\forall 1 \leq i < j \leq n$. Să se arate că $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geq \frac{n(n-1)(n+1)}{12}$.

4. Fie $M \in (BC)$, $N \in (AC)$, $P \in (AB)$ picioarele a trei ceviene concurente în triunghiul ABC. Paralela prin N la AB taie dreapta PM în E, iar paralela prin M la AB taie dreapta PN în F. Să se arate că dreptele MN, EF şi PC sunt concurente.

Gabriel Popa şi Paul Georgescu

Clasa a X-a

1. Dacă $x, y \in (1, 2]$, demonstraţi că $\log_x(3y-2) + \log_y(3x-2) \geq 4$.

Radu Sava

2. Dacă z este un număr complex de modul 1, arătaţi că $\sqrt{3} \leq |1+z|+|1-z+z^2| \leq \frac{13}{4}$. Când se realizează egalităţile?

3. Determinaţi numerele reale x care pot fi scrise sub forma

$$x = \frac{1}{a_1a_2\ldots a_n} + \frac{a_1}{a_2a_3\ldots a_n} + \frac{a_2}{a_3a_4\ldots a_n} + \ldots + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n},$$

unde $n, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt numere naturale nenule cu $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

Gheorghe Iurea

4. Fie $\mathcal{P}$ mulţimea punctelor planului, iar $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ o funcţie care duce dreptele în drepte şi astfel încât orice patrulater convex este dus într-un patrulater convex de acelaşi perimetru. Demonstraţi că f este izometrie.

Paul Georgescu şi Gabriel Popa

Clasa a XI-a

1. Daţi un exemplu de funcţie $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ cu proprietatea că

$$f(f(f(f(x)))) = \frac{41x+40}{40x+41}, \text{ pentru orice } x > 0.$$

2. Fie A şi B două matrice din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea că AB este nilpotentă şi $ABA \neq O_n$. Arătaţi că există o matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $ABAC = O_n$ şi $AC \neq O_n$.

3. Determinaţi funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $2f(x+1) = f(x) + 4f(2x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Dinu Şerbănescu

4. Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie având proprietatea lui Darboux, astfel încât pentru orice $a \in \mathbb{R}$, ecuaţia $f(x) = a$ are un număr finit de soluţii. Arătaţi că funcţia f are limită la infinit.

Dinu Şerbănescu

Clasa a XII-a

1. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă cu proprietatea că pentru orice $x \in [a, b)$, există $y \in (x, b)$ astfel încât $\int_x^y f(t)dt > 0$. Arătaţi că $\int_a^b f(x)dx > 0$.

Călin Popescu

2. Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie crescătoare. Arătaţi că

$$\int_0^x (2t - x)f(t)dt \geq 0, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}.$$

Marian Andronache

3. Fie n un număr natural, $n \geq 2$, şi $G \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ un grup cu n elemente în raport cu înmulţirea matricelor, cu proprietatea că $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$, oricare ar fi $A, B \in G$. Arătaţi că:

a) elementul neutru al lui G este diferit de I_3;

b) G este izomorf cu grupul $(U_n, \cdot)$ al rădăcinilor complexe de ordinul n ale unităţii.

Dinu Şerbănescu

4. Fie A un inel finit comutativ cu cel puţin trei elemente şi $a = \sum_{x \in A} x^7$, $b = \sum_{x \in A} x^8$. Arătaţi că cel puţin unul dintre elementele a şi b este neinversabil.

Marian Andronache

Recreaţii ... matematice

Răspuns la exerciţiul de la pag. 106.

Numărul are şase cifre şi se termină în ş. Evident, ş $\in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$.

Din prima scădere care este prezentă în algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate, rezultă că prima cifră a rădăcinii poate fi 0, 1, 2 sau 3. Cum 0, 1 şi 2 se elimină uşor (în aceste cazuri pătratul rădăcinii ar avea cel mult cinci cifre), deducem că prima cifră a rădăcinii este 3.

Ţinând seama de algoritmul extragerii rădăcinii pătrate, a doua scădere implică egalitatea $\overline{**ş} = \overline{6ş} \cdot ş$. Cu aceasta, constatăm că $ş \notin \{0, 1, 4, 9\}$, deci $ş \in \{5, 6\}$.

Dacă $ş = 5$ şi avem în vedere a treia scădere, obţinem $\overline{***ş} = \overline{70t} \cdot t$, de unde $t = 5$. Găsim ca rădăcină pătrată numărul 355, care, însă, nu este soluţie: pătratul $355^2 = 126025$ nu are cifre distincte ($a = i = 5$).

Analog, dacă $ş = 6$, vom avea $\overline{***6} = \overline{72u} \cdot$ u şi, deci, $u = 4$ sau $u = 6$. Aşadar, găsim numerele 364 şi 366. Cum $366^2 = 133956$ nu are cifre distincte, iar $364^2 = 132496$ are cifre distincte, conchidem că numărul 364 este soluţia problemei, iar Racliş $\equiv 132496$.