Criteriu pentru calculul unor limite de funcţii

Valentina BLENDEA[1], ***Gheorghe BLENDEA***[2]

Abstract. The theorems of Cesàro-Stolz and Cauchy-d′Alembert in the theory of sequences are extended to the case of positive real functions. The results thus obtained are use to solve certain calculus problems.

Keywords: Cesàro-Stolz theorem, Cauchy-d′Alembert theorem.

MSC 2000: 26A03.

Scopul acestei note este de a extinde unele rezultate din teoria limitelor de şiruri la limite de funcţii. În acest sens vom aminti:

Teoremă. *a)* (*Cesàro-Stolz*). *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(b_n)_{n\geq 1}$ *două şiruri de numere reale cu proprietăţile: i)* $0 < b_n \uparrow +\infty$*; ii)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$. *Atunci există* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$.

b) (*Cauchy-d′Alembert*). *Dacă* $(a_n)_{n\geq 1}$ *este un şir de numere strict pozitive şi* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, *atunci există* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

În continuare prezentăm o variantă a teoremei de mai sus pentru funcţii şi câteva aplicaţii.

Propoziţie. 1) *Fie a şi* $t > 0$ *şi funcţiile* $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, *cu proprietăţile:*

a) f *este mărginită pe orice interval mărginit din* $[a, +\infty)$;

b) g *ia valori strict pozitive, este strict crescătoare şi nemărginită.*

Dacă există $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x+t)-f(x)}{g(x+t)-g(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, *atunci există* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.

2) *Fie* $a > 0$, $b > 0$, $t > 0$ *şi funcţia* $h : [a, +\infty) \to [b, +\infty)$ *care are proprietatea că este mărginită pe orice interval mărginit din* $[a, +\infty)$. *Dacă există* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(x+t)}{h(x)} = l \in \mathbb{R}_+^*$, *atunci există* $\lim\limits_{x\to+\infty} [h(x)]^{\frac{1}{x}} = l^{\frac{1}{t}}$.

Demonstraţie. 1) **Cazul I:** $l \in \mathbb{R}$. Pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon > a$ astfel încât

$$\forall x > \delta_\varepsilon \Rightarrow l - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x+t)-f(x)}{g(x+t)-g(x)} < l + \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right)[g(x+t)-g(x)] < f(x+t) - f(x) < \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right)[g(x+t)-g(x)].$$

Fie $x > \delta_\varepsilon + 3t$, $n_x \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x - n_x t \in (\delta_\varepsilon + t, \delta_\varepsilon + 3t)$. Aplicând inegalitatea precedentă pentru $x - t > x - 2t > \ldots > x - n_x t > \delta_\varepsilon + t > \delta_\varepsilon$ şi adunând inegalităţile obţinute, deducem că

$$\left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right)[g(x) - g(x - n_x t)] < f(x) - f(x - n_x t) < \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right)[g(x) - g(x - n_x t)].$$

[1]Profesor, Colegiul "Naţional", Iaşi

[2]Profesor, Colegiul Naţional "M. Eminescu", Iaşi

Din stricta monotonie şi nemărginirea lui g rezultă că $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Se obţine:

$$l - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{g(x)}\left[f(x - tn_x) - \left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right) g(x - tn_x)\right] < \frac{f(x)}{g(x)} <$$
$$< l + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{g(x)}\left[f(x - tn_x) - \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right) g(x - tn_x)\right].$$

Fie funcţiile $h, h' : (\delta_\varepsilon + t, \delta_\varepsilon + 3t) \to \mathbb{R}$, $h(y) = f(y) - \left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right) g(y)$, $h'(y) = f(y) - \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right) g(y)$, care sunt mărginite din ipotezele a) şi b), deci există $M = M_\varepsilon > 0$ astfel încât $|h(y)| < M$, $|h'(y)| < M$, $\forall y \in (\delta_\varepsilon + t, \delta_\varepsilon + 3t)$. Din $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{g(x)} = 0 \Rightarrow \exists \delta'_\varepsilon > a$ astfel încât $0 < \frac{1}{g(x)} < \frac{\varepsilon}{2M}$, $\forall x > \delta'_\varepsilon$. Deducem

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| < \varepsilon,\ \forall x > \max\{\delta_\varepsilon, \delta'_\varepsilon\},\ \text{deci}\ \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Cazul II: $l = \pm\infty$. Se tratează asemănător.

2) Dacă luăm în 1) $f(x) = \ln(h(x))$ şi $g(x) = x$, $x \geq a$, acestea verifică ipotezele a) şi b) din 1), deci

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\dfrac{h(x+t)}{h(x)}}{t} =$$
$$= \frac{\ln l}{t} = \ln l^{\frac{1}{t}} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} [h(x)]^{\frac{1}{x}} = l^{\frac{1}{t}}.$$

Aplicaţii.

1. *Dacă funcţia* $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ *este mărginită pe orice interval mărginit din* $[1, +\infty)$ *şi există* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{2x+1} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, *atunci există* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2} = l$.

Soluţie. Funcţia f din enunţ şi $g : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ verifică ipotezele din Propoziţiei, punctul 1), cu $t = 1$, de unde rezultă concluzia.

2. *Se consideră numărul* $a > 0$ *şi o funcţie* $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *care este mărginită pe orice interval mărginit din* $[a, +\infty)$, *cu proprietatea că* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$. *Să se arate că, dacă există* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x}$, *atunci aceasta este egală cu zero.*

Soluţie. Funcţiile f şi $g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ verifică ipotezele Propoziţiei, punctul 1), şi avem:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x} = l \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{2x+1} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x} \cdot \frac{x}{2x+1} = l\frac{1}{2}.$$

Conform aplicaţiei precedente, rezultă că $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=\dfrac{l}{2}$, deci $l=0$.

3. *Fie* $f:[1,+\infty)\to[1,+\infty)$ *o funcţie continuă şi neconstantă astfel încât* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+1)}{f(x)}=l\in\mathbb{R}_+^*$. *Atunci există* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\displaystyle\int_1^x f(t)dt\right]^{\frac{1}{x}}=l$.

Soluţie. Fie $a>0$ şi funcţia $F:[1,+\infty)\to[a,+\infty)$, $F(x)=\begin{cases} a, & x=1\\ \displaystyle\int_1^x f(t)dt, & x>1\end{cases}$, care este derivabilă pe $(1,+\infty)$. Funcţia F este mărginită pe orice interval mărginit din $[1,+\infty)$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x+1)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+1)}{f(x)}=l$ (se utilizează regula lui l'Hospital). Aplicând Propoziţia, punctul 2), se obţine rezultatul.

4. *Să se arate că* $\lim\limits_{x\to+\infty}[x]^{\frac{1}{x}}=1$, *unde* $[x]$ *reprezintă partea întreagă a numărului* x.

Soluţie. Considerând funcţia $f:[1,+\infty)\to[1,+\infty)$, $f(x)=[x]$, observăm că f este mărginită pe orice interval mărginit din $[1,+\infty)$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{[x+1]}{[x]}=1$, deci, conform Propoziţiei, punctul 2), rezultă că $\lim\limits_{x\to+\infty}[x]^{\frac{1}{x}}=1$.

Recreaţii ... matematice

Rodolph Neculai Racliş (1896-1966), doctor în ştiinţe matematice la Sorbona în 1930, a fost directorul *Institutului Matematic Român* şi fondatorul revistei *Numerus* (v. articolul de la pag. 128).

Ca un omagiu adus lui, în *Numerus vol. 3, caietul 29*, pag. 196, este publicată următoarea problemă (reprodusă fidel!):

3.3309 (**Ion Armean**). *Să se facă următoarea operaţie:*

$$\begin{array}{l}
\sqrt{\text{R a c l i ş}} = *ş* \\
\underline{\;\;*\;} \\
\;\;\;* * * \\
\;\;\;\underline{* * ş} \\
\;\;\;\;\;\;* * * * \\
\;\;\;\;\;\;\underline{* * * ş} \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;/
\end{array}$$

notând prin litere <u>*anumite cifre*</u> *şi prin* $*$ *diferite cifre ce trebuie determinate prin raţionament.*

N.B. Răspunsul se găseşte la pag. 136.