O generalizare a teoremei lui Coşniţă

Ion PĂTRAŞCU[1]

Omagiu adus lui **Cezar Coşniţă,**
la centenarul naşterii sale

Abstract. This note is a tribute to the memory of the Romanian mathematician **Cezar Coşniţă**, as this year there are 100 years since his birth. A theorem of concurrence published by C. Coşniţă in 1941 is extended.

Keywords: Coşniţă point, Kariya point, barycentric coordinates.

MSC 2000: 51M04.

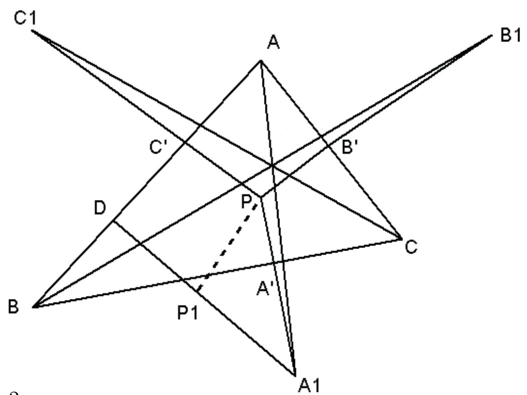
În luna octombrie, 2010, se împlinesc 100 de ani de la naşterea profesorului universitar **Cezar Coşniţă** (1910-1962). Nota de faţă este dedicată acestui eveniment şi conţine generalizarea unei teoreme ce aparţine lui C. Coşniţă.

Teorema lui Coşniţă. *Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC şi A_1, B_1, C_1 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor BOC, COA, respectiv AOB. Atunci dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente* [**4**].

Punctul de concurenţă a dreptelor AA_1, BB_1, CC_1 se numeşte *punctul lui Coşniţă.*

Teoremă. *Fie P un punct în planul triunghiului ABC, nesituat pe cercul circumscris sau pe laturile acestuia, $A'B'C'$ triunghiul podar al lui P şi A_1, B_1, C_1 puncte astfel încât $\overline{PA'} \cdot \overline{PA_1} = \overline{PB'} \cdot \overline{PB_1} = \overline{PC'} \cdot \overline{PC_1} = k, k \in \mathbb{R}^*$. Atunci dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente.*

Demonstraţie. Fie α, β, γ coordonatele baricentrice ale lui P. Din $\alpha = \text{aria}(\triangle PBC)$, avem $PA' = \dfrac{2\alpha}{a}$ şi din $PA' \cdot PA_1 = k$, găsim $PA_1 = \dfrac{ak}{2\alpha}$ (am considerat P în interiorul triunghiului ABC, vezi figura). Notăm cu D şi respectiv P_1 proiecţiile ortogonale ale lui A_1 pe AD şi P pe A_1D. Deoarece $\widehat{PA_1D} \equiv \widehat{ABC}$ (unghiuri cu laturile perpendiculare) avem: $A_1P_1 = PA_1 \cdot \cos B = \dfrac{ak}{2\alpha}\cos B$. Din $\gamma = \text{aria}(\triangle PAB)$, rezultă că $PC' = \dfrac{2\gamma}{c}$ şi $A_1D = A_1P_1 + P_1D = \dfrac{ak\cos B}{2\alpha} + \dfrac{2\gamma}{c}$. Notăm $A_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ şi avem: $\gamma_1 = \dfrac{kac\cos B + 4\gamma\alpha}{4\alpha}$, $\alpha_1 =$



$\text{aria}(\triangle A_1BC) = \dfrac{1}{2}BC \cdot A_1A' = \dfrac{a^2k - 4\alpha^2}{4\alpha}$ şi, analog ca în calculul lui γ_1, $\beta_1 = \dfrac{kab\cos C + 4\beta\alpha}{4\alpha}$. Adică

[1]Profesor, Colegiul Naţional "Fraţii Buzeşti", Craiova

$$A_1\left(\frac{a^2k-4\alpha^2}{4\alpha}, \frac{kab\cos C+4\beta\alpha}{4\alpha}, \frac{kac\cos B+4\gamma\alpha}{4\alpha}\right).$$

În acelaşi mod aflăm că

$$B_1\left(\frac{kab\cos C+4\beta\alpha}{4\beta}, \frac{b^2k-4\beta^2}{4\beta}, \frac{kcb\cos A+4\beta\gamma}{4\beta}\right),$$

$$C_1\left(\frac{kab\cos B+4\gamma\alpha}{4\gamma}, \frac{kbc\cos A+4\gamma\beta}{4\gamma}, \frac{c^2k-4\gamma^2}{4\gamma}\right).$$

În conformitate cu secţiunea 28 din [**1**] sau [**2**], cevienele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente dacă şi numai dacă $\alpha_2\beta_3\gamma_1 = \alpha_3\beta_1\gamma_2$. Cum în cazul nostru această relaţie se verifică, dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente. Teorema se demonstrează în mod analog în cazul când punctul P este în exteriorul triunghiului ABC.

Vom numi punctul lor de concurenţă *punctul generalizat al lui Coşniţă.*

Observaţii. 1. Condiţiile din enunţul teoremei au interpretarea geometrică: punctele A_1, B_1, C_1 se află pe perpendicularele din P pe laturile triunghiului şi sunt inversele punctelor A', B', C' în raport cu cercul de centru P şi rază $|k|$.

2. Teorema lui Coşniţă se obţine în cazul particular $P = O$ şi $k = \frac{R^2}{2}$ (O şi R sunt centrul şi respectiv raza cercului circumscris). Într-adevăr, $OA' = R\cos A$ şi cu teorema sinusurilor aplicată în $\triangle BOC$ avem $\frac{a}{\sin 2A} = 2OA_1$ (A_1 fiind centrul cercului circumscris $\triangle BOC$). De unde $OA'\cdot OA_1 = \frac{R^2}{2}$; analog găsim $OB'\cdot OB_1 = OC'\cdot OC_1 = \frac{R^2}{2}$.

3. Se verifică uşor că luând $P = I$ (centrul cercului înscris) şi $k = r(r+a)$, $a > 0$ dat, iar r raza cercului înscris, dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente în *punctul lui Kariya.* Aşadar, teorema prezentată este o generalizare şi a teoremei lui Kariya (vezi [**4**]).

Bibliografie

1. **C. Coşniţă** - *Coordonnées barycentriques*, Bucarest, Paris, Librairie Vuibert, 1941.
2. **C. Coşniţă** - *Geometrie analitică în coordonate baricentrice,* Editura Reprograph, Craiova, 2005.
3. **C. Barbu** - *Variaţiuni pe tema punctului lui Coşniţă*, Gazeta Matematică nr. 4/2010, 180-185.
4. **C. Barbu** - *Teoreme fundamentale din geometria triunghiului*, Editura Unique, Bacău 2008.