Conjectura Beal pentru polinoame

Temistocle BÎRSAN[1]***, Gabriel DOSPINESCU***[2]

Abstract. This paper deals with the solution of equation (1) in the set of polynomials with integer coefficients and it has an informative aim. As well as in the case of Fermat′s Conjecture, the solution to Beal′s Conjecture (i.e., the claim that Eq. (1) with p, q, r- integer numbers greater than 2 has no solution with x, y, z positive and mutually prime) in the set $\mathbb{C}[X]$is elementary (Proposition 1). The triples (p, q, r) with p, q, r in $\mathbb{N}^*$ such that equation (1) has solutions in $\mathbb{C}[X]$ are: $(1, q, r)$, $(2, 2, r)$, $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$, $(2, 3, 5)$.

Keywords: polynomials, Beal′s Conjecture, Fermat′s Conjecture, regular polyhedra.

MSC 2000: 11D41.

În 1966, **Andrew Beal** instituie un premiu pentru demonstrarea sau infirmarea aşa-numitei acum **Conjecturi Beal** [**1**]:

Ecuaţia

$$x^p + y^q = z^r, \tag{1}$$

unde p, q, r *sunt numere întregi mai mari ca* 2, *nu are nici o soluţie cu* x, y, z *întregi pozitivi şi relativ primi.*

Pentru $p = q = r\ (= n)$ ecuaţia devine

$$x^n + y^n = z^n, \tag{2}$$

ecuaţie care a fost subiect de preocupări pentru lumea matematică încă din antichitate şi mai este şi acum, deşi a fost realizată rezolvarea ei completă. **Şcoala lui Pitagora** a demonstrat că ecuaţia $x^2+y^2 = z^2$ admite o infinitate de triplete (x, y, z) formate cu numere întregi, pozitive şi prime între ele ce o verifică. **Pierre Fermat** a afirmat că *ecuaţia* (2) *pentru* $n \geq 3$ *nu admite nici o soluţie cu numere* x, y, z *întregi şi nenule* şi a notat pe marginea unei pagini a *Aritmeticii lui Diofant* că posedă o demonstraţie minunată a acestui fapt. Generaţii de matematicieni, aflaţi pe urmele acestei demonstraţii, n-au reuşit să o găsească sau să lămurească care ar fi putut să fie aceasta, ceea ce a făcut pe unii să presupună că Fermat a greşit pe parcursul demonstraţiei sale. În sfârşit, în 1995, **Andrew Wiles** demonstrează *Marea teoremă a lui Fermat*, aşa cum istoria matematicii reţine afirmaţia lui Pierre Fermat [**6**]; demonstraţia lui Wiles este, însă, accesibilă unui cerc foarte restrâns de specialişti.

În acest context, apare cu atât mai uimitor şi remarcabil faptul că rezolvarea ecuaţiei (2) în mulţimea $\mathbb{C}[X]$ a polinoamelor cu coeficienţi complecşi este elementară,

[1]Prof. dr., Catedra de matematică, Univ. Tehnică "Gh. Asachi", Iaşi

[2]Student, École Normale Supérieure, Paris

accesibilă unui elev de liceu. Mai precis, cu ajutorul teoremei Mason - Stothers, enunţată mai jos, se poate dovedi afirmaţia următoare:

Dacă $n \geq 3$, *atunci ecuaţia* (2) *nu are soluţii în* $\mathbb{C}[X]$ *cu polinoame neconstante şi relativ prime.*

O prezentare a acestor fapte este făcută în [**4**]; cititorii revistei sunt informaţi asupra acestui subiect în [**2**].

În această ordine de idei, se impune de la sine înlocuirea ecuaţiei (2) cu (1) şi rezolvarea acesteia din urmă în mulţimea $\mathbb{C}[X]$. Este tocmai ceea ce ne propunem. Lăsăm, însă, cititorilor plăcerea de a rezolva Conjectura lui Beal propriu-zisă (în $\mathbb{Z}$) (informaţii asupra premiului oferit de A. Beal sunt date în [**1**]).

Vom apela şi în acest caz la

Teorema Mason - Stothers ([**4**], [**2**])**.** *Fie* $f, g, h \in \mathbb{C}[X]$ *neconstante şi relativ prime. Dacă are loc egalitatea* $f + g = h$, *atunci*

$$\max\{\deg f, \deg g, \deg h\} \leq n_0(fgh) - 1 \tag{3}$$

(pentru $f \in \mathbb{C}[X]$ cu descompunerea $f(X) = \alpha \prod\limits_{i=1}^{k}(X - a_i)^{m_i}$, se notează $\deg f = m_1 + m_2 + \cdots + m_k$ – gradul lui f şi $n_0(f) = k$ – numărul rădăcinilor sale distincte).

Demonstraţia este elementară şi poate fi găsită în [**2**].

Propoziţia 1 (Conjectura Beal pentru polinoame). *Dacă* $p, q, r \in \mathbb{Z}$ *şi* $p \geq 3$, $q \geq 3$, $r \geq 3$, *atunci ecuaţia* (1) *nu are soluţii în* $\mathbb{C}[X]$ *cu polinoame neconstante şi relativ prime.*

Demonstraţie. Procedăm ca şi în cazul ecuaţiei (2). Presupunem că ecuaţia (1) cu exponenţii p, q, r satisfăcând condiţiile din enunţ admite o soluţie (f, g, h) cu polinoame neconstante relativ prime. Ca urmare, putem aplica Teorema Mason – Stothers polinoamelor $(f(X))^p$, $(g(X))^q$, $(h(X))^r$ şi scrie

$$\deg(f(X))^p \leq n_0(f(X))^p (g(X))^q (h(X))^r - 1,$$

de unde

$$p \deg f(X) \leq n_0(f(X)\, g(X)\, h(X)) - 1$$

şi, deci,

$$p \deg f(X) \leq n_0(f(X)) + n_0(g(X)) + n_0(h(X)) - 1.$$

Scriind şi inegalităţile analoage acesteia relativ la polinoamele g şi h şi adunându-le membru cu membru, obţinem relaţia

$$(p-3)\deg f(X) + (q-3)\deg g(X) + (r-3)\deg h(X) \leq -3,$$

care este falsă, căci $p \geq 3$, $q \geq 3$, $r \geq 3$, şi demonstraţia este încheiată.

Înainte de a vedea ce se întâmplă atunci când unul (cel puţin) dintre exponenţii ecuaţiei (1) este mai mic ca 3, vom face câteva

Observaţii. 1) În prezenţa egalităţii $f+g=h$, faptul că polinoamele f,g,h sunt prime între ele este echivalent cu condiţia ca f,g,h să fie relativ prime două câte două.

2) Dacă $\varepsilon_1^p=1$, $\varepsilon_2^q=1$ şi $\varepsilon_3^r=1$ şi (x,y,z) este o soluţie în $\mathbb{C}[X]$ a ecuaţiei (1), atunci sunt soluţii ale acestei ecuaţii şi tripletele: $(\varepsilon_1 x,\varepsilon_2 y,\varepsilon_3 z)$, $(x,\varepsilon_2 y,\varepsilon_3 z)$, $(x,y,\varepsilon_3 z)$ etc. Vom face abstracţie de aceste soluţii derivate ale unei soluţii găsite.

3) Fără a restrânge generalitatea, putem considera că în tripleta (p,q,r) a exponenţilor ecuaţiei (1) avem

$$p \leq q \leq r. \tag{4}$$

Într-adevăr, putem lua $p \leq q$ schimbând, eventual, x şi y între ele în ecuaţia (1). Dacă $r \leq p$, scriem (1) sub forma $z^r+(\varepsilon_1 x)^p=y^q$, unde $\varepsilon_1^p=-1$. Dacă $p \leq r \leq q$, punem (1) sub forma $x^p+(\varepsilon_2 z)^r=(\varepsilon_3 y)^q$, unde $\varepsilon_2^r=\varepsilon_3^q=-1$.

Conform Propoziţiei 1 şi ţinând seama de (4), rezultă că $p \in \{1,2\}$.

I Cazul (1,*q*,*r*) este banal: soluţia generală a ecuaţiei

$$x+y^q=z^r \tag{5}$$

este dată de

$$x=h^r-g^q, \quad y=g, \quad z=h, \quad \forall g,h \in \mathbb{C}[X], \tag{6}$$

pentru orice exponenţi $q,r \in \mathbb{N}^*$.

II Cazul (2,*q*,*r*). Cu teorema Mason - Stothers vom obţine limitări importante în privinţa exponenţilor q şi r. Fie (x,y,z) o soluţie în $\mathbb{C}[X]$ a ecuaţiei $x^2+y^q=z^r$ (cu x, y, z neconstante şi relativ prime) şi fie $a=\deg x$, $b=\deg y$, $c=\deg z$. Teorema amintită ne spune că

$$\max\{2a,qb,rc\} \leq n_0\left(x^2y^qz^r\right)-1,$$

de unde

$$\max\{2a,qb,rc\} \leq a+b+c-1,$$

deci avem

$$a<b+c-1 \quad \text{şi} \quad \max\{qb,rc\} \leq 2(b+c-1). \tag{7}$$

Cum $\max\{qb,rc\} \geq \dfrac{1}{2}(qb+rc) \geq \dfrac{q}{2}(b+c)$, combinând cu a doua relaţie din (7) vom obţine $\dfrac{q}{2}(b+c) \leq 2(b+c-1)$, ceea ce conduce la $q \in \{2,3\}$.

II.1 Subcazul (2,2,*r*), cu $r \geq 2$. Ecuaţia

$$x^2+y^2=z^r \tag{8}$$

se mai scrie

$$(x+iy)(x-iy)=z^r$$

şi cum $x+iy$ şi $x-iy$ sunt polinoame prime între ele rezultă că fiecare este puterea de exponent r a unui polinom: $x+iy=f^{\,r}$ şi $x-iy=g^r$. În final, ecuaţia $x^2+y^2=z^r$ are soluţia dată de

$$x=\frac{1}{2}\left(f^{\,r}+g^r\right), \quad y=\frac{1}{2i}\left(f^{\,r}-g^r\right), \quad z=fg, \quad \forall f,g\in\mathbb{C}\left[X\right]. \tag{9}$$

Verificarea faptului că (9) este o soluţie a ecuaţiei (8) este imediată.

II.2 Subcazul (2,3,$\boldsymbol{r}$), cu $r\geq 3$. Din (7), avem $\max\{3b,rc\}\leq 2\left(b+c-1\right)$, din care rezultă că

$$b<2\left(c-1\right) \quad \text{şi} \quad rc<6\left(c-1\right),$$

deci $r\in\{3,4,5\}$. Aşadar, au rămas trei situaţii de analizat: $(2,3,3)$, $(2,3,4)$ şi $(2,3,5)$.

II.2.1 Ecuaţia $x^2+y^3=z^3$. Vom vedea că rezolvarea acestei ecuaţii se reduce la un caz anterior studiat. Într-adevăr, scriem ecuaţia în forma

$$\left(z-y\right)\left(z-\varepsilon y\right)\left(z-\varepsilon^2 y\right)=x^2, \tag{10}$$

unde $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$. Întrucât $z-y$, $z-\varepsilon y$ şi $z-\varepsilon^2 y$ sunt relativ prime două câte două, din egalitatea precedentă deducem că fiecare dintre acestea este pătratul unui polinom:

$$z-y=f^2, \quad z-\varepsilon y=g^2, \quad z-\varepsilon^2 y=h^2.$$

Pentru ca acest sistem liniar în z şi y să fie compatibil, impunem polinoamelor f, g, h condiţia

$$-\varepsilon f^2+\left(1+\varepsilon\right)g^2=h^2.$$

Aceasta, însă, se reduce după substituţii evidente la ecuaţia $x^2+y^2=z^2$, care se rezolvă conform cazului II.1.

II.2.2 Ecuaţia $x^2+y^3=z^4$. Procedăm ca în cazul precedent. Scriem ecuaţia în discuţie sub forma

$$\left(z^2-x\right)\left(z^2+x\right)=y^3. \tag{11}$$

Cum z^2-x şi z^2+x sunt relativ prime, urmează că ele sunt cuburi de polinoame:

$$z^2-x=f^{\,3}, \quad z^2+x=g^3.$$

Astfel, suntem conduşi la ecuaţia $2z^2=f^3+g^3$ care se reduce la rândul ei la ecuaţia $x^2+y^3=z^3$ întâlnită în subcazul II.2.1. Practic, soluţiile ecuaţiei $x^2+y^3=z^4$ vor fi obţinute parametric şi se vor exprima în funcţie de soluţiile cazului $(2,2,r)$.

II.2.3 Ecuaţia $x^2+y^3=z^5$. Rezolvarea acestei ecuaţii pare să fie deosebit de dificilă. În lipsa unei descompuneri de tipul (10) sau (11), nu putem proceda ca mai sus.

Stabilim doar faptul că ecuaţia are soluţii. Se poate verifica direct că tripleta (x, y, z) dată de

$$\begin{aligned} x &= X^{30} + 522X^{25} - 10005X^{20} - 10005X^{10} - 522X^5 + 1, \\ y &= -X^{20} + 228X^{15} - 494X^{10} - 228X^5 - 1, \\ z &= \sqrt[5]{1728}\left(X^{11} + 11X^6 - X\right) \end{aligned} \tag{12}$$

este o soluţie a acestei ecuaţii ([**3**], [**5**]).

Observaţie. În [**3**], **Felix Klein** pune în evidenţă legătura strânsă care există între poliedrele regulate şi soluţiile în $\mathbb{C}(X)$ ale ecuaţiei (1). Astfel, cazul $(2, 3, 3)$ este legat de tetraedrul regulat, cazul $(2, 3, 4)$ de cub şi octogonul regulat, iar cazul $(2, 3, 5)$, cu soluţia (12), de dodecaedrul şi de icosaedrul regulat.

Această legătură este menţionată şi discutată în [**5**].

În concluzie, tripletele de exponenţi (p, q, r), $p, q, r \in \mathbb{N}^*$, pentru care ecuaţia (1) are soluţii în $\mathbb{C}[X]$ sunt: $(1, q, r)$, $(2, 2, r)$, $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$, $(2, 3, 5)$ şi toate permutările acestora.

Bibliografie

1. ******* - *Beals Conjecture*, The New Zeland Math. Mag., **35**(1998), no.2, 38.
2. **T. Bîrsan** - *Marea teoremă a lui Fermat pentru polinoame*, RecMat - 1/2004, 5-9.
3. **F. Klein** - *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Graden*, Teubner, Leipsig, 1884.
4. **S. Lang** - *Math Talks for Undergraduates*, Springer, 1999.
5. **V. V. Prasolov** - *Essays on Numbers and Figures*, Amer. Math. Soc., Mathematical World, v. 16, 2000.
6. **A. Wiles** - *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*, Annals of Math., **142**(1995), 443-551.

Recreaţii ... matematice

În 1962 **Bachet de Méziriac** publică o versiune latină a Aritmeticii ce includea peste o sută de probleme şi avea margini largi ale textului. Pe paginile unui astfel de exemplar, **Pierre Fermat** îşi nota soluţiile, comentariile şi rezultatele proprii. Pe marginea Cărţii a II-a Fermat notă afirmaţia :

ecuaţia $x^n + y^n = z^n$ *nu are soluţii în numere întregi şi nenule pentru* $n \geq 3$.

cunoscută acum ca **Marea Teoremă a lui Fermat**. Apoi a scris comentariul:

(continuare la pagina 20)