Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G166. Demonstraţi că următoarele propoziţii sunt adevărate.

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\exists x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1 = x_1x_2 \ldots x_n$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5$, $\nexists x_1, x_2, \ldots, x_n \in 2\mathbb{N}^*$ astfel încât $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1 = x_1x_2 \ldots x_n$.

c) $\exists x_1, x_2, \ldots, x_n \in 2\mathbb{N} + 1$ astfel încât $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1 = x_1x_2 \ldots x_n \Leftrightarrow n \in 2\mathbb{N}^* + 1$.

Dan Popescu, Suceava

G167. Fie $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$ toţi divizorii pozitivi ai numărului natural n. Dacă există i, j cu $j > i > 13$ şi $d_7^2 + d_i^2 = d_j^2$, arătaţi că n este multiplu de 8.

Titu Zvonaru, Comăneşti

G168. Pentru $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$, demonstraţi că are loc inegalitatea

$$\frac{x(y+z)}{x+yz} + \frac{y(x+z)}{y+xz} + \frac{z(x+y)}{z+xy} \leq 2\left(\frac{x^2}{x+yz} + \frac{y^2}{y+xz} + \frac{z^2}{z+xy}\right).$$

Ştefan Gavril, Piatra Neamţ

G169. Demonstraţi că există o infinitate de numere iraţionale α cu proprietatea că α^3 şi $\alpha^2 + \alpha$ sunt, de asemenea, iraţionale.

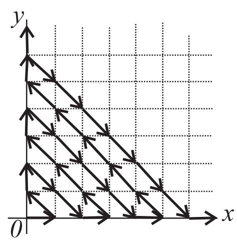
Gabi Ghidoveanu şi Dumitru Mihalache, Bârlad

G170. O mulţime $A \subset \mathbb{R}$, de cardinal 2009, are proprietatea că fiecare element al ei este mai mare decât o zecime din suma celor 2008 numere rămase. Arătaţi că A conţine cel puţin 12 numere negative.

Andrei Nedelcu, Iaşi

G171. Punctele planului care au, în raport cu un reper cartezian, ambele coordonate numere naturale, le parcurgem în sensul indicat de săgeţi în figură, pornind din origine. Notăm cu $a_{n,k}$ poziţia punctului de coordonate (n, k) în şirul obţinut (de exemplu, $a_{0,0} = 1$, $a_{0,2} = 4$, $a_{2,2} = 13$ etc.). Exprimaţi numărul $a_{n,k}$ în funcţie de n şi de k.

Lucian Georges Lăduncă, Iaşi



G172. O tablă dreptunghiulară $m \times n$, $m, n \geq 2$, are pătrăţelele unitate de la intersecţiile liniilor de ordin impar cu coloanele de ordin impar colorate în negru, restul pătrăţelelor fiind albe. A recolora o linie (coloană) înseamnă a schimba culorile tuturor pătrăţelelor acelei linii (coloane). Arătaţi că tabla nu poate fi transformată într-una complet albă prin recolorarea câtorva linii şi coloane.

Răzvan Ceucă, elev, Iaşi

G173. Notăm cu $T(a, b, c)$ triunghiul care are laturile de lungimi a, b şi c. Demonstraţi că triunghiurile $T(b, 2c, 2m_b)$ şi $T(c, 2b, 2m_c)$ pot fi confecţionate (pe rând) dintr-o aceeaşi bucată de carton, fără pierdere de material.

Petru Asaftei, Iaşi

G174. Se consideră triunghiul ABC isoscel cu $m(\widehat{A}) = 40°$. Să se arate că nu există puncte $P \in \operatorname{Int} ABC$ pentru care $m(\widehat{PAB}) = 30°$, $m(\widehat{PBC}) = 10°$ şi $m(\widehat{PCA}) = 35°$.

Gabriel Popa şi Paul Georgescu, Iaşi

G175. Fie $ABCD$ un patrulater înscris în cercul de rază R. Demonstraţi că $AB \cdot AD + CB \cdot CD \leq 4R^2$.

Gheorghe Costovici, Iaşi

B. Nivel liceal

L166. Fie $ABCD$ un dreptunghi, iar $\mathcal{C}$ un cerc prin A, care intersectează (AB), (AC) şi (AD) în M, N, respectiv P. Arătaţi că $AM \cdot AB + AP \cdot AD = AN \cdot AC$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

L167. Fie ABC un triunghi cu $AB > AC$. Cercul înscris în triunghi este tangent laturilor BC şi AC în D, respectiv E. Considerăm T un punct pe latura $[BC]$ şi notăm cu J centrul cercului înscris în $\triangle ABT$. Dacă DE trece prin mijlocul segmentului $[CJ]$, demonstraţi că triunghiul ATC este isoscel.

Titu Zvonaru, Comăneşti

L168. Demonstraţi că în orice triunghi, cu notaţiile uzuale, are loc inegalitatea $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{11p^2 - 15r^2 - 60Rr}{6p^2 - 6r^2 - 24Rr} \geq \dfrac{3}{2}$.

Marius Olteanu, Rm. Vâlcea

L169. Care este probabilitatea ca razele cercurilor exînscrise unui triunghi ales aleator, să fie laturile unui nou triunghi?

Petru Minuţ, Iaşi

L170. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$ cu $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = S$. Considerăm $k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n-1$ şi $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_+$ cu $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Demonstraţi inegalitatea

$$\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} (a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_k})^{\alpha_1} (S - a_{i_1} - \ldots - a_{i_k})^{\alpha_2} \leq \frac{k^{\alpha_1}(n-k)^{\alpha_2}}{n} C_n^k S.$$

(*În legătură cu 6117 din R.M.T. 1/1987*)

Paul Georgescu şi Gabriel Popa, Iaşi

L171. Pentru $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, demonstraţi că are loc inegalitatea

$$\sqrt{x} + 3\sqrt{2(x+y)} + \sqrt{y} \leq 2(\sqrt{3x+y} + \sqrt{x+3y}).$$

Marian Tetiva, Bârlad

L172. Fie $P \in \mathbb{Q}[X]$, cu $\operatorname{gr} P = n \geq 1$. Dacă P admite o rădăcină complexă a, având ordinul de multiplicitate m, cu $n < 2m$, demonstraţi că $a \in \mathbb{Q}$.

Adrian Reisner, Paris

L173. a) Există funcţii $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $|f(x) - f(y)| \geq c$, $\forall x, y \in (a,b)$, unde c este o constantă pozitivă?

b) Există funcţii $f : (a,b) \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $|f(x) - f(y)| \geq c$, $\forall x, y \in (a,b) \cap \mathbb{Q}$, unde c este o constantă pozitivă?

Geanina Hăvârneanu, Iaşi

L174. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ numere reale pozitive şi $a = \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i}\right)^2$, $b = \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{b_i}\right)^2$. Arătaţi că există $x_0 > 0$ astfel încât $\left[\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i x + b_i}\right] - [\sqrt{ax+b}] \in \{0,1\}$, $\forall x > x_0$.

Marian Tetiva, Bârlad

L175. Arătaţi că

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} C_n^{2k} \Omega_k = 2^n \Omega_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

unde $\Omega_k = \dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$, $k \in \mathbb{N}^*$ (se convine ca $\Omega_0 = 1$).

Gheorghe Costovici, Iaşi

Training problems for mathematical contests

A. Junior highschool level

G166. Prove that the following assertions are true:

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\exists\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{N}^*$ such that $x_1x_2 + x_2x_3 + x_nx_1 = x_1x_2 \ldots x_n$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$, $\nexists\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in 2\,\mathbb{N}^*$ such that $x_1x_2 + x_2x_3 + x_nx_1 = x_1x_2 \ldots x_n$.

c) $\exists\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{N}^*$ such that $x_1x_2 + x_2x_3 + x_nx_1 = x_1x_2 \ldots x_n \Leftrightarrow n \in 2\,\mathbb{N}^* + 1$.

Dan Popescu, Suceava

G167. Let $d_1 < d_2 < \ldots d_k = n$ be all the positive divisors of the natural number n. Assuming that the subscripts i, j with $j > i > 13$ exist such that $d_7^2 + d_i^2 = d_j^2$, show that n is a multiple of 8.

Titu Zvonaru, Comăneşti

G168. For any $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$, prove that the following inequality holds:

$$\frac{x(y+z)}{x+y\,z} + \frac{y(x+z)}{y+x\,z} + \frac{z(x+y)}{z+x\,y} \leq 2\left(\frac{x^2}{x+y\,z} + \frac{y^2}{y+x\,z} + \frac{z^2}{z+x\,y}\right).$$

Ştefan Gavril, Piatra Neamţ

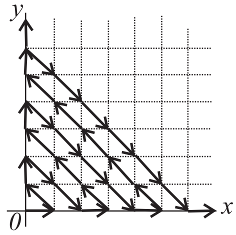
G169. Prove that an infinity of irrational numbers α exist with the property that α^3 and $\alpha^2 + \alpha$ are irrational numbers as well.

Gabi Ghidoveanu and Dumitru Mihalache, Bârlad

G170. A subset $A \subset \mathbb{R}$, of cardinal number 2009, has the property that each of its elements is greater than one tenth of the sum of the remaining 2008 numbers. Show that A contains at least 12 negative numbers.

Andrei Nedelcu, Iaşi

G171. The points in the plane whose both coordinates, in a Cartesian system of coordinates, are natural numbers, visited along the path indicated by the arrows in the figure at right, starting from the origin. We denote by $a_{n,k}$ the position of the point of coordinates (n, k) in the sequence thus obtained (for instance, $a_{0,0} = 1$, $a_{0,2} = 4$, $a_{2,2} = 13$, etc.). Express the number $a_{n,k}$ in terms of n and k.



Lucian Georges Lăduncă, Iaşi

G172. A rectangular board of size $m \times n$, $m, n \geq 2$, has unit squares at the intersections of odd-order rows with odd-order columns, colored in black while the other squares remain white. To re-color a row (column) means to change the color of all the squares on that row (column). Show that the board cannot be turned to a completely white board by recoloring a couple of rows and columns.

Răzvan Ceucă, school student, Iaşi

G173. We denote by $T(a, b, c)$ the triangle whose side lengths are a, b, c. Prove that the triangles $T(b, 2c, 2m_b)$ and $T(c, 2b, 2m_c)$ can be successively manufactured from a single (the same) cardboard sheet without losses of material.

Petru Asaftei, Iaşi

G174. The isosceles triangle ABC is considered with $m(\widehat{A}) = 40^0$. Show that no points $P \in \mathrm{Int}(ABC)$ exist such that $m(\widehat{PAB}) = 30^0$, $m(\widehat{PBC}) = 10^0$ and $m(\widehat{PCA}) = 35^0$.

Gabriel Popa and Paul Georgescu, Iaşi

G175. Let $ABCD$ be a quadrilateral inscribed in the circle of radius R. Prove that $AB \cdot AD + CB \cdot CD \leq 4R^2$.

Gheorghe Costovici, Iaşi

B. Highschool level

L166. Let $ABCD$ be a rectangle, and C a circle passing through A which intersects the lines (AB), (AC) and (AD) at the points M, N and P, respectively. Show that $AM \cdot AB + AP \cdot AD = AN \cdot AC$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

L167. Let ABC be a triangle with $AB > AC$. The circle inscribed in the triangle is tangent to the sides BC and AC at D and respectively E. We consider a point T on the side $[BC]$ and denote by J the center of the circle inscribed in $\triangle ABT$. If DE passes through the midpoint of the segment $[CJ]$, prove that the triangle ATC is isosceles.

Titu Zvonaru, Comăneşti

L168. Prove that in any triangle, with the usual notations, the following inequality holds:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{11\,p^2-15\,r^2-60\,R\,r}{6\,p^2-6\,r^2-24\,R\,r}\geq\frac{3}{2}\,.$$

Marius Olteanu, Rm. Vâlcea

L169. What is the probability that the radii of the excircles to a randomly chosen triangle be the sides of a new triangle?

Petru Minuţ, Iaşi

L170. Let $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ and $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{R}_+$ with $a_1+a_2+\cdots+a_n=S$. We consider $k\in\mathbb{N}$, $1\leq k\leq n-1$ and $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ with $\alpha_1+\alpha_2=1$. Prove the inequality

$$\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n}\left(a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_k}\right)^{\alpha_1}\left(S-a_{i_1}-\cdots-a_{i_k}\right)^{\alpha_2}\leq$$
$$\leq\frac{k^{\alpha_1}\,(n-k)^{\alpha_2}}{n}\binom{n}{k}S.$$

(*Connected with 6117 of R.M.T. 1/1987*).

Paul Georgescu and Gabriel Popa, Iaşi

L171. For any $x,\,y\in\mathbb{R}_+^*$, prove that the following inequality holds:

$$\sqrt{x}+3\sqrt{2(x+y)}+\sqrt{y}\leq 2\left(\sqrt{3\,x+y}+\sqrt{x+3\,y}\right).$$

Marian Tetiva, Bârlad

L172. Let $P\in\mathbb{Q}[X]$ with $\deg P=n\geq 1$. If P admits a complex root a with its multiplicity m such that $n<2\,m$, prove that $a\in\mathbb{Q}$.

Adrian Reisner, Paris

L173. *a*) Do exist functions $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ with the property that $|f(x)-f(y)|\geq c$ for $\forall x,y\in(a,b)$, where c is a positive constant?

b) Do exist functions $f:(a,b)\cap\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ with the property that $|f(x)-f(y)|\geq c$ for $\forall x,y\in(a,b)\cap\mathbb{Q}$, where c is a positive constant?

Geanina Hăvârneanu, Iaşi

L174. Let $a_1,a_2,\ldots,a_n$, $b_1,b_2,\ldots,b_n$ be positive real numbers and let $a=\left(\sum\limits_{i=n}^{n}\sqrt{a_i}\right)^2$, $b=\left(\sum\limits_{i=n}^{n}\sqrt{b_i}\right)^2$. Show that $x_0>0$ exists such that

$$\left[\sum_{i=n}^{n}\sqrt{a_ix+b_i}\right]-\left[\sqrt{ax+b}\right]\in\{0,1\}\,,\ \text{for }\forall x>x_0.$$

Marian Tetiva, Bârlad

L175. Show that

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}C_n^{2k}\Omega_k=2^n\,\Omega_n$$

where $\Omega_k=\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$, $k\in\mathbb{N}^*$; by convention $\Omega_0=1$.

Gheorghe Costovici, Iaşi