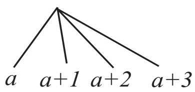
Probleme propuse[1]

Clasele primare

P.174. Mirela are un măr, o pară şi o portocală. Mama îi spune să aşeze fructele pe două farfurii astfel încât pe fiecare farfurie să fie cel mult două fructe. În câte moduri poate aşeza Mirela cele trei fructe?
(*Clasa I*) **Inst. Maria Racu, Iaşi**

P.175. Scrieţi toate numerele mai mici ca 27 care se pot descompune sub forma indicată alăturat.



(*Clasa I*) **Diana Tănăsoaie, elevă, Iaşi**

P.176. Într-o bombonieră sunt cinci bomboane cu fructe şi şapte bomboane cu ciocolată. Care este cel mai mic număr de bomboane pe care trebuie să-l luăm din bombonieră, fără să ne uităm, pentru a avea cel puţin două bomboane cu ciocolată?
(*Clasa a II-a*) **Alexandru Dumitru Chiriac, elev, Iaşi**

P.177. Cum măsurăm 1litru de apă folosind două vase negradate, unul de 5litru, iar celălalt de 8litri?
(*Clasa a II-a*) **Mariana Nastasia, elevă, Iaşi**

P.178. Arătaţi că, dacă restul este o cincime din scăzător, atunci descăzutul se împarte exact la 6. Care este cel mai apropiat descăzut de numărul 100 cu această proprietate?
(*Clasa a III-a*) **Mirela Cucoranu, elevă, Iaşi**

P.179. Se dau produsele: $a \times b = 60$, $a \times c = 70$, $a \times d = 95$. Ştiind că $b + c + d$ este de 9 ori mai mare decât a, să se afle valoarea lui a.
(*Clasa a III-a*) **Andreea Amarandei, elevă, Iaşi**

P.180. Arătaţi că din şirul $7, 28, 31, 46, 61, 100$ nu putem extrage patru numere a căror sumă să se împartă exact la trei.
(*Clasa a III-a*) **Dragoş Iacob, elev, Iaşi**

P.181. Un triunghi şi un pătrat au acelaşi perimetru, exprimat printr-un număr natural. Care este cea mai mică valoare a perimetrului? Câte valori posibile ale perimetrului sunt cuprinse între 100 şi 200?
(*Clasa a IV-a*) **Andreea Alexa, elevă, Iaşi**

P.182. Aflaţi cea mai mică valoare a lui k astfel încât $\dfrac{1}{21} + \dfrac{2}{21} + \dfrac{3}{21} + \cdots + \dfrac{k}{21}$ să fie un număr natural.
(*Clasa a IV-a*) **Ionela Bărăgan, elevă, Iaşi**

P.183. Se consideră nouă numere naturale $a, b, c, \ldots, i$. Media aritmetică a numerelor a şi b este 1, media numerelor c, d şi e este 5, iar media numerelor f, g, h şi i este 11. Aflaţi media aritmetică a numerelor $a, b, c, \ldots, i$ şi 9.
(*Clasa a IV-a*) **Ionel Nechifor, Iaşi**

[1]Se primesc soluţii până la data de 31 iunie 2010.

Clasa a V-a

V.109. Aflaţi câtul şi restul împărţirii numărului $3 \cdot 2^{2009}$ la $5 \cdot 2^{2007}$.

Damian Marinescu, Târgovişte

V.110. Determinaţi patru numere naturale x, y, z, t cu proprietatea că $2^{x-1} + 3 \cdot 2^{2y+1} + 5 \cdot 2^{3z+2} + 11 \cdot 2^{5t+1} = 2009$.

Cătălina Drăgan, Galaţi

V.111. Demonstraţi că numărul 20^{200} are 261 de cifre la scrierea în baza 10.

Geanina Hăvârneanu, Iaşi

V.112. Demonstraţi că mulţimea $A = \left\{ x = \dfrac{3n+4}{4n+3} \middle| n \in \mathbb{N}, 1000 \leq n \leq 2009 \right\}$ are 1010 elemente.

Daniela Munteanu, Iaşi

V.113. Dacă $S = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{2009}$, demonstraţi că $S > \dfrac{13}{2}$.

Al. Gabriel Mîrşanu, Iaşi

V.114. Se consideră în plan cinci drepte distincte, care împart planul în mai multe regiuni. Arătaţi că oricum am alege 2009 puncte din plan, vor exista cel puţin 126 de puncte dintr-o aceeaşi regiune.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

V.115. O mulţime de numere naturale $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_9\}$ are elementele aranjate strict crescător; media aritmetică a primelor două elemente este 1, media următoarelor trei este 5, iar media ultimelor patru este 11. Câte astfel de mulţimi există?

Ionel Nechifor şi Gabriel Popa, Iaşi

Clasa a VI-a

VI.109. Determinaţi $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ pentru care $2a + 3b + 5c + 7d = 87$, dacă:

a) a, b, c, d sunt numere prime;

b) a, b, c, d sunt pătrate perfecte.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

VI.110. Determinaţi perechile de numere naturale care au suma 2009 şi produsul multiplu al numărului 2009.

Dan Popescu, Suceava

VI.111. Demonstraţi că numărul $A = 40! \cdot \left(1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{40}\right)$ este natural, divizibil cu $2009 \cdot 7^2$ (unde $40! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 40$).

Mihai Haivas, Iaşi

VI.112. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $ad + bc = bd$. Demonstraţi că

$$\frac{a^{2009}}{b^{2009}} + \frac{a^{2008}c}{b^{2008}d} + \ldots + \frac{a^2c}{b^2d} + \frac{ac}{bd} + \frac{c}{d} \in \mathbb{N}.$$

Cătălin Budeanu, Iaşi

VI.113. După două reduceri succesive, preţul unui frigider scade de la 2000 lei la 1620 lei. Ştiind că cele două reduceri sunt proporţionale cu preţurile rămase în urma lor, aflaţi preţul frigiderului după prima reducere.

Ciprian Baghiu, Iaşi

VI.114. Pe laturile $[BC], [AC], [AB]$ ale triunghiului isoscel ABC $(AB = AC)$ considerăm punctele D, E, respectiv F, astfel încât $m(\widehat{BAD}) = 2m(\widehat{EDC})$ şi $m(\widehat{DAC}) = 2m(\widehat{FDB})$. Demonstraţi că $\triangle AEF$ este isoscel.

Doru Buzac, Iaşi

VI.115. Dreptele a şi b sunt perpendiculare pe segmentul $[AB]$ în A, respectiv în B. Considerăm punctele $C \in (AB)$, $M \in a$, $N, P \in b$ astfel încât între oricare două dintre triunghiurile ACM, BCN şi BCP există câte o congruenţă. Ştiind că $m(\widehat{BPC}) = 25°$, determinaţi măsurile unghiurilor triunghiului MNP.

Andrei Nedelcu, Iaşi

Clasa a VII-a

VII.109. Fie $ABCD$ dreptunghi, O mijlocul lui $[AC]$, $M \in (AO)$, $N \in (OC)$, $\{P\} = BM \cap AD$ şi $\{Q\} = BN \cap CD$. Demonstraţi că O este centrul de greutate al triunghiului BPQ dacă şi numai dacă $OM = ON = \frac{1}{6}AC$.

Petru Asaftei, Iaşi

VII.110. Măsurile unghiurilor A, B şi C ale triunghiului ABC sunt direct proporţionale cu $5, 4$ şi 3, iar $BC = (2 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3})$ cm. Demonstraţi că perimetrul şi aria triunghiului sunt numeric egale.

Constantin Apostol, Rm. Sărat

VII.111. Fie ABC un triunghi şi punctele $D \in (AC)$, $E \in (AB)$, $\{P\} = BD \cap CE$. Dacă $\frac{DA}{DC} = k$, demonstraţi că $k\frac{PC}{PE} - (k+1)\frac{PD}{PB} = 1$.

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

VII.112. Fie $ABCD$ trapez cu baza mare $[AB]$, $\{E\} = AD \cap BC$, $\{O\} = AC \cap BD$, iar $OP \| AB$, cu $P \in (AD)$. Demonstraţi că CP şi CE sunt bisectoarele (interioară, respectiv exterioară) unghiului $\widehat{ACD}$, dacă şi numai dacă $AB = AC$.

Claudiu Ştefan Popa, Iaşi

VII.113. a) Demonstraţi că $\sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \frac{\sqrt{3} \cdot bc}{\sqrt{b^2 + bc + c^2}}$, $\forall b, c \in \mathbb{R}_+^*$.

b) Considerând un triunghi ABC cu $m(\widehat{A}) = 120°$, $AB = c$, $AC = b$, interpretaţi geometric inegalitatea de la a).

Dan Mocanu, elev, Iaşi

VII.114. Demonstraţi că produsul a două numere naturale nenule consecutive nu poate fi egal cu produsul altor patru numere naturale consecutive.

Mihai Crăciun, Paşcani

VII.115. Demonstraţi că $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{4^k \cdot n} > k$, $\forall n, k \in \mathbb{N}^*$.

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

Clasa a VIII-a

VIII.109. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub de muchie a. Notăm cu E, F, G, H, K, L mijloacele muchiilor $AB, BC, CC', C'D', D'A'$, respectiv $A'A$. Calculaţi volumul poliedrului $B'EFGHKL$.

Adrian Corduneanu, Iaşi

VIII.110. Fie $VABCD$ piramidă patrulateră regulată. Notăm cu $u = m(\widehat{(VBC),(ABC)})$, $v = m(\widehat{(VBC),(VCD)})$ şi $t = m(\widehat{(VBC),(VAD)})$. Stabiliţi dacă printre numerele u, v, t pot exista perechi de numere egale. (*În legătură cu VIII.98 din RecMat 2/2008.*)

Claudiu Ştefan Popa, Iaşi

VIII.111. Fie ABC un triunghi de laturi a, b, c, astfel încât $b + c = a\sqrt{2}$. Demonstraţi că triunghiul este ascuţitunghic dacă şi numai dacă b şi c sunt distincte şi se află în intervalul $\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}, \frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)$.

Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă, Blaj

VIII.112. Fie $x, y \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $xy, \frac{x}{y}$ şi $y\sqrt{x^2 + (x+1)^2 + x^2(x+1)^2}$ sunt toate numere raţionale. Demonstraţi că x şi y sunt tot numere raţionale.

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

VIII.113. Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, demonstraţi că $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 2\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right)$ dacă şi numai dacă $a = b = c$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

VIII.114. Demonstraţi că oricare ar fi numerele naturale impare m, n cu $m > n + 2$, există numere naturale x, a, b astfel încât $x = a(a + m) = b(b + n)$.

Titu Zvoranu, Comăneşti

VIII.115. Demonstraţi că $5(a^2 + b^2)^2 \leq 4a^4b^4 + (a + b)^4, \forall a, b \in [1, +\infty)$.

Lucian Tuţescu şi Ion Vişan, Craiova

Clasa a IX-a

IX.101. Prin inducţie matematică se arată că are loc *inegalitate a lui Bernoulli*

$$(1)\qquad (1 + x)^n \geq 1 + nx,$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi $\forall x \in [-1, \infty)$, egalitatea fiind atinsă pentru $x = 0$. Arătaţi că:

a) dacă $n = 2k, k \in \mathbb{N}^*$, atunci (1) are loc $\forall x \in \mathbb{R}$;

b) dacă $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}^*$, atunci (1) are loc $\forall x \in [-2, \infty)$;

c) dacă $n = 3$, atunci (1) are loc $\forall x \in [-3, +\infty)$, cu egalitate când $x \in \{-3, 0\}$, iar pentru $x \in (-\infty, -3)$, (1) are loc cu sens contrar.

Dorin Dutkay, Orlando (U.S.A.) şi Florin Popovici, Braşov

IX.102. Rezolvaţi în $\mathbb{R}^3$ sistemul:

$$x+y+z = 2-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}; x^2+y^2+z^2 = 6-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}-\frac{1}{z^2}; x^3+y^3+z^3 = 2-\frac{1}{x^3}-\frac{1}{y^3}-\frac{1}{z^3}.$$

Vasile Chiriac, Bacău

IX.103. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$ cu $0 \leq x \leq y \leq z$. Dacă $\alpha \in \mathbb{R}$ este astfel încât $\alpha x + (1-\alpha)z \geq 0$, demonstraţi că $\alpha x + (1-\alpha)y \geq 0$ şi $\alpha y + (1-\alpha)z \geq 0$.

Ovidiu Pop, Satu Mare

IX.104. Fie A, B, C, D patru puncte ale cercului $\mathcal{C}(O, r)$, $\{M\} = AB \cap CD$, N şi P mijloacele coardelor $[AB]$, respectiv $[CD]$, iar Ω cel de-al patrulea vârf al paralelogramului $NMP\Omega$.

a) Arătaţi că $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{M\Omega}$.

b) Paralelele prin C şi D la AB şi paralelele prin A şi B la CD se taie două câte două în patru puncte ce determină un paralelogram de centru Ω.

c) $\Omega = O$ dacă şi numai dacă $AB \perp CD$.

Diana Vrânceanu, elevă şi Dumitru Mihalache, Bârlad

IX.105. Într-un triunghi, cu notaţiile uzuale, demonstraţi echivalenţa condiţiilor: (i) $R = r_a$; (ii) $\cos A = \cos B + \cos C$.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Clasa a X-a

X.101. Calculaţi suma $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2k+1}}}{\arcsin \frac{\sqrt{2k+1}}{k+1}}$.

Bencze Mihály, Braşov

X.102. Rezolvaţi ecuaţia $\dfrac{1}{2^x} + \log_2\left(x - \dfrac{7}{4}\right) + \dfrac{7}{4} = 0$.

Eugen Jecan, Dej

X.103. Fie S, U, A trei puncte distincte. Rotind vectorul $\overrightarrow{SA}$ în jurul lui S, cu un arc $\alpha \in (-\pi, \pi)$, obţinem punctul S'; rotind apoi $\overrightarrow{UA}$ în jurul lui U, cu un arc $\beta \in (-\pi, \pi)$, obţinem U', $U' \neq S'$. Fie $M \in S'U'$ astfel încât $\overrightarrow{S'M} = k \cdot \overrightarrow{MU'}$, unde $k \in \mathbb{R}\backslash\{0, -1\}$. Demonstraţi că poziţia punctului M nu depinde de A atunci şi numai atunci când $k = 1$, $\beta = \alpha \pm \pi$*.

Diana Vrânceanu, elevă şi Dumitru Mihalache, Bârlad

X.104. Fie p, l_a, l_b, l_c semiperimetrul, respectiv lungimile bisectoarelor unui triunghi. Determinaţi numerele reale α şi β, în funcţie de p, ştiind că soluţiile ecuaţiei $x^3 - p\sqrt{3} \cdot x^2 + \alpha x - \beta = 0$ sunt l_a, l_b şi l_c.

Cătălin Calistru, Iaşi

X.105. Determinaţi cel mai mare număr real α astfel încât inegalitatea

$$\frac{\sin x + \sin y}{2} \leq \alpha \cdot \frac{\sin \frac{x+3y}{4} + \sin \frac{3x+y}{4}}{2} + (1-\alpha) \sin \frac{x+y}{2}$$

să fie adevărată pentru orice $x, y \in [0, \pi]$.

Marian Tetiva, Bârlad

Clasa a XI-a

XI.101. Pentru $a \in \mathbb{R}_+^*$, calculaţi $\lim\limits_{x \to \infty} x\left(\left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x - e^a\right)$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

*Generalizare a *problemei comorii din insulă* a lui G. Gamow, din *One, Two, Theree ... Infinity.*

XI.102. Determinaţi funcţiile continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(x^2)-f(y^2)=(x+y)f(x-y), \forall x,y\in\mathbb{R}$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

XI.103. Fie $(x_n)_{n\geq 1}\subset\mathbb{R}_+^*$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} n(x_{n+1}-x_n)=a\in(1,+\infty)$; definim şirul $(y_n)_{n\geq 1}$ prin $y_n=\dfrac{n\ln n}{x_1+x_2+\ldots+x_n}$. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n)^n$.

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

XI.104. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^5}{5^1}+\dfrac{2^5}{5^2}+\dfrac{3^5}{5^3}+\ldots+\dfrac{n^5}{5^n}\right)$.

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

XI.105. Considerăm matricele $A_k, B_k\in\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$, $k\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, astfel încât $\det A_k=\alpha\in\mathbb{C}^*$, $\forall k\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Studiaţi convergenţa şirului $(a_n)_{n\geq 2}$ definit prin $a_n=\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{\det(A_kx+B_k)}{k!\cdot x^k}$.

Cătălin Calistru, Iaşi

Clasa a XII-a

XII.101. Rezolvaţi ecuaţia $x^2+x+1=0$ în $\mathbb{Z}_{13}$ şi în $\mathbb{Z}_{19}$, apoi deduceţi că 247 divide $(3^{7^n-1}-1)(7^{4^n-1}-1)$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

Mihai Haivas, Iaşi şi I.V. Maftei, Bucureşti

XII.102. Determinaţi primitivele funcţiei $f:\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)^{2009}}$.

Nicoleta Bran, Craiova

XII.103. Demonstraţi că există $c\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ pentru care

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(e^{\operatorname{tg}x}-1)dx\leq\frac{\pi^2}{32}\cdot\frac{e^{\operatorname{tg}c}}{\cos^2 c}.$$

Bogdan Victor Grigoriu, Fălticeni

XII.104. Determinaţi funcţiile derivabile $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ pentru care $f(0)=0$, iar $f'(x)=f(ax), \forall x\in[0,1]$, cu $a\in[0,1]$ fixat.

Gheorghe Iurea, Iaşi

XII.105. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ o funcţie semiconvexă ($f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\leq\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$, $\forall x,y\in(0,\infty)$).

a) Demonstraţi că pentru orice $x\in(0,\infty)$, şirul $(f_n(x))_{n\geq 1}$ definit prin $f_n(x)=n\left[f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)-f(x)\right]$, este monoton.

b) Deduceţi că pentru orice $x\in(0,\infty)$, şirul $(e_n(x))_{n\geq 1}$ definit prin $e_n(x)=\left(1+\dfrac{1}{nx}\right)^n$, este crescător.

Dan Ştefan Marinescu şi Viorel Cornea, Hunedoara