Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor propuse în nr. 2/2008

A. Nivel gimnazial

G146. *Fie* $x, y, z \in (0, \infty)$ *astfel încât* $xyz = 1$. *Arătaţi că*

$$\frac{xy^3}{x^4+y+z} + \frac{yz^3}{y^4+z+x} + \frac{zx^3}{z^4+x+y} \geq 1.$$

Liviu Smarandache şi Lucian Tuţescu, Craiova

Soluţie. Avem că $x^3 + y^3 \geq xy(x+y)$, cu egalitate pentru $x = y$. Atunci

$$\sum \frac{xy^3}{x^4+y+z} = \sum \frac{xy^3}{x^4+xyz(y+z)} = \sum \frac{y^3}{x^3+yz(y+z)} \geq \sum \frac{x^3}{x^3+y^3+z^3} = 1.$$

Egalitatea se atinge pentru $x = y = z = 1$.

G147. *Fie* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, *fixat, iar* a, b, c *sunt numere naturale astfel încât* $na + (n+1)\,b + 2nc = n^2 + 1$. *Arătaţi că* $n - \left[\dfrac{n-1}{2}\right] \leq a + b + c \leq n$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Cum $b - 1 = n(n - a - b - 2c)$, înseamnă că $b - 1 \vdots n$. Însă $b < n$, altfel $na + (n+1)b + 2nc > n^2 + 1$ şi atunci $b - 1 = 0$, deci $b = 1$. Condiţia din enunţ devine $na + n + 1 + 2nc = n^2 + 1 \Leftrightarrow a + 2c = n - 1 \Leftrightarrow a + b + c = n - c$. Suma $a + b + c$ este maximă când c este minim, adică pentru $c = 0$; deducem că $(a+b+c)_{\max} = n$, maxim atins când $a = n - 1$, $b = 1$, $c = 0$. Suma $a + b + c$ este minimă când c este maxim, deci pentru $c = \left[\dfrac{n-1}{2}\right]$; obţinem că $(a+b+c)_{\min} = n - \left[\dfrac{n-1}{2}\right]$, minim atins când $a = n - 1 - 2\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$, $b = 1$, $c = \left[\dfrac{n-1}{2}\right]$.

G148. *Fie* $\overline{a_1a_2\ldots a_p} \in \mathbb{N}$. *Să se arate că orice număr natural are un multiplu de forma* $\overline{a_1a_2\ldots a_pa_1a_2\ldots a_p\ldots a_1a_2\ldots a_p0\ldots0}$.

Marian Panţiruc, Iaşi

Soluţie. Fie $n \in \mathbb{N}$; considerăm numerele: $\overline{a_1a_2\ldots a_p}$, $\overline{a_1a_2\ldots a_pa_1a_2\ldots a_p}$, $\ldots$, $\overline{a_1a_2\ldots a_pa_1a_2\ldots a_p\ldots a_1a_2\ldots a_p}$, în număr de $(n+1)$. Prin împărţirea acestora la n obţinem $(n+1)$ resturi şi, cum resturile posibile sunt $0, 1, \ldots, n-1$, rezultă că cel puţin două resturi sunt egale. Fie $a = \overline{a_1a_2\ldots a_p\ldots a_1a_2\ldots a_p}$ (format din k_1 numere $\overline{a_1a_2\ldots a_p}$ şi $b = \overline{a_1a_2\ldots a_p\ldots a_1a_2\ldots a_p}$ (format din k_2 numere $\overline{a_1a_2\ldots a_p}$) două dintre numerele de mai sus, care dau acelaşi rest la împărţirea cu n. Diferenţa acestora se divide cu n, deci $a - b = \overline{a_1a_2\ldots a_pa_1a_2\ldots a_p\ldots a_1a_2\ldots a_p\,00\ldots0}$ verifică cerinţa problemei.

G149. *a) Determinaţi două numere prime* p, q *astfel încât* $p < q$, *iar* $p^2 - 1$ *are mai mulţi divizori naturali decât* $q^2 - 1$.

b) Determinaţi toate numerele prime p *pentru care* $p^2 - 1$ *are exact opt divizori naturali.*

Dan Popescu, Suceava

Soluţie. a) De exemplu, putem lua $p = 19$, $q = 23$.

b) Dacă $p \neq 2$, atunci $p^2 \equiv 1 \pmod 8$. Dacă $p \neq 3$, atunci $p^2 \equiv 1 \pmod 3$. Cum $(3, 8) = 1$, înseamnă că dacă $p \notin \{2, 3\}$, atunci $p^2 \equiv 1 \pmod{24}$, prin urmare $p^2 - 1 \,\vdots\, 24$. Pentru $p \geq 7$, avem, că $p^2 - 1 > 24$ şi, cum 24 are opt divizori naturali, $p^2 - 1$ va avea mai mult de opt divizori. Pentru $p \in \{2, 3\}$, $p^2 - 1$ are mai puţin de opt divizori. Dacă $p = 5$, atunci $p^2 - 1 = 24$ are exact opt divizori, deci singurul număr care satisface condiţiile din enunţ este 5.

G150. *Fie m şi n numere naturale nenule cu proprietatea că $m \leq 1 + 2 + \cdots + n$. Să se arate că m poate fi scris ca suma câtorva numere distincte dintre* 1, 2,..., n.

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţia 1 (**Dan Mocanu**, elev, Iaşi). Acoperim mulţimea $\left\{1, 2, 3, \ldots, \dfrac{n(n+1)}{2}\right\}$ cu următoarele sume având termenii distincţi: $1, 2, 3, \ldots, n, n+1, n+2, \ldots, n+(n-1)$, $n + (n-1) + 1$, $n + (n-1) + 2, \ldots, n + (n-1) + (n-2), \ldots, n + (n-1) + \ldots + 1$; concluzia problemei este acum imediată.

Soluţia 2 (a autorului). Demonstrăm prin inducţie după n. Pentru $n = 1$, deci $m = 1$, nu avem nimic de demonstrat; de asemenea se verifică uşor cazul $n = 2$ (deci $m = 1, 2$ sau 3). Vom presupune mai departe $n \geq 2$ şi că afirmaţia este adevărată pentru $n - 1$ şi o demonstrăm pentru n.

Dacă m este unul dintre numerele $1, 2, \ldots, n$ nu avem ce arăta. Dacă $m \geq n + 1$, avem că $1 \leq m - n \leq 1 + 2 + \ldots (n-1)$ şi, conform ipotezei de inducţie, $m - n$ este suma unor termeni distincţi din mulţimea $\{1, 2, \ldots, (n-1)\}$. Rezultă că m este suma dintre aceşti termeni şi n, ceea ce încheie demonstraţia.

G151. *Bazele unei prisme sunt poligoane cu* 2008 *vârfuri. Numerotăm cu* 1, 2,..., 2008 *vârfurile bazei inferioare şi, corespunzător, cu a_1, a_2,..., a_{2008} vârfurile bazei superioare, unde $\{a_1, a_2, \ldots, a_{2008}\} = \{1, 2, \ldots, 2008\}$.*

a) Demonstraţi că putem găsi o numerotare pentru baza superioară astfel încât $i + a_i \,\vdots\, 8$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, 2008\}$.

b) Demonstraţi că nu putem găsi o numerotare pentru baza superioară astfel încât $i + a_i \,\vdots\, 9$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, 2008\}$.

Gabriel Popa şi Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. a) De exemplu, putem lua $a_1 = 2007$, $a_2 = 2006$, ...,$a_{2007} = 1$, $a_{2008} = 2008$.

b) Dacă ar exsta o numerotare pentru care $i + a_i \,\vdots\, 9$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, 2008\}$, atunci $(1 + a_1) + (2 + a_2) + \ldots + (2008 + a_{2008}) \,\vdots\, 9$, prin urmare $2(1 + 2 + \ldots + 2008) \,\vdots\, 9$. Am obţine astfel că $2008 \cdot 2009 \,\vdots\, 9$, contradicţie.

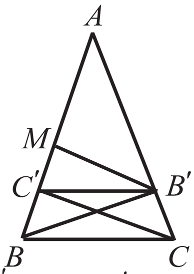
G152. *În triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$) notăm cu B', C' picioarele înălţimilor din B, respectiv C. Dacă $AB = 2\,B'C'$, să se determine unghiurile triunghiului.*

Nela Ciceu, Bacău şi Titu Zvonaru, Comăneşti

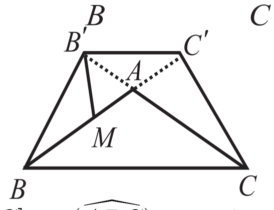
Soluţie. Vom analiza două cazuri, după cum unghiul $\widehat{A}$ este ascuţit sau obtuz.

a) Fie M mijlocul laturii $[AB]$; atunci $[B'M]$ va fi mediană în $\triangle ABB'$

dreptunghic şi deducem că $B'M = \frac{1}{2}AB$. Avem şi că $B'C' = \frac{1}{2}AB$, prin urmare $B'C' = B'M$, deci $\widehat{B'MB} \equiv \widehat{B'C'A}$. Însă $\widehat{B'C'A} \equiv \widehat{B}$ (deoarece $B'C' \| BC$) şi atunci $m(\widehat{B}) = m(\widehat{B'MC'}) = 180^\circ - 2m(\widehat{MBB'}) = 180^\circ - 2[90^\circ - m(\widehat{A})] = 2m(\widehat{A})$, relaţie care împreună cu $m(\widehat{A}) + 2m(\widehat{B}) = 180^\circ$ conduce la $m(\widehat{A}) = 36^\circ$, $m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = 72^\circ$.



b) Dacă $\widehat{A}$ este obtuz, atunci $\triangle B'MA$ va fi isoscel şi cu un raţionament asemănător celui de mai sus obţinem că $m(\widehat{B}) = m(\widehat{B'C'M}) = 180^\circ - 2m(\widehat{B'AB}) = 180^\circ - 2 \cdot 2m(\widehat{B}) = 180^\circ - 4m(\widehat{B})$, prin urmare $m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = 36^\circ$, iar $m(\widehat{A}) = 108^\circ$.



G153. *În triunghiul ABC, M este mijlocul laturii $[BC]$, $m(\widehat{ABC}) = 30^\circ$ şi $m(\widehat{ACB}) = 105^\circ$. Perpendiculara din C pe AM taie AB în Q. Calculaţi valoarea raportului $\frac{QA}{QB}$.*

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

Soluţie. Ducem $CE \perp AB$, $E \in (AB)$. Folosind triunghiul CEM echilateral şitriunghiul AEC dreptunghic isoscel, găsim că $ME = EC = EA$, deci triunghiul AEM este isoscel cu $m(AEM) = 150^\circ$. Atunci $m(\widehat{EAM}) = 15^\circ$, deci $m(\widehat{MAC}) = 30^\circ$ şi $m(\widehat{AMC}) = 45^\circ$. Prin urmare, $m(\widehat{BCQ}) = 45^\circ$ şi $m(\widehat{ACQ}) = 60^\circ$. Obţinem că

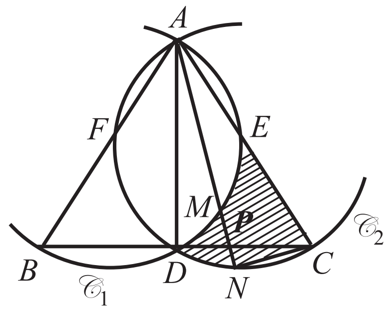
$$\frac{QA}{QB} = \frac{\mathcal{A}_{ACQ}}{\mathcal{A}_{BCQ}} = \frac{BC \cdot CQ \sin BCQ}{AC \cdot CQ \sin \widehat{ACQ}} = \frac{AC \sin 60^\circ}{BC \sin 45^\circ}.$$

Dar $AC = EC\sqrt{2} = \frac{BC\sqrt{2}}{2}$ şi atunci $\frac{QA}{QB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

G154. *Fie D mijlocul laturii $[BC]$ a triunghiului echilateral ABC de latură 1, iar P un punct mobil pe $[CD]$. Notăm cu M şi N proiecţiile pe AP ale punctelor B, respectiv C. Aflaţi aria locului geometric descris de segmentul $[MN]$.*

Marius Olteanu, Rm. Vâlcea

Soluţie. Observând că patrulaterele $ABDM$ şi $ACND$ sunt inscriptibile, deducem că punctele M şi N se află pe cercurile $\mathcal{C}_1$ (circumscris triunghiului ABD), respectiv $\mathcal{C}_2$ (circumscris triunghiului ACD). Dacă E este mijlocul laturii $[AC]$, se constată că M parcurge arcul mic $\overparen{DE}$ al cercului $\mathcal{C}_1$, în timp ce N parcurge arcul mic $\overparen{CD}$ al cercului $\mathcal{C}_2$. Astfel, locul geometric măturat de $[MN]$ este suprafaţa haşurată în figură. Observăm că segmentele de disc mărginite de $\mathcal{C}_1$ şi $[DE]$, respectiv de $\mathcal{C}_2$ şi $[CD]$, sunt congruente; atunci aria locului geometric va fi egală cu aria triunghiului echilateral CDE, adică $\frac{\sqrt{3}}{16}$.

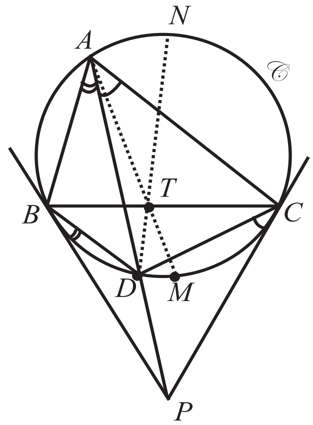


G155. *Fie $\mathcal{C}$ cercul circumscris $\triangle ABC$ ascuţitunghic. Notăm cu P punctul de intersecţie al tangentelor duse la cerc în B şi C, $\{D\} = AP \cap \mathcal{C}$, iar M şi N sunt mijloacele arcului mic $\overset{\frown}{BC}$, respectiv arcului mare $\overset{\frown}{BC}$. Să se arate că dreptele AM, DN şi BC sunt concurente.*

Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Fie $\{T\} = AM \cap BC$. Cum AM este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$, rezultă că

(1) $$\frac{BT}{TC} = \frac{AB}{AC}.$$



Vom arăta că DT este bisectoare pentru $\widehat{BDC}$; atunci D, T, N vor fi coliniare şi de aici concluzia problemei.

Cum $\widehat{BAP} \equiv \widehat{PBD}$, rezultă că $\triangle PAB \sim \triangle PBD$, deci $\dfrac{PB}{PD} = \dfrac{AB}{BD}$. Analog se arată că $\triangle PAC \sim \triangle PCD$, de unde $\dfrac{PC}{PD} = \dfrac{AC}{CD}$. Însă $PB = PC$, prin urmare $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AC}{CD} \Leftrightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{CD}$. Ţinând cont de (1), obţinem că $\dfrac{BT}{TC} = \dfrac{BD}{DC}$, adică DT este bisectoarea lui $\widehat{BDC}$, ceea ce încheie rezolvarea.

B. Nivel liceal

L146. *În plan se consideră dreptele d_1, d_2,..., d_{n+1}, oricare două neparalele. Notăm cu $\alpha_k = m(\widehat{d_k, d_{k+1}})$, $\alpha_k \leq 90°$, $k = \overline{1,n}$. Pe d_1 se consideră un segment de lungime 2 care se proiectează pe d_2, apoi segmentul obţinut se proiectează pe d_3 şi tot aşa, până când pe d_{n+1} se obţine un segment de lungime 1. Ştiind că $\operatorname{tg}\left(\min\left\{\alpha_i \mid i = \overline{1,n}\right\}\right) = \sqrt{\sqrt[n]{4} - 1}$, determinaţi unghiurile α_k, $k = \overline{1,n}$.*

Cristian Săvescu, student, Bucureşti

Soluţie. Fie A_1B_1 segmentul de lungime 2 de pe d_1, iar $A_k = pr_{d_k}A_{k-1}$, $B_k = pr_{d_k}B_{k-1}$, $k = \overline{2, n+1}$. Cum $A_{k+1}B_{k+1} = A_kB_k \cdot \cos\alpha_k$, atunci $A_{n+1}B_{n+1} = A_1B_1 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \ldots \cos\alpha_n$, de unde $\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \ldots \cos\alpha_n = \dfrac{1}{2}$. Fie $\alpha_p = \min\{\alpha_i | i = \overline{1,n}\}$; cum cosinusul este descrescător pe $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, avem $\cos\alpha_p \geq \cos\alpha_k$, $\forall k = \overline{1,n}$ şi astfel $\cos^n\alpha_p \geq \dfrac{1}{2}$, deci $\cos\alpha_p \geq \dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}$, apoi $\sin\alpha_p = \sqrt{1 - \cos^2\alpha_p} \leq \dfrac{\sqrt{\sqrt[n]{4} - 1}}{\sqrt[n]{2}}$, prin urmare $\operatorname{tg}\alpha_p \leq \sqrt{\sqrt[n]{4} - 1}$. Conform ipotezei, rezultă că se atinge egalitatea; acest lucru are loc pentru $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 \ldots = \cos\alpha_n$, deci când $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \arccos\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}$.

L147. *Se consideră un poligon convex cu n laturi, $n \geq 4$, având proprietatea că oricare două diagonale nu sunt paralele şi oricare trei nu sunt concurente în puncte diferite de vârfurile poligonului. Se notează cu n_i numărul punctelor de intersecţie a* *diagonalelor interioare poligonului şi cu n_e cel al punctelor de intersecţie exterioare poligonului.*

a) Să se arate că există exact opt poligoane care verifică relaţia $n_i > n_e$.

b) Să se arate că există exact trei poligoane pentru care $n_i + n_e = kn^2$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Mihai Haivas, Iaşi

Soluţie. Fiecare punct interior de intersecţie a diagonalelor este unic determinat de cele două diagonale ce-l conţin, deci de patru vârfuri ale poligonului; rezultă că $n_i = C_n^4$. Cum sunt $\dfrac{n(n-3)}{2}$ diagonale, care se intersectează în $C^2_{\frac{n(n-3)}{2}}$ puncte, fiecare vârf al poligonului fiind numărat de C^2_{n-3} ori (se obţine ca intersecţie a oricare două diagonale care trec prin acel vârf), obţinem că numărul total de intersecţii, fără vârfuri, este $n_i + n_e = C^2_{\frac{n(n-3)}{2}} - nC^2_{n-3} = \dfrac{n(n-3)(n^2-7n+14)}{8}$. Prin urmare, $n_l = \dfrac{n(n-3)(n-4)(n-5)}{12}$.

a) Din condiţia $n_i > n_e$ rezultă că $n^3 - 15n + 38 < 0$, cu soluţiile $n \in \{4, 5, 6, \ldots, 11\}$.

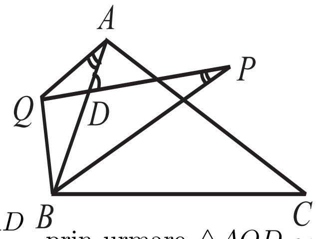
b) Condiţia $n_i + n_e = kn^2$ este echivalentă cu $n^3 - 10n^2 + (35 - 8k)n - 42 = 0$, deci $n \in \{7, 14, 12\}$, cărora le corespund valorile $k \in \{1, 11, 33\}$.

Notă. Într-o manieră asemănătoare a rezolvat problema dl. **Daniel Văcaru**, Piteşti.

L148. *Pe latura (AB) a triunghiului ABC considerăm punctul D astfel încât $AB = 4\,AD$. De aceeaşi parte a laturii AB ca şi punctul C, luăm un punct P astfel încât $\widehat{PDA} \equiv \widehat{ACB}$ şi $PB = 2\,PD$. Demonstraţi că patrulaterul $ABCP$ este inscriptibil.*

Nela Ciceu, Bacău şi Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţia 1 (a autorilor). Considerăm punctul Q astfel încât AB separă P şi Q, $AB = 2AQ$ şi $\widehat{QAB} \equiv \widehat{BPD}$. Atunci $\dfrac{AQ}{AB} = \dfrac{PD}{PB}\left(= \dfrac{1}{2}\right)$ şi obţinem că $\triangle AQB \sim \triangle PDB$, de unde $\widehat{AQB} = \widehat{PDB}$. Rezultă că $m(\widehat{AQB}) + m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{PDB}) + m(\widehat{PDA}) = 180°$, ceea ce asgură inscriptibilitatea patrulaterului $AQBC$. Din $AB = 2AQ$ şi $AB = 4AD$ deducem că $AQ^2 = AD \cdot AB$, astfel scris $\dfrac{AQ}{AB} = \dfrac{AD}{AQ}$, prin urmare $\triangle AQD \sim \triangle ABQ$. Obţinem că $\widehat{ADQ} \equiv \widehat{AQB}$ şi cum avem şi $\widehat{AQB} \equiv \widehat{PDB}$, rezultă că punctele Q, D şi P sunt coliniare. Ne amintim că $\widehat{QAB} \equiv \widehat{QPB}$, deci patrulaterul $AQBP$ este inscriptibil. Inscriptibilitatea patrulaterelor $AQBC$ şi $AQBP$ arată că punctele A, Q, B, C, P sunt conciclice, de unde concluzia problemei.



Soluţia 2 (**Daniel Văcaru**, Piteşti). Folosind relaţia lui Stewart în $\triangle PAB$, obţinem că $PA^2 \cdot \dfrac{BD}{AB} - PD^2 + PB^2 \cdot \dfrac{AD}{AB} = AD \cdot DB$, deci $PA^2 \cdot \dfrac{3}{4} - PD^2 + PB^2 \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{16}AB^2$ şi, cum $PB = 2PD$, deducem că $PA^2 \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{16}AB^2$, adică $PA = \dfrac{1}{2}AB$. Aplicăm acum teorema cosinusului în $\triangle ADP : PA^2 = AD^2 + DP^2 - 2AD \cdot DP \cdot \cos C$,

de unde $DP^2 - \frac{1}{2}AB \cdot DP \cdot \cos C - \frac{3}{16}AB^2 = 0$, relaţie pe care o vom privi ca ecuaţie de gradul II în necunoscuta DP. Singura soluţie pozitivă a acestei ecuaţii este $DP = \frac{1}{4} \cdot AB \cdot (\cos C + \sqrt{3 + \cos^2 C})$. Cum $\cos \widehat{APB} = \frac{PA^2 + PB^2 - AB^2}{2PA \cdot PB}$, înlocuind PA şi PD cu valorile găsite anterior şi făcând calculele, obţinem $\cos \widehat{APB} = \cos(\widehat{ACB})$, prin urmare $\widehat{APB} \equiv \widehat{ACB}$, ceea ce arată că patrulaterul $ABCP$ este inscriptibil.

L149. *Să se determine poziţia punctului P pe directoarea parabolei $\mathcal{P}$, astfel încât aria triunghiului PT_1T_2 să fie minimă, unde T_1 şi T_2 sunt punctele de contact cu parabola ale tangentelor duse din P la $\mathcal{P}$.*

Adrian Corduneanu, Iaşi

Soluţia 1 (a autorului). Raportăm parabola la un reper canonic, având originea în vârful O al parabolei şi drept axă a absciselor, perpendiculara dusă din O pe directoare. Ecuaţia parabolei este $\mathcal{P} : y^2 = 2px (p > 0)$, iar cea a directoarei $d : x = -\frac{p}{2}$. Se ştie (sau se verifică!) faptul că tangentele PT_1 şi PT_2, duse la parabolă din punctul $P \in d$, sunt ortogonale; prin urmare, $S_{PT_1T_2} = \frac{1}{2}PT_1 \cdot PT_2$.

Fie $T_1(x_0, y_0)$, cu $y_0^2 = 2px_0$, $y_0 > 0$. Ecuaţia tangentei PT_1 este $yy_0 = p(x + x_0)$ şi cum $x_p = -\frac{p}{2}$, obţinem $y_p = -\frac{p^2}{2y_0} + \frac{y_0}{2}$, deci $PT_1^2 = \left(x_0 + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(y_0 + \frac{p^2}{2y_0} - \frac{y_0^2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4p^2y_0^2}(y_0^2 + p^2)^3$. Tangenta PT_2 trece prin P şi are panta $-\frac{y_0}{p}$; ecuaţia sa va fi $y = -\frac{y_0}{p}x - \frac{p^2}{2y_0}$. Intersectând această tangentă cu parabolă, găsim coordonatele punctului T_2, anume $\left(\frac{p^3}{2y_0^2}, -\frac{p^2}{y_0}\right)$. Astfel, $PT_2^2 = \left(\frac{p^3}{2y_0^2} + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(-\frac{p^2}{y_0} + \frac{p^2}{2y_0} - \frac{y_0}{2}\right)^2 = \frac{1}{4y_0^4}(y_0^2 + p^2)^3$.

Pătratul ariei triunghiului PT_1T_2 se poate scrie acum în funcţie de parametrul y_0: $S(y_0) = \left(\frac{1}{2} \cdot PT_1 \cdot PT_2\right)^2 = \frac{1}{8p} \cdot \frac{(y_0^2 + p^2)^3}{y_0^3}$. Derivata acestei funcţii este $S'(y_0) = \frac{3}{8py_0^4}(y_0^2 + p^2)^2(y_0^2 - p^2)$ şi se anulează doar în $y_0 = p$ (deoarece y_0 a fost considerat pozitiv). Obţinem că S are un minim egal cu $S_{\min} = p^2$, care se atinge când $y_0 = p$, deci pentru punctul $P\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$.

Soluţia 2 (**Gheorghe Costovici**, Iaşi). Vom rezolva problema într-un caz ceva mai general, când P nu aparţine numaidecât directoarei parabolei, ci unei drepte perpendiculare pe axa de simetrie a acesteia şi care nu are niciun punct comun cu parabola. Fie $y^2 = ax$, $a > 0$, ecuaţia parabolei, iar $T_i(x_i, y_i)$, cu $y_i^2 = ax_i$, $x_1 \neq x_2$, $x_i \neq 0$. Tangenta în T_i la parabolă are ecuaţia $\frac{1}{2}(y + y_i) = axx_i$, $i = \overline{1,2}$. Intersectând cele două tangente, obţinem coordonatele punctului P, anume $P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, ax_1x_2\right)$.

Fie $y = k$, $k < 0$, ecuaţia dreptei pe care se află P; atunci $k = ax_1x_2 < 0$, deci putem alege $x_1 > 0, x_2 < 0$. Aria triunghiului PT_1T_2 va fi

$$S_{PT_1T_2} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{x_1+x_2}{2} & k \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{ax_1} - x_1\right)\left[k - \frac{a}{2}\left(x_1^2 + \frac{k^2}{a^2x_1^2}\right)\right].$$

Gândim această arie ca o funcţie în nedeterminata x_1, derivata acestei funcţii este $\frac{3}{4} \cdot \frac{a}{x_1^4} \cdot \left(x_1^2 + \frac{k}{a}\right)\left(x_1^2 - \frac{k}{a}\right)^2$, iar punctele critice ale funcţiei sunt $x_1' = \sqrt{\frac{-k}{a}}$ şi $x_1'' = -\sqrt{\frac{-k}{a}}$. Studiind semnul derivatei, se observă că x_1' este punct de minim pentru arie şi obţinem că $x_p = 0$. În concluzie, punctul P căutat este intersecţia dreptei date cu Ox.

L150. *Fie tetraedrul $A_1A_2A_3A_4$, iar P un punct în interiorul său. Notăm cu $A_{ij} \in (A_iA_j)$ proiecţiile ortogonale ale lui P pe muchiile A_iA_j ale tetraedrului. Demonstraţi că*

$$\mathcal{V}_{PA_{12}A_{13}A_{23}} + \mathcal{V}_{PA_{12}A_{14}A_{24}} + \mathcal{V}_{PA_{13}A_{14}A_{34}} + \mathcal{V}_{PA_{23}A_{24}A_{34}} \le \frac{1}{4}\mathcal{V}_{A_1A_2A_3A_4}.$$

Când se atinge egalitatea?

Marius Olteanu, Rm. Vâlcea

Soluţie. Fie $P_1 = Pr_{(A_2A_3A_4)}A_1$; din reciproca teoremei celor trei perpendiculare, obţinem că $P_1A_{23} \perp A_2A_3$, $P_1A_{24} \perp A_2A_4$, $P_1A_{34} \perp A_3A_4$, prin urmare $A_{23}A_{24}A_{34}$ este triunghiul podar al punctului P_1 în raport cu $\triangle A_2A_3A_4$. Aria s_1 a acestui triunghi este cel mult un sfert din aria S_1 a $\triangle A_2A_3A_4$. Dacă mai notăm $h_1 = A_1P_1$, $x_1 = PP_1$, atunci $\frac{\mathcal{V}_{PA_{23}A_{24}A_{34}}}{\mathcal{V}_{A_1A_2A_3A_4}} = \frac{x_1s_1}{h_1S_1} \le \frac{1}{4} \cdot \frac{x_1}{h_1}$. Introducem analog x_2, x_3, x_4 şi h_2, h_3, h_4; putem scrie încă trei inegalităţi analoage celei precedente. Concluzia problemei se obţine adunând cele patru inegalităţi şi ţinând seama de relaţia lui Gergonne $\left(\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} + \frac{x_4}{h_4} = 1\right)$.

Deoarece $4s_i = S_i$ doar atunci când P_i coincide cu centrul cercului circumscris feţei care se opune vârfului A_i, rezultă că egalitatea se atinge când P este centrul sferei circumscrise tetraedrului.

L151. *Să se demonstreze că nu există numere naturale n şi k astfel încât*

$$\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{2n+1}\right] = \left[\left(4+\sqrt{15}\right)^k\right].$$

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

Soluţie. Avem că $(2+\sqrt{3})^{2n+1} = 2^{2n+1} + C_{2n+1}^1 2^{2n}\sqrt{3} + C_{2n+1}^2 2^{2n-1} \cdot 3 + \ldots + C_{2n+1}^{2n+1}(\sqrt{3})^{2n+1} = a_n + b_n\sqrt{3}$, cu $a_n, b_n \in \mathbb{N}$, iar $(2-\sqrt{3})^{2n+1} = a_n - b_n\sqrt{3}$. Astfel, $[(2+\sqrt{3})^{2n+1}] = [(2+\sqrt{3})^{2n+1} + (2-\sqrt{3})^{2n+1} - 1 + 1 - (2-\sqrt{3})^{2n+1}] = [2a_n - 1 + 1 - (2-\sqrt{3})^{2n+1}] = 2a_n - 1$, deoarece $1 - (2-\sqrt{3})^{2n+1} \in (0,1)$. La fel stabilim că $(4+\sqrt{15})^k = c_k + d_k\sqrt{15}$, $(4+\sqrt{15})^k = c_k - d_k\sqrt{15}$, $c_k, d_k \in \mathbb{N}$, iar $[(4+\sqrt{15})^k] = 2c_k - 1$. Dacă presupunem că există n şi k cu proprietăţile cerute, avem $a_n = c_k$, deci $2^{2n+1} + M_3 = 4^k + M_{15}$; rezultă că $3|2\cdot 4^n - 4^k$. Dar $2\cdot 4^n - 4^k = 2(M_3+1) - (M_3+1) = M_3 + 1$ şi obţinem contradicţia $3|1$, prin urmare nu există n şi k cu proprietatea cerută.

L152. *Pentru $a, b, c \in \mathbb{R}$ şi $x \in \mathbb{R}_+$, demonstraţi inegalitatea*

$$\frac{9}{a^2+b^2+c^2} \le \frac{3\,(x+1)^2\,(a+b+c)^4}{\left[3(x^2+1)(a^2+b^2+c^2)+2x(a+b+c)^2\right](ab+bc+ca)^2} \le \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

I. V. Maftei şi Dorel Băiţan, Bucureşti

Soluţie. Utilizând sumarea ciclică, inegalitatea din stânga se scrie $3[3(x^2+1)(\sum a^2) + 2x(\sum a)^2]\cdot(\sum ab)^2 \le (x^2+1)(\sum a)^4(\sum a^2)$ şi aceasta se obţine adunând inegalităţile

$$(1)\qquad 9(\textstyle\sum ab)^2 \le (\sum a)^4; 3(\sum ab)^2 \le (\sum a)^2(\sum a^2),$$

prima multiplicată prin $(x^2+1)(\sum a^2)$, iar a doua prin $2x(\sum a)^2$.

Inegalitatea din dreapta se scrie sub forma

$$(x+1)^2a^2b^2c^2(\textstyle\sum a)^4 \le (\sum a^2b^2)(\sum ab)^2[(x^2+1)(\sum a^2) + \frac{2x}{3}(\sum a)^2]$$

şi se poate obţine adunând inegalităţile

$$(2)\qquad a^2b^2c^2(\textstyle\sum a)^4 \le (\sum a^2b^2)(\sum ab)^2(\sum a^2); a^2b^2c^2(\sum a)^2 \le \frac{1}{3}(\sum a^2b^2)(\sum ab)^2,$$

prima multiplicată prin (x^2+1), iar a doua prin $2x(\sum a)^2$.

Justificarea inegalităţilor (1) şi (2) revine la demonstrarea inegalităţilor $9(\sum ab)^2 \le (\sum a)^4$; $(\sum a)^2 \le 3(\sum a^2)$; $3abc(\sum a) \le (\sum ab)^2$; $abc(\sum a) \le \sum a^2b^2$, care sunt relativ uzuale.

L153. *Găsiţi toate funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că*

$$f\left(x^2+xy+yf(y)\right) = xf(x+y) + f^2(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Adrian Zahariuc, student, Princeton

Soluţie. Căutăm un $z \ne x$ astfel încât $x^2+xy = z^2+zy$; găsim $z = -x-y$. Atunci $xf(x+y) + f^2(y) = f(x^2+xy+yf(y)) = f(z^2+zy+yf(y)) = zf(z+y) + f^2(y) = (-x-y)f(-x) + f^2(y)$. Rezultă că $xf(x+y) = -(x+y)f(-x)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Deducem că $\frac{f(x)}{x}(x \ne 0)$ este constantă, deci $f(x) = cx$, $c \in \mathbb{R}$. Cum pentru $x = 0$ şi $y \ne 0$ obţinem $f(0) = 0$, rezultă că $f(x) = cx$, $c \in \mathbb{R}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Se verifică uşor că toate aceste funcţii au proprietatea dorită.

Notă. O soluţie corectă, dar ceva mai laborioasă, a fost primită din partea d-lui **Daniel Văcaru**, Piteşti.

L154. *Fie $P \in \mathbb{R}[X]$ un polinom de gradul n şi $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia polinomială asociată. Ştiind că mulţimea $\{x \in \mathbb{R} \mid p(x) = 0\}$ are k elemente (distincte), iar* *funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |p(x)|$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$, arătaţi că numărul maxim de rădăcini complexe nereale ale lui P este egal cu $2\left[\frac{n}{2}\right] - 2k$.*

Vlad Emanuel, student, Bucureşti

Soluţie. Studiem derivabilitatea funcţiei f. Dacă $x_0 \in \mathbb{R}$ şi $p(x_0) \neq 0$, atunci p are semn constant într-o vecinătate a lui x_0. Pe această vecinătate $f(x) = p(x)$ (sau $f(x) = -p(x)$. Rezultă că f este derivabilă în x_0. Dacă $x_0 \in \mathbb{R}$ şi $P(x_0) = 0$, atunci

$f'_s(x_0) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \dfrac{|P(x)| - |P(x_0)|}{x - x_0} = -\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \left|\dfrac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0}\right| = -|P'_s(x_0)| = -|P'(x_0)|$ şi

$f'_d(x_0) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \dfrac{|P(x)| - |P(x_0)|}{x - x_0} = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \left|\dfrac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0}\right| = |P'_d(x_0)| = |P'(x_0)|$.

În concluzie, f este derivabilă în x_0 dacă şi numai dacă $-|P'(x_0)| = |P'(x_0)| \Leftrightarrow P'(x_0) = 0$.

Prin urmare, f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă orice rădăcină a lui P este cel puţin dublă. Cum P are k rădăcini reale distincte, rezultă că P are cel puţin $2k$ rădăcini reale.

Pentru $n = 2p$, deducem că P are cel mult $2p - 2k$ rădăcini complexe nereale, iar pentru $n = 2p + 1$, P are cel mult $2p + 1 - (2k + 1)$ rădăcini complexe nereale (am folosit faptul că rădăcinile complexe sunt perechi). În final avem cel mult $2\left[\frac{n}{2}\right] - 2k$ rădăcini complexe nereale.

Cum pentru $n = 2p$, $P = (X - 1)^2 \ldots (X - k)^2(X^2 + 1)^{p-k}$ verifică ipotezele problemei şi are $2p - 2k$ rădăcini complexe nereale, iar pentru $n = 2p + 1$, $P = (X - 1)^3(X - 2)^2 \ldots (X - k)^2(X^2 + 1)^{p-k}$ verifică ipotezele şi are $2p - 2k$ rădăcini nereale, concluzionăm că numărul căutat este egal cu $2\left[\frac{n}{2}\right] - 2k$.

L155. *Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ două matrice astfel încât matricea $AB - BA$ să fie inversabilă. Să se arate că urma matricei $(I_2 + AB)(AB - BA)^{-1}$ este egală cu 1.*

Florina Cârlan şi Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Considerăm plinomul $f(x) = \det[I_2 + AB + x(BA - AB)]$, care are gradul doi (coeficientul lui x^2 este egal cu $\det(BA - AB) = \det(AB - BA) \neq 0$). Observăm că $f(0) = f(1)$, ceea ce arată că punctul de extrem al funcţiei f este $x = \dfrac{1}{2}$.

Pe de altă parte, $f(x) = \det(BA - AB)\det[(I_2 + AB)(BA - AB)^{-1} + xI_2] = \det(BA - AB)(x^2 + xtr(P) + \det P)$, unde $P = (I_2 + AB)(BA - AB)^{-1}$, ceea ce înseamnă că punctul de extrem este $-\dfrac{1}{2}tr(P) = -\dfrac{1}{2}tr[(I_2 + AB)(BA - AB)^{-1}]$. Prin urmare, $-\frac{1}{2}tr[(I_2 + AB)(BA - AB)^{-1}] = \dfrac{1}{2}$, de unde $tr[(I_2 + AB)(AB - BA)^{-1}] = 1$.

Notă. Soluţie corectă a dat dl. **Daniel Văcaru**, Piteşti.