PROBLEME ŞI SOLUŢII

Soluţiile problemelor propuse în nr. 2/2008

Clasele primare

P.154. *Dorina are 15 baloane roşii şi albastre. Câte baloane roşii poate avea, dacă numărul acestora este mai mic decât numărul baloanelor albastre şi este cel puţin egal cu 3?*

(*Clasa I*) **Inst. Maria Racu, Iaşi**

Soluţie. Numărul baloanelor roşii poate fi $3, 4, 5, 6$ sau 7.

P.155. *Dintr-o carte lipsesc câteva pagini, de la numărul 71 la numărul 94. Câte foi lipsesc din această carte?*

(*Clasa I*) **Ionela Bărăgan, elevă, Iaşi**

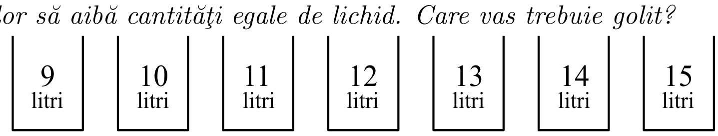
Soluţie. Prima foaie care lipseşte are paginile 71 şi 72, iar ultima are paginile 93 şi 94. În total lipsesc 12 foi.

P.156. *La concursul "Desene pe asfalt", elevii claselor I-IV de la Şcoala "Otilia Cazimir" au acumulat 50 de puncte şi cel puţin 2 premii din fiecare categorie. Care este cel mai mare număr de premii pe care-l pot obţine elevii, dacă pentru premiul I s-au acordat 10 puncte, pentru premiul al II-lea s-au acordat 6 puncte, iar pentru premiul al III-lea s-au acordat 4 puncte?*

(*Clasa a II-a*) **Înv. Elena Porfir, Iaşi**

Soluţie. Numărul maxim de premii se obţine în cazul: 2 premii I, 3 premii II şi 3 premii III, în total 8 premii.

P.157. *Prin golirea unui singur vas, ales dintre cele de mai jos, putem face ca restul vaselor să aibă cantităţi egale de lichid. Care vas trebuie golit?*



(*Clasa a II-a*) **Amalia Cantemir, elevă, Iaşi**

Soluţie. Distribuim lichidul din vasul de 15 litri în primele 6 vase astfel: 5 l, 4 l, 3 l, 2 l, 1 l, 0 l. În acest mod, în fiecare vas vom avea 14 litri.

P.158. *Aflaţi trei numere naturale ştiind că, adunându-le două câte două, obţinem* $100, 89$, *respectiv* 141.

(*Clasa a III-a*) **Inst. Maria Racu, Iaşi**

Soluţie. Obţinem că dublul sumei celor trei numere este 330, deci suma celor trei numere este $330 : 2 = 165$. Astfel, primul număr este $165 - 100 = 65$, al doilea este $165 - 89 = 76$, iar al treilea este $165 - 141 = 24$.

P.159. *Se consideră numerele:* $a = 1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + 2008$, $b = 2 + 5 + 8 + \cdots + 2009$, $c = 3 + 6 + 9 + \cdots + 2010$. *Arătaţi că suma* $a + b + c$ *se împarte exact la* 3, *fără să calculaţi această sumă.*

(*Clasa a III-a*) **Iuliana Moldovan, elevă, Iaşi**

Soluţie. Putem scrie $a + b + c = (1 + 2 + 3) + (4 + 5 + 6) + (7 + 8 + 9) + \ldots + (2008 + 2009 + 2010)$. În fiecare paranteză avem suma a trei numere consecutive, care se împarte exact la 3, deci $a + b + c$ se împarte exact la 3.

P.160. *Numărul a este de forma $\overline{xy0}$, iar numărul b este de forma $\overline{uv}$. Să se afle a şi b ştiind că $a + b = 22$ zeci.*

(*Clasa a III-a*) **Dragoş Toma, elev, Iaşi**

Soluţie. Condiţia din problemă se scrie $\overline{xy0} + \overline{uv} = 220$, din care se deduce $v = 0$, iar $\overline{xy} + u = 22$. Pentru perechea (a, b) avem posibilităţile: $(210, 10)$; $(200, 20)$; $(190, 30) \ldots (130, 90)$.

P.161. *Fie a şi b două numere naturale astfel încât diferenţa lor este de 5 ori mai mică decât suma lor. Să se arate că numărul cel mai mare se împarte exact la 3, iar cel mai mic se împarte exact la 2.*

(*Clasa a IV-a*) **Diana Tănăsoaie, elevă, Iaşi**

Soluţie. Fie a şi b cele două numere. Din $a + b = 5(a - b)$ obţinem $2a = 3b$, deci b trebuie să fie par. Înlocuind $b = 2c$, rezultă că $a = 3c$, prin urmare a se împarte exact la 3.

P.162. *Maria are 9 săculeţi cu monede. Cel puţin un săculeţ cântăreşte un kilogram. În orice grupare de 5 săculeţi, cel puţin 3 săculeţi au aceeaşi masă, iar în orice grupare de 6 săculeţi, cel mult 5 săculeţi au aceeaşi masă. Care este cel mai mare număr de săculeţi de 1 kg pe care îl poate avea Maria?*

(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

Soluţie. Nu putem avea mai mult de 5 săculeţi de 1 kg, deoarece am găsi o grupare de 6 săculeţi de aceeaşi masă. Numărul maxim posibil de săculeţi de 1 kg este 5 şi poate fi atins, de exemplu, dacă Maria are 5 săculeţi de 1 kg şi încă 4 de o altă masă, aceeaşi, caz în care ar fi îndeplinită şi prima condiţie (conform principiului cutiei).

P.163. *Jumătatea produsului a două numere naturale consecutive, împărţită cu 3, nu poate da niciodată restul 2.*

Recreaţii Ştiinţifice, Anul I (1883)- nr. 4, p.119

Soluţie. Dacă unul dintre cele două numere consecutive se împarte exact la 3, restul împărţirii din enunţ este 0. În caz contrar, produsul celor două numere consecutive, care este par, va da restul 2 la împărţirea prin 3, iar jumătatea se va da la împărţirea prin 3 restul 1.

Clasa a V-a

V.95. *Două numere naturale se scriu în baza 10 folosind doar cifrele 1, 4, 6 şi 9. Poate fi unul dintre numere de 2008 ori mai mare decât celălalt?*

Cătălin Budeanu, Iaşi

Soluţie. Dacă numerele A şi B se scriu doar cu ajutorul cifrelor $1, 4, 6$ şi 9, atunci $U(2008A) \in \{2, 8\}$, prin urmare $2008A \neq B$. Răspunsul la întrebarea din enunţ este negativ.

V.96. *Determinaţi $k, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât* $(1 + 1 \cdot n) + (2 + 2 \cdot n) + \cdots + (k + k \cdot n) = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$.

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. Deoarece $(1+1\cdot n)+(2+2\cdot n)+\ldots+(k+k\cdot n)=(1+2+\ldots+k)+n(1+2+\ldots+k)=(1+2+\ldots+k)(n+1)$ şi $1+2+\ldots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$, ecuaţia dată este echivalentă cu $k(k+1)(n+1)=2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6$. Atunci k şi $k+1$ sunt divizori ai numărului $2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6$, iar $k(k+1)\le 2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6$. Găsim soluţiile $(k,n)\in\{(1,359);(2,119);(3,59);(4,35);(5,23);(8,9);(9,7);(15,2)\}$.

V.97. *Arătaţi că numărul $N=17^n+21^n+25^n$, $n\in\mathbb{N}$, nu poate fi pătrat perfect.*

Virginia Grigorescu, Craiova

Soluţie. Deoarece $(Ma+1)^n=Ma+1$, deducem că $17^n=M4+1$, $21^n=M4+1$, $25^n=M4+1$, deci $N=M4+3$, prin urmare N nu poate fi pătrat perfect.

V.98. *Fie $n\in\mathbb{N}^*$. Să se demonstreze că numărul $N=5050\ldots505$ ($2n+1$ cifre) se scrie ca sumă a $4n+2$ pătrate perfecte distincte.*

Veronica Plăeşu şi Dan Plăeşu, Iaşi

Soluţie. Observăm că $N=5\cdot10^{2n}+5\cdot10^{2n-2}+\ldots+5\cdot10^2+5$. Cum $5=2^2+1^2$, iar $5\cdot10^{2k}=500\cdot10^{2k-2}=(16^2+12^2+8^2+6^2)\cdot(10^{k-1})^2=(16\cdot10^{k-1})^2+(12\cdot10^{k-1})^2+(8\cdot10^{k-1})^2+(6\cdot10^{k-1})^2$, cerinţa problemei este demonstrată.

V.99. *Se consideră numărul $N=1+11+101+1001+\cdots+\underbrace{100\ldots01}_{n\ cifre}$.*

a) Pentru $n\in\mathbb{N}$, $n\ge5$, arătaţi că $5\mid N\Leftrightarrow 5\mid n$.

b) Precizaţi care dintre propoziţiile "$3\mid n\Rightarrow 3\mid N$" şi "$3\mid N\Rightarrow 3\mid n$" este adevărată pentru orice $n\ge3$.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. a) Cum $N=1+10+100+\ldots+\underbrace{100\ldots0}_{n\text{cifre}}+\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n-1\text{ termeni}}=\underbrace{11\ldots11}_{n\text{cifre}}+(n-1)=\underbrace{11\ldots10}_{n\text{cifre}}+n$. Cum $5|\underbrace{11\ldots10}_{n}$, rezultă cerinţa a).

b) Niciuna dintre implicaţii nu este adevărată. Într-adevăr, pentru $n=3$ avem că $N=1+11+101=113\not\vdots\,3$. Apoi, pentru $n=5$ avem că $N=1+11+101+1001+10001=11115\,\vdots\,3$, în timp ce $5\not\vdots\,3$.

V.100. *Determinaţi numerele naturale nenule a şi b pentru care există $n\in\mathbb{N}$ astfel încât $\dfrac{a}{b}=\dfrac{3n+2}{7n+5}$ şi $3a+2b<100$.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Dacă $d=(3n+2,7n+5)$, atunci $d|3n+2$ şi $d|7n+5$, de unde $d|3(7n+5)-7(3n+2)$, cu alte cuvinte $d=1$, deci fracţia $\dfrac{3n+2}{7n+5}$ este ireductibilă. Deoarece $\dfrac{a}{b}=\dfrac{3n+2}{7n+5}$, deducem că $a=k(3n+2)$ şi $b=k(7n+5)$, unde $k\in\mathbb{N}^*$, iar inegalitatea $3a+2b<100$ devine $k(23n+16)<100$. Pentru $n=0$ obţinem $k\in\{1,2,3,4,5,6\}$, $a=2k$ şi $b=5k$; pentru $n=1$ avem $k\in\{1,2\}$, $a=5k$ şi $b=12k$. Dacă $n=2$, atunci $k=1$, $a=8$, $b=19$, iar pentru $n=3$, $k=1$, $a=11$, $b=26$. Pentru $n\ge4$, problema nu admite soluţii.

V.101. *Considerăm fracţia* $\dfrac{an+b}{cn+d}$*, unde* $n, a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$*, astfel încât* b *şi* d *au parităţi diferite, iar* a *şi* c *au aceeaşi paritate. Arătaţi că, dacă* $ad - bc = 2^k$*,* $k \in \mathbb{N}^*$*, atunci fracţia este ireductibilă.*

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

Soluţie. Presupunem prin absurd că fracţia este reductibilă. Fie p un divizor comun al numerelor $an+b$ şi $cn+d$, $p \in \mathbb{N}^*, p \geq 2$; rezultă că $p|(a\cdot n+b)$ şi $p|(c\cdot n+d)$, de unde $p|ad - bc$, deci $p|2^k$ şi atunci p este par. Totodată, $p|n(a+c)+b+d$ şi cum $n(a+c)+b+d$ este număr impar, rezultă că p este impar, contradicţie.

Clasa a VI-a

VI.95. *Determinaţi numerele naturale nenule* a_1*,* a_2*,...,* a_{2008}*, ştiind că* $\dfrac{a_1a_2}{1\cdot 2} = \dfrac{a_2a_3}{2\cdot 3} = \cdots = \dfrac{a_{2007}a_{2088}}{2007\cdot 2008}$*, iar* $a_1 + a_{2008} = 2009$*.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Considerând rapoartele două câte două, obţinem că $\dfrac{a_1}{1} = \dfrac{a_3}{3} = \ldots = \dfrac{a_{2007}}{2007}$, iar $\dfrac{a_2}{2} = \dfrac{a_4}{4} = \ldots = \dfrac{a_{2008}}{2008}$. Astfel, relaţia $a_1 + a_{2008} = 2009$ devine $a_1 + 1004a_2 = 2009$ şi cum $a_1, a_2 \in \mathbb{N}^*$, atunci $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. Deducem că $a_i = i$, $\forall i = \overline{1, 2008}$.

VI.96. *Determinaţi* $p \in \mathbb{N}$ *pentru care numerele* p*,* $p+12$*,* $p+22$*,* $p+52$*,* $p+72$*,* $p+102$ *şi* $p+132$ *sunt prime.*

Damian Marinescu, Târgovişte

Soluţie. Pentru $p = 7$, numerele sunt $7, 19, 29, 59, 79, 109, 139$ şi sunt toate prime. Dacă $p \in \{2, 3, 5\}$, obţinem numerele compuse $2+12$, $3+12$, respectiv $5+22$. Dacă $p \geq 11$, considerând $p = M_7 + r$, cu $r \in \{0, 1, \ldots, 6\}$, găsim în fiecare caz câte un număr compus printre cele date. În concluzie, singura valoare convenabilă este $p = 7$.

VI.97. *a) Dacă* $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}^*$ *sunt astfel încât* $(a, b) = (c, d) = (e, f) = (b, d) = 1$*, iar* $t = \dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} + \dfrac{e}{f} \in \mathbb{N}$*, arătaţi că* $f = bd$*.*

b) Determinaţi $a, b \in \mathbb{N}$ *pentru care* $\dfrac{4}{2a+1} - \dfrac{1}{2^b} + \dfrac{7}{6} \in \mathbb{N}$*.*

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

Soluţie. a) Deoarece $t\cdot bd = ad - bc + bd\cdot\dfrac{e}{f} \in \mathbb{N}$, rezultă că $bd\cdot\dfrac{e}{f} \in \mathbb{N}$ şi, cum $(e, f) = 1$, deducem că $f|bd$. Pe de altă parte, din $t\cdot bf = af - bf\cdot\dfrac{c}{d} + ed \in \mathbb{N}$ şi $t\cdot df = df\cdot\dfrac{a}{b} - cf + de \in \mathbb{N}$, rezultă că $bf\cdot\dfrac{c}{d}$ şi $df\cdot\dfrac{a}{b}$ sunt numere naturale. Folosind faptul că $(b, a) = (d, b) = (d, c) = 1$, obţinem că $d|f$ şi $b|f$ şi, cum $(b, d) = 1$, atunci $bd|f$. Din $f|bd$ şi $bd|f$, rezultă că $f = bd$.

b) Suntem în condiţiile punctului precedent; deducem că $6 = (2a+1)\cdot 2^b$, de unde $a = b = 1$. Pentru aceste valori, vom avea $t = 2 \in \mathbb{N}$.

VI.98. *Determinaţi cel mai mic număr natural* n *cu proprietatea că numărul zerourilor în care se termină numărul* $(n+10)!$ *este cu* 2008 *mai mare decât numărul zerourilor în care se termină* $n!$ *(unde* $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n$*).*

Cătălin Budeanu, Iaşi

Soluţie. Ipoteza problemei revine la faptul că numărul $(n+1)(n+2)\dots(n+10)$ se termină în 2008 zerouri, ceea ce se întâmplă atunci când produsul $(n+1)(n+2)\dots(n+10)$ se divide cu 5^{2008} şi nu se divide cu 5^{2009}. Printre factorii produsului precedent, există exact doi care sunt divizibili cu 5, iar dintre aceştia unul nu mai este divizibil cu nicio altă putere a lui 5, deci celălalt se va divide cu 5^{2007}. Cum dorim n minim, atunci $n+10=5^{2007}$, prin urmare $n=5^{2007}-10$.

VI.99. *Un patrulater convex are două laturi opuse congruente şi diagonalele congruente. Arătaţi că patrulaterul este trapez isoscel sau dreptunghi.*

Ioan Săcăleanu, Hârlău

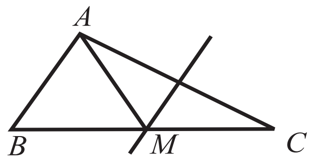
Soluţie. Presupunem că $(AB)\equiv(CD)$ şi $(AC)\equiv(BD)$. Din congruenţa triunghiurilor ABC şi DCB, rezultă că $\widehat{ABC}\equiv\widehat{DCB}$, iar din congruenţa triunghiurilor ABD şi DCA, rezultă că $\widehat{BAD}\equiv\widehat{CDA}$. Cum suma unghiurilor unui patrulater este $360°$, deducem că $m(\widehat{ABC})+m(\widehat{BAD})=180°$, deci $AD\|BC$.

Dacă $AB\|CD$, atunci $ABCD$ este un paralelogram cu diagonalele congruente, deci este un dreptunghi. Dacă $AB\nparallel CD$, atunc $ABCD$ este un trapez cu diagonalele congruente, adică un trapez isoscel.

VI.100. *Fie $\triangle ABC$ cu $m(\widehat{A})\geq 90°$. Să se arate că $m(\widehat{B})=2m(\widehat{C})$ dacă şi numai dacă există $M\in[BC]$ astfel încât $AB=AM=MC$.*

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. Presupunem că $m(\widehat{B})=2m(\widehat{C})$ şi fie M intersecţia mediatoarei laturii $[AC]$ cu BC; cum $m(\widehat{A})\geq 90°$, vom avea că $M\in[BC]$. Evident atunci că $\triangle MAC$ este isoscel cu $MA=MC$ şi cum $\widehat{AMB}$ este unghi exterior, deducem că $m(\widehat{AMB})=2m(\widehat{C})=m(\widehat{B})$. Astfel, $\triangle ABM$ va fi isoscel cu $AB=AM$, ceea ce încheie justficarea afirmaţiei directe.

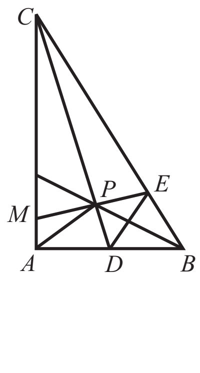


Reciproc, dacă există $M\in[BC]$ cu $AB=AM=MC$, din triunghiurile isoscele ABM şi MAC obţinem că $m(\widehat{B})=m(\widehat{AMB})=2m(\widehat{C})$.

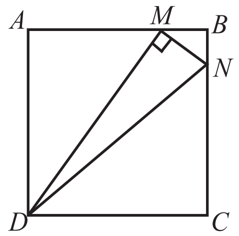
VI.101. *Fie ABC un triunghi dreptunghic cu $m(\widehat{A})=90°$ şi CD bisectoarea unghiului $\widehat{C}$, $D\in(AB)$. Perpendiculara din D pe bisectoarea unghiului $\widehat{B}$ intersectează ipotenuza BC în E. Dacă P este punctul de intersecţie a bisectoarelor unghiurilor triunghiului ABC, iar M este punctul de intersecţie dintre EP şi AC, arătaţi că $\widehat{MPA}\equiv\widehat{PBE}$.*

Nela Ciceu, Bacău şi Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Din enunţ rezultă că triunghiul BDE este isoscel şi că BP este mediatoarea segmentului DE. Totodată, $m(\widehat{CDE})=m(\widehat{CDB})-m(\widehat{EDB})=180°-\frac{1}{2}m(\widehat{C})-m(\widehat{B})-\frac{1}{2}[180°-m(\widehat{B})]=45°$. Prin urmare, triunghiul DPE este dreptunghic isoscel. Astfel, $CP\perp ME$ şi cum CP este bisectoarea unghiului $\widehat{C}$, rezultă că triunghiul CME este isoscel. Deducem că $m(\widehat{MPA})=180°-m(\widehat{PMA})-45°=135°-180°+m(\widehat{CME})=-45°+\frac{1}{2}[180°-m(\widehat{C})]=\frac{1}{2}[90°-m(\widehat{C})]=\frac{1}{2}m(\widehat{B})=m(\widehat{PBE})$.



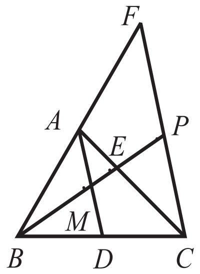
Clasa a VII-a



VII.95. *Fie $ABCD$ pătrat, M un punct oarecare pe (AB), iar $N \in (BC)$ este astfel încât $MN \perp MD$. Arătaţi că $AM \cdot AB + CN \cdot CB = DM^2$.*

Ovidiu Pop, Satu Mare
Gh. Szöllösy, Sighetul Marmaţiei

Soluţie. Fie a latura pătratului $x = AM$ şi $y = CN$; atunci $DM^2+MN^2 = DN^2 \Leftrightarrow a^2+x^2+(a-x)^2+(a-y)^2 = a^2+y^2 \Leftrightarrow$ $2a^2 - 2ax + 2x^2 - 2ay = 0 \Leftrightarrow a^2 + x^2 = ax + ay \Leftrightarrow DM^2 = AM \cdot AB + CN \cdot CB$.



VII.96. *Fie $[AD]$ mediană în $\triangle ABC$, M mijlocul lui $[AD]$, $\{E\} = BM \cap AC$, iar punctul F pe dreapta AB este astfel încât $CF \parallel AD$. Demonstraţi că punctele D, E şi F sunt coliniare.*

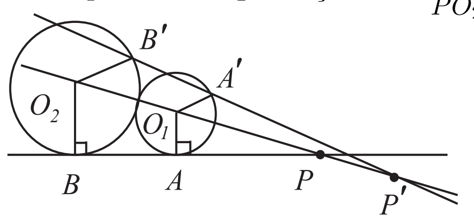
Mirela Marin, Iaşi

Soluţie. Cum $ADCF$ este trapez, M este mijlocul bazei mici, iar B este punctul de intersecţie a laturilor neparalelele, înseamnă că $\{P\} = BM \cap CF$ este mijlocul lui $[CF]$. Cu reciproca teoremei liniei mijlocii se arată că A este mijlocul lui $[BF]$, prin urmare CA şi BP sunt mediane în $\triangle BCF$, iar E va fi centrul de greutate al acestui triunghi. Coliniaritatea dorită rezultă observând că a treia mediană a triunghiului este FD.

VII.97. *Fie $\mathcal{C}_1(O_1, r_1)$ şi $\mathcal{C}_2(O_2, r_2)$, $r_1 < r_2$, două cercuri tangente exterior. Considerăm punctele $A' \in \mathcal{C}_1$, $B' \in \mathcal{C}_2$, de aceeaşi parte a dreptei O_1O_2, astfel încât $A'O_1 \parallel B'O_2$. Dacă AB este tangentă comună exterioară a cercurilor ($A \in \mathcal{C}_1$, $B \in \mathcal{C}_2$), demonstraţi că dreptele AB, $A'B'$ şi O_1O_2 sunt concurente.*

Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă, Blaj

Soluţie. Notăm $\{P\} = AB \cap O_1O_2$, $\{P'\} = A'B' \cap O_1O_2$. Din asemănările $\triangle PO_1A \sim \triangle PO_2B$ şi $\triangle P'O_1A' \sim \triangle P'O_2B'$ obţinem că $\dfrac{PO_1}{PO_2} = \dfrac{P'O_1}{P'O_2} = \dfrac{r_1}{r_2} < 1$.



Astfel, punctele P şi P' se află de aceeaşi parte cu O_1 pe dreapta O_1O_2 şi împart segmentul $[O_1O_2]$ în acelaşi raport, prin urmare $P = P'$ şi de aici rezultă concurenţa dorită.

VII.98. *Să se determine numerele naturale nenule a şi b, ştiind că sunt direct proporţionale cu $b-6$ şi a şi invers proporţionale cu $a+12$ şi b.*

Constantin Apostol, Rm. Sărat

Soluţie. Din datele problemei obţinem că $\dfrac{a}{b-6} = \dfrac{b}{a}$ şi $a(a+12) = b^2$. Din prima ecuaţie rezultă că $a^2 - b^2 = -6b$, iar din a doua $a^2 - b^2 = -12a$, deci $-6b = -12a$.

Atunci $b = 2a$ şi, folosind prima ecuaţie, găsim că $a = 4$ şi apoi $b = 8$.

VII.99. *Fie* $a, b \in \mathbb{Z}$ *şi numerele* $A = 119a^5 + 5b^3 - 4a$ *şi* $B = 119b^5 + 5a^3 - 4b$. *Să se arate că* A *se divide cu* 120 *dacă şi numai dacă* B *se divide cu* 120.

Dan Nedeianu, Drobeta-Tr. Severin

Soluţie. Avem că $A + B = 120(a^5 + b^5) - (a^5 - 5a^3 + 4a) - (b^5 - 5b^3 + 4b)$. Cum $a^5 - 5a^2 + 4a = (a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)$ se divide la 120, rezultă că $A + B \vdots 120$ şi concluzia de impune.

VII.100. *Arătaţi că* $2a^2 + 15b^2 + 7c^2 \geq 10ab - 6ac + 20bc, \ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

Alexandru Negrescu, student, Iaşi

Soluţie. Inegalitatea se scrie: $4a^2 - 4a(5b - 3c) + 30b^2 + 14c^2 - 40bc \geq 0 \Leftrightarrow (2a - 5b + 3c)^2 + 30b^2 + 14c^2 - 40bc - (5b - 3c)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (2a - 5b + 3c)^2 + 5(b - c)^2 \geq 0$, evident adevărat. Egalitate avem pentru $a = b = c$.

VII.101. *Pentru* $n \in \mathbb{N}^*$, *notăm cu* $d(n)$ *numărul divizorilor primi ai lui* n.

a) Determinaţi cardinalul mulţimii $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n \leq 208, d(n) = 3\}$.

b) Aflaţi cel mai mic şi cel mai mare element al mulţimii

$$B = \{k \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, n \leq 2008, \text{ a.î. } d(n) = k\}.$$

Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. a) Observăm că $n \in A$ dacă şi numai dacă $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3}$, cu $p_1 < p_2 < p_3$ numere prime, iar $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{N}^*$. Cum $5 \cdot 7 \cdot 11 = 385 > 208$, înseamnă că $p_1 \in \{2, 3\}$, prin urmare

$$(p_1, p_2, p_3) \in \{(2,3,5); (2,3,7); (2,3,11); (2,3,13); (2,3,17); \underline{(2,3,19)}; \underline{(2,3,23)}; \underline{(2,3,29)}; \underline{(2,3,31)}; (2,5,7); \underline{(2,5,11)}; \underline{(2,5,13)}; \underline{(2,5,17)}; \underline{(2,5,19)}; \underline{(2,7,11)}; \underline{(2,7,13)}; \underline{(3,5,7)}; \underline{(3,5,11)}; \underline{(3,5,13)}\}.$$

Pentru tripletele subliniate, în produsul $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3}$ vom avea obligatoriu $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$; obţinem astfel 13 elemente ale lui A.

Dacă $(p_1, p_2, p_3) = (2, 3, 5)$, în $n = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}$ putem avea $\alpha_3 = 1$, $(\alpha_1, \alpha_2) \in \{(1,1); (2,1); (3,1); (1,2); (2,2)\}$ sau $\alpha_3 = 2, \alpha_1 = \alpha_2 = 1$; găsim încă 6 elemente din A. Dacă $(p_1, p_2, p_3) = (2, 3, 7)$, în $n = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 7^{\alpha_3}$ este obligatoriu ca $\alpha_3 = 1$, iar $(\alpha_1, \alpha_2) \in \{(1,1); (2,1); (3,1); (1,2)\}$; obţinem 4 noi elemente ale lui A.

Dacă $(p_1, p_2, p_3) = (2, 3, 11)$, atunci $\alpha_3 = 1$, $(\alpha_1, \alpha_2) \in \{(1,1); (2,1); (1,2)\}$, deci încă 3 elemente. Dacă $(p_1, p_2, p_3) \in \{(2,3,13); (2,3,17); (2,5,7)\}$, vom avea în fiecare caz $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \{(1,1,1); (2,1,1)\}$, adică încă $3 \times 2 = 6$ elemente.

În total, $|A| = 13 + 6 + 4 + 3 + 6 = 32$.

b) Evident că $\min B = 0$, atins pentru $n = 1$.

Arătăm că $\max B = 4$: dacă ar exista $n \leq 2008$ cu $d(n) \geq 5$, atunci $n \geq p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 \geq 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310 > 2008$, absurd, iar pentru $n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ avem $d(n) = 4$.

Clasa a VIII-a

VIII.95. *Pentru* $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, *notăm* $\alpha = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a}$, $\beta = \dfrac{a}{c} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{b}{a}$. *Calculaţi numărul* $x = \dfrac{a^3}{b^3} + \dfrac{b^3}{c^3} + \dfrac{c^3}{a^3}$ *în funcţie* α *şi* β.

Elena Nicu, Malu-Mare (Dolj)

Soluţie. Fie $x = \dfrac{a}{b}, y = \dfrac{b}{c}, z = \dfrac{c}{a}$; atunci $xyz = 1, x + y + z = \alpha$, iar $\dfrac{xy + yz + zx}{xyz} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \beta$, de unde $xy + xz + yz = \beta$. Folosind identitatea

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)^3 - 3(x + y + z)(xy + xz + yz),$$

rezultă că $x^3 + y^3 + z^3 = \alpha^3 - 3\alpha\beta + 3$.

VIII.96. *Rezolvaţi în numere naturale ecuaţia* $x^2 + y^2 + xy = x^2y^2$.

Mihail Bencze, Braşov

Soluţie. Putem presupune că $x \leq y$. Dacă $x = 0$, obţinem că $y = 0$. Dacă $x = 1$, deducem că $y = -1 \notin \mathbb{N}$. Pentru $x = 2$, găsim că $3y^2 - 2y - 4 = 0$, ecuaţie care nu are soluţii naturale. În cazul în care $x \geq 3$, atunci $y \geq 3$ şi vom avea că $x^2 - 1 > x + 1$, $y^2 - 1 > y + 1$, inegalităţi care, înmulţite, conduc la $(x^2-1)(y^2-1) > (x+1)(y+1)$. Însă $(x+1)(y+1) > xy+1$, prin urmare $(x^2-1)(y^2-1) > xy+1$, adică $x^2+y^2+xy < x^2y^2$. În concluzie, singura soluţie a ecuaţiei date este $(x, y) = (0, 0)$.

Soluţia 2. Vom rezolva ecuaţia în mulţimea numerelor întregi. Fie (x, y) o soluţie. Scriind ecuaţia sub forma $(x + y)^2 = xy(xy + 1)$, deducem că $xy(xy + 1)$ este pătrat perfect. Cum pentru $xy \geq 1$, $(xy)^2 < xy(xy + 1) < (xy + 1)^2$, iar pentru $xy \leq -2$ $(xy + 1)^2 < xy(xy + 1) < (xy)^2$, nu avem soluţii în aceste cazuri. Rezultă că $xy = 0$ sau $xy = -1$. Obţinem soluţiile: $(0, 0)$; $(1, -1)$ şi $(-1, 1)$.

Soluţia 3 (**Gheorghe Iurea**). Fie (x, y) o soluţie cu $x, y \in \mathbb{Z}$. Ecuaţia este echivalentă cu $(x+y)^2 = (xy)^2 + xy \Leftrightarrow 4(x+y)^2 = (2xy+1)^2 - 1 \Leftrightarrow [2xy + 1 - 2(x + y)][2xy + 1 + 2(x + y)] = 1$, deci $2xy + 1 - 2(x + y) = 2xy + 1 + 2(x + y) \in \{-1, 1\}$. Obţinem soluţiile $(0, 0); (1, -1)$ şi $(-1, 1)$.

VIII.97. *Fie d_1, d_2, d_3, d lungimile diagonalelor feţelor, respectiv diagonalei unui paralelipiped dreptunghic. Dacă $d_1^2 = \dfrac{2d_2^2d_3^2}{d_2^2 + d_3^2}$, să se arate că paralelipipedul are o muchie de lungime cel puţin egală cu $\dfrac{d\sqrt{3}}{3}$.*

Gheorghe Molea, Curtea de Argeş

Soluţie. Fie $d_1^2 = a^2 + b^2$, $d_2^2 = b^2 + c^2$, $d_3^2 = a^2 + c^2$, $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, unde a, b, c sunt lungimile muchiilor paralelipipedului. Relaţia din ipoteză se scrie succesiv:

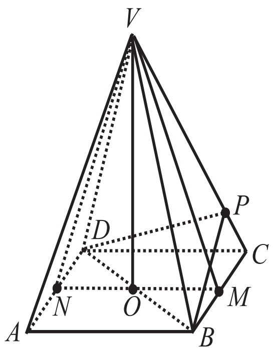
$$d_1^2 = \frac{2d_2^2d_3^2}{d_2^2 + d_3^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \frac{2(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)}{b^2 + c^2 + c^2 + a^2} \Leftrightarrow a^4 + b^4 = 2c^4.$$

Însă $2(a^4 + b^4) \geq (a^2 + b^2)^2$, deci $4c^4 \geq (a^2 + b^2)^2 \Leftrightarrow 2c^2 \geq a^2 + b^2 \Leftrightarrow 3c^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow 3c^2 \geq d^2$, deci $c \geq \dfrac{d\sqrt{3}}{3}$. Avem egalitate pentru $a = b = c$, deci într-un cub.

VIII.98. *Fie $VABCD$ piramidă patrulateră regulată. Notăm $u = m(\widehat{(VBC), (ABC)})$, $v = m(\widehat{(VBC), (VCD)})$ şi $t = m(\widehat{(VBC), (VAD)})$. Arătaţi că $u + v + t > 180°$.*

Claudiu Ştefan Popa, Iaşi

Soluţie. Fie M şi N mijloacele laturilor $[BC]$, respectiv $[AD]$, iar P proiecţia



lui B pe VC; se arată că $u = m(\widehat{VMN})$, $v = m(\widehat{BPD})$, iar $t = m(\widehat{MVN})$. În $\triangle VMN$ avem că $u + u + t = 180°$ şi atunci concluzia problemei rezultă dacă am arăta că $v > u$. Evident că $u < 90°$, prin urmare dacă $v \geq 90°$, demonstraţia este încheiată. Presupunem că $v < 90°$; atunci $v > u \Leftrightarrow \sin v > \sin u \Leftrightarrow \dfrac{BD \cdot PO}{BP^2} > \dfrac{VO}{VM}$. Cum $PO = \dfrac{VO \cdot BD}{2VC}$, iar $BP = \dfrac{VM \cdot BC}{VC}$, ultima inegalitate revine la $\dfrac{BD^2 \cdot VC}{2BC^2 \cdot VM} > 1$. Însă $BD^2 = 2BC^2$, iar $VC > VM$ şi astfel soluţia problemei este completă.

VIII.99. *Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, considerăm $A = \{1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2\}$. Determinaţi n, ştiind că există o funcţie $f : A \to A$ astfel încât $f(x) - f(y) = \sqrt{x} - \sqrt{y}$, $\forall x, y \in A$.*

Cristian Lazăr, Iaşi

Soluţie. Avem că $f(x) - \sqrt{x} = f(y) - \sqrt{y}$, $\forall x, y \in A$, deci $\exists k \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) - \sqrt{x} = k$, $\forall x \in A$, de unde $f(x) = \sqrt{x} + k$, $\forall x \in A$. Deducem că, pentru $x < y$ din A, avem că $f(x) < f(y)$ şi atunci, cum A este finită, rezultă că $f(1^2) = 1^2$, $f(2^2) = 2^2, \ldots, f(n^2) = n^2$, de unde $1 + k = 1$ şi $n + k = n^2$. Deci, $k = 0$ şi $n = 1$.

VIII.100. *Rezolvaţi în în $\mathbb{N}^2$ ecuaţia $x^2 - 8^n + 1287 = 0$.*

Mihai Crăciun, Paşcani

Soluţie. Dacă n este impar, atunci $8^n = (9-1)^n = M_9 - 1$. Cum x^2 dă la împărţirea prin 9 unul dintre resturile $0, 1, 4$ sau 7, iar $1287 \,\vdots\, 9$, cantitatea din membrul stâng al ecuaţiei dă la împărţirea prin 9 unul dintre resturile $1, 2, 5$ sau 8 şi se ajunge la o contradicţie.

Dacă $n = 2k$, ecuaţia se scrie: $(8^k - x)(8^k + x) = 3^2 \cdot 11 \cdot 13$. Analizând pe rând cazurile care se obţin, găsim soluţie doar când $8^k - x = 11$, $8^k + x = 3^2 \cdot 13$, când vom avea $k = 2, x = 53$. Deci, singura soluţie a ecuaţiei date este $(n, x) = (4, 53)$.

VIII.101. *Se calculează suma cifrelor pentru fiecare dintre numerele de la 1 la n, $n > 10$. Pentru fiecare sumă dintre cele n se calculează din nou suma cifrelor, repetându-se această operaţie până când obţinem n numere formate din câte o singură cifră. Să se afle n, ştiind că în mulţimea astfel obţinută cifrele 1, 2, 3 şi 4 se repetă de câte 101 ori fiecare, iar cifrele 5, 6, 7, 8 şi 9 de câte 100 ori fiecare.*

Mihai Haivas, Iaşi

Soluţie. Restul împărţirii unui număr prin 9 este egal cu restul împărţirii sumei cifrelor sale prin 9. Atunci, cifra 1 se obţine din acele numere care dau restul 1 la împărţirea prin 9, adică din numerele $1, 10, 19 \ldots$. Pentru a obţine 1 de 101 ori, trebuie să avem $\left[\dfrac{n}{9}\right] + 1 = 101$, deci $n \in \{900, 901, \ldots, 904\}$. Se verifică faptul că doar $n = 904$ satisface şi celelalte condiţii din ipoteză.

Clasa a IX-a

IX.91. *Fie $a, b, c, p \in \mathbb{R}$, $p > 0$. Dacă $\left|ax^2 + bx + c\right| \leq p$, $\forall x \in [-1, 1]$, atunci $\left|cx^2 + bx + a\right| \leq 2p$, $\forall x \in [-1, 1]$.*

Dorin Mărghidanu, Corabia

Soluţie. Fie $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = cx^2 + bx + a$, $x \in [-1, 1]$. Din ipoteză se obţine că $|a + b + c| = |f(1)| \leq p$, $|a - b + c| = |f(-1)| \leq p$, iar $|c| = |f(0)| \leq p$. Folosind inegalitatea modulului, avem:

$$\begin{aligned}
|g(x)| &= |cx^2 + bx + a| = |c(x^2 - 1) + (a + b + c) \cdot \frac{x+1}{2} + (a - b + c) \cdot \frac{1-x}{2}| \leq \\
&\leq |c| \cdot |x^2 - 1| + |a + b + c| \cdot \frac{|x+1|}{2} + |a - b + c| \cdot \frac{|1-x|}{2} \leq \\
&\leq p \cdot \left(|x^2 - 1| + \frac{|x+1|}{2} + \frac{|1-x|}{2}\right) = p\left(1 - x^2 + \frac{x+1}{2} + \frac{1-x}{2}\right) = \\
&= p(2 - x^2) \leq 2p, \ \ \forall x \in [-1, 1].
\end{aligned}$$

IX.92. *Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, iar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $n + \alpha + \beta \neq 0$. Arătaţi că*

$$\frac{(1+\alpha)\cdots(n+\alpha)}{n+\alpha+\beta} - (1+\alpha)\cdots(n-1+\alpha) + \sum_{i=1}^{n-2}(-1)^{i+1}(1+\alpha)\cdots(n-i-1+\alpha)\times$$

$$\times\beta\,(\beta+1)\cdots(\beta+i-1) + (-1)^n\,\beta\cdots(\beta+n-2) = (-1)^n\,\frac{\beta\,(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n+\alpha+\beta}.$$

Gheorghe Costovici, Iaşi

Soluţie. Notăm cu S_n membrul stâng al egalităţii. Pentru $n = 3$, avem că

$$\begin{aligned}
S_3 &= \frac{(1+\alpha)(2+\alpha)(3+\alpha)}{3+\alpha+\beta} - (1+\alpha)(2+\alpha) + (1+\alpha)\cdot\beta - \\
&\quad -\beta(\beta+1) = \ldots = -\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{3+\alpha+\beta},
\end{aligned}$$

calculele fiind de rutină. Fie $n \geq 4$, iar $\sigma_{n-2} = S_n - (-1)^n\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-2)$. Ar fi suficient să dovedim că

$$(*)\ \ \sigma_k = (-1)^{k-1}(1+\alpha)\ldots(n-k-1+\alpha)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+k)\cdot\frac{1}{n+\alpha+\beta},\ \ \forall k \in \overline{1, n-2}$$

odată demonstrată $(*)$, vom obţine că

$$\begin{aligned}
S_n &= \sigma_{n-2} + (-1)^n\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-2) = \\
&= (-1)^n\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-2)\left(1 - \frac{1+\alpha}{n+\alpha+\beta}\right) = \\
&= (-1)^n \cdot \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n+\alpha+\beta},
\end{aligned}$$

adică tocmai ceea ce trebuia demonstrat.

Justficăm $(*)$ prin inducţie după k:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \frac{(1+\alpha)\ldots(n+\alpha)}{n+\alpha+\beta} - (1+\alpha)\ldots(n-1+\alpha) + (1+\alpha)\ldots(n-2+\alpha)\beta = \\
&= (1+\alpha)\ldots(n-1+\alpha)\cdot\frac{-\beta}{n+\alpha+\beta} + (1+\alpha)\ldots(n-2+\beta)\cdot\beta = \\
&= \frac{(1+\alpha)\ldots(n-2+\alpha)\beta(\beta+1)}{n+\alpha+\beta},
\end{aligned}$$

deci $(*)$ este adevărată pentru $k=1$. Presupunem $(*)$ adevărată pentru $k \in \{1,2,\ldots,n-3\}$; atunci

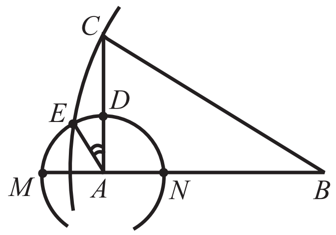
$$\begin{aligned} \sigma_{k+1} &= \sigma_k + (-1)^k(1+\alpha)\ldots(n-k-2+\alpha)\beta(\beta+1)\cdot\ldots\cdot(\beta+k) = \\ &= (-1)^k(1+\alpha)\ldots(n-k-2+\alpha)\beta\cdot\ldots\cdot(\beta+k)\left(1-\frac{n-k-1+\alpha}{n+\alpha+\beta}\right) = \\ &= (-1)^k(1+\alpha)\ldots(n-k-2+\alpha)\beta\cdot\ldots\cdot(\beta+k+1)\cdot\frac{1}{n+\alpha+\beta}, \end{aligned}$$

deci $(*)$ este adevărată şi pentru $k+1$ şi astfel soluţia problemei este completă.

IX.93. *Fie $\triangle ABC$ dreptunghic cu $m(\widehat{A}) = 90°$ şi $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{3}{2}$, iar D mijlocul lui $[AC]$. Notăm cu E punctul de intersecţie a cercurilor $\mathcal{C}_1(A, AD)$ şi $\mathcal{C}_2(B, BC)$, aflat de aceeaşi parte a dreptei AB ca şi punctul C. Determinaţi măsura unghiului $\widehat{CAE}$.*

Cătălin Ţigăeru, Suceava

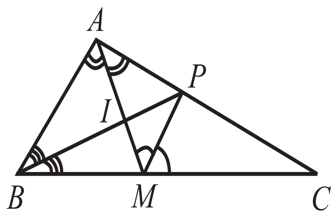
Soluţie. Fie $\{M,N\} = AB \cap \mathcal{C}_1$, cu $N \in (AB)$, iar $a = AD$; atunci $AC = 2a$, $AB = 3a$, $BC = a\sqrt{13}$, $BD = a\sqrt{10}$, iar $BM = 4a$. Cum $BD < BC < BM$, înseamnă că cercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt secante, iar $90° < m(\widehat{BAE}) < 180°$. Aplicăm teorema cosinusului în $\triangle ABE : BE^2 = AB^2 + AE^2 - 2AB \cdot AE \cdot \cos(\widehat{BAE}) \Leftrightarrow 13a^2 = 9a^2 + a^2 - 2\cdot 3a\cdot a\cdot \cos(\widehat{BAE})$, de unde obţinem $\cos(\widehat{BAE}) = -\dfrac{1}{2}$, adică $m(\widehat{BAE}) = 120°$. Deducem că $m(\widehat{CAE}) = 120° - 90° = 30°$.



IX.94. *În $\triangle ABC$, I este centrul cercului înscris, iar $\{M\} = AI \cap BC$. Demonstraţi că bisectoarea unghiului $\widehat{AMC}$, BI şi AC sunt trei drepte concurente dacă şi numai dacă $m(\widehat{A}) = 120°$.*

Vlad Emanuel, student şi Andrei Cozma, elev, Bucureşti

Soluţie. Notăm cu a,b,c lungimile laturilor şi fie $\{P\} = BI \cap AC$; avem că $AM = \dfrac{2bc}{b+c}\cdot\cos\dfrac{A}{2}$, $MC = \dfrac{ab}{b+c}$, iar $\dfrac{AP}{PC} = \dfrac{c}{a}$. Atunci: BI, AC şi bisectoarea unghiului $\widehat{AMC}$ sunt concurente $\Leftrightarrow MP$ este bisectoarea lui $\widehat{AMC} \Leftrightarrow \dfrac{AP}{PC} = \dfrac{AM}{MC} \Leftrightarrow \dfrac{c}{a} = \dfrac{2c}{a}\cos\dfrac{A}{2} \Leftrightarrow \cos\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m(\widehat{A}) = 120°$.



IX.95. *Dacă $x_i \in [0,a]$, $i = \overline{1,n}$ şi $x_{n+1} = x_1$, demonstraţi că*

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i+1}(a - x_i) < \frac{na^2}{4\sin^2\dfrac{\pi}{n}}.$$

Gigel Buth, Satu Mare

Soluţie. Considerăm poligonul regulat de latură a, $A_1A_2\ldots A_n$, înscris în cercul $\mathcal{C}(O,r)$. Luăm pe fiecare latură $[A_iA_{i+1}]$ câte un punct P_i astfel încât $A_iP_i = x_i$, $i = \overline{1,n}$ (cu convenţia $A_{n+1} = A_1$). Dacă S_i este aria triunghiului $P_iA_{i+1}P_{i+1}$, iar S este

aria poligonului, atunci $\sum_{i=1}^{n} S_i < S$, iar $S_i = \frac{x_{i+1}(a-x_i)}{2} \cdot \sin\frac{2\pi}{n}$, $S = \frac{na^2}{4\sin\frac{\pi}{n}} \cdot \cos\frac{\pi}{n}$.
Obţinem că

$$2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_{i+1}(a-x_i) < \frac{na^2}{4\sin\frac{\pi}{n}} \cdot \cos\frac{\pi}{n},$$

de unde rezultă concluzia problemei.

Clasa a X-a

X.91. *Arătaţi că*

$$\left[\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{7}\right)^2 + \left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{\pi^2}{16}\right]^2 = 2\left[\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{7}\right)^4 + \left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)^4 + \frac{\pi^4}{256}\right].$$

D. M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

Soluţie. Se demonstrează relativ simplu identitatea

$$[x^2 + y^2 + (x+y)^2]^2 = 2[x^4 + y^4 + (x+y)^4],$$

cunoscută sub numele de *identitatea lui G. Candido.* Concluzia problemei rezultă observând că, dacă $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{7}$ şi $y = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$, atunci $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = 1$, deci $x + y = \frac{\pi}{4}$ (deoarece $x + y < \frac{\pi}{2}$).

X.92. *Fie $a, b \in \mathbb{C}$. Demonstraţi că ecuaţia $z^2 - az + b = 0$ are ambele soluţii de modul 1 dacă şi numai dacă $|b| = 1$ şi $|a|^2 + \left|a^2 - 4b\right| = 4$. (În legătură cu X.77 din RecMat - 1/2007.)*

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Putem proceda ca în soluţia problemei X.77, care poate fi consultată în RecMat 1/2008, pp. 65. În cele ce urmează, vom prezenta o soluţie care foloseşte scrierea trigonometrică a numerelor complexe. Presupunem întâi că ecuaţia are soluţiile z_1, z_2 de modul 1, deci $z_k = \cos t_k + i\sin t_k$, $t_k \in [0, 2\pi)$, $k = 1, 2$. Atunci $a = z_1 + z_2 = 2\cos\frac{t_1 - t_2}{2}\left(\cos\frac{t_1+t_2}{2} + i\sin\frac{t_1+t_2}{2}\right)$, $b = z_1 z_2 = \cos(t_1 + t_2) + i\sin(t_1 + t_2)$, iar $a^2 - 4b = -4\sin^2\frac{t_1 - t_2}{2}(\cos(t_1 + t_2) + i\sin(t_1 + t_2))$. Evident că $|b| = 1$, iar $|a|^2 + |a^2 - 4b| = 4\left(\cos^2\frac{t_1 - t_2}{2} + \sin^2\frac{t_1 - t_2}{2}\right) = 4$.

Reciproc, fie $|b| = 1$ şi $|a|^2 + |a^2 - 4b| = 4$. Atunci $|a^2| + |4b - a^2| = 4 = 4|b| = |a^2 + 4b - a^2|$, prin urmare există $t \geq 0$ astfel încât $4b - a^2 = ta^2$ sau avem $a^2 = 0$. În al doilea caz, ecuaţia devine $z^2 + b = 0$ şi, cum $|b| = 1$, ambele soluţii vor fi de modul 1. În primul caz, discriminantul este $\Delta = a^2 - 4b = -ta^2$, de unde $z_{1,2} = a \cdot \frac{1 \pm i\sqrt{t}}{2}$, cu modulul $|z_1| = |z_2| = |a| \cdot \sqrt{\frac{1+t}{4}} = \sqrt{\left|\frac{(1+t)a^2}{4}\right|} = \sqrt{|b|} = 1$, ceea ce trebuia demonstrat.

X.93. *Dacă* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0,1)$ *sau* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (1, \infty)$, *iar* $f, g : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ *sunt funcţii injective, să se arate că*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\log_{a_k} a_{f(k)}}{a_{g(k)}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \geq n^2.$$

Dan Popescu, Suceava

Soluţie. Se înmulţesc membru cu membru următoarele două inegalităţi, care rezultă din inegalitatea mediilor: $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \geq n \cdot \sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n} a_k}$ şi $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\log_{a_k} a_{f(k)}}{a_{g_k}} \geq n \cdot \sqrt[n]{\frac{\prod\limits_{k=1}^{n} \log_{a_k} a_{f(k)}}{\prod\limits_{l=1}^{n} a_{g(k)}}} = \frac{n}{\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n} a_{g(k)}}} = \frac{n}{\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n} a_k}}$ (am ţinut seama de faptul că funcţiile f şi g sunt chiar bijective).

X.94. *a) Să se arate că*

$\sqrt{x^{2n} + y^{2n} + x^n y^n} + \sqrt{x^{2n} + z^{2n} + x^n z^n} \geq \sqrt{y^{2n} + z^{2n} + y^n z^n}, \forall x, y, z \in \mathbb{R}^*, \ \forall n \in \mathbb{N}.$

b) Demonstraţi că, dacă n *este par, inegalitatea este strictă, iar dacă* n *este impar, atunci există* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *pentru care se atinge egalitatea.*

Bogdan Victor Grigoriu, Fălticeni

Soluţie. a) Considerând în plan punctele $A(x^n, 0)$, $B\left(-\frac{y^n}{2}, \frac{y^n\sqrt{3}}{2}\right)$ şi $C\left(-\frac{z^n}{2}, -\frac{z^n\sqrt{3}}{2}\right)$, observăm că $AB = \sqrt{x^{2n} + y^{2n} + x^n y^n}$, $AC = \sqrt{x^{2n} + z^{2n} + x^n z^n}$, iar $BC = \sqrt{y^{2n} + z^{2n} + y^n z^n}$. Concluzia rezultă aplicând inegalitatea triunghiului.

b) Dacă n este par, atunci numerele x^n, y^n şi z^n sunt strict pozitive, prin urmare B se va situa în cadranul II, iar C în cadranul III, în timp ce A se va afla pe semiaxa pozitivă Ox. În acest caz, punctele A, B şi C nu pot fi coliniare, prin urmare inegalitatea de la a) este strictă. Dacă n este impar, egalitatea se atinge, de exemplu, pentru $x = 1, y = z = -\sqrt[n]{2}$.

X.95. *Considerăm funcţia* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = \sin x + \sin y + \sin z + \sin(x - y) + \sin(y - z) + \sin(z - x).$$

Determinaţi maximul şi minimul funcţiei f.

Cătălin Calistru, Iaşi

Soluţie. Cu substituţiile $x = x_1 + x_2$, $y = x_2 + x_3$, $z = x_3 + x_1$, avem:

$$f(x,y,z) = \sin(x_1 + x_2) + \sin(x_2 + x_3) + \sin(x_3 + x_1) + \sin(x_1 - x_3) +$$
$$+ \sin(x_2 - x_1) + \sin(x_3 - x_2) = 2\sin x_1 \cos x_3 + 2\sin x_2 \cos x_1 + 2\sin x_3 \cos x_2.$$

Prin urmare, $3 + f(x,y,z) = (\sin x_1 + \cos x_3)^2 + (\sin x_2 + \cos x_1)^2 + (\sin x_2 + \cos x_2)^2 \geq 0$ şi $3 - f(x,y,z) = (\sin x_1 - \cos x_3)^2 + (\sin x_2 - \cos x_1)^2 + (\sin x_3 - \cos x_2)^2 \geq 0$, deci

$-3 \leq f(x,y,z) \leq 3$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Cum $f(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) = 3$, iar $f(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}) = -3$, rezultă că $\max f = 3$ şi $\min f = -3$.

Clasa a XI-a

XI.91. *Fie matricele $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $AC + BD = I_n$, iar $AD = BC$. Demonstraţi că $CA + DB = I_n$ şi $DA = CB$.*

I. V. Maftei, Bucureşti şi Mihai Haivas, Iaşi

Soluţie. Din datele problemei obţinem că $(A - iB)(C + iD) = I_n$; atunci matricele $A - iB$ şi $C + iD$ sunt una inversa celeilalte, prin urmare $(C + iD)(A - iB) = I_n$. Deducem că $(CA + DB) + i(DA - CB) = I_n$ şi, cum $CA + DB$, $DA - CB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, atunci $CA + DB = I_n$ şi $DA - CB = O_n$.

XI.92. *Determinaţi matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.*

Adrian Reisner, Paris

Soluţie. Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; atunci $X^2 = (a + d)X - (ad - bc)I_2$ şi ecuaţia devine $X(a + d + 1) - (ad - bc)I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Obţinem sistemul:

$$\begin{cases} a(a + d + 1) - (ad - bc) = 1 & (1) \\ b(a + d + 1) = 1 & (2) \\ c(a + d + 1) = 1 & (3) \\ d(a + d + 1) - (ad - bc) = 1 & (4) \end{cases}$$

Din ecuaţiile (1) şi (4) rezultă că $(a + d + 1)(a - d) = 0$ şi cum $a + d + 1 \neq 0$, atunci $d = a$. Din ecuaţiile (2) şi (3) obţinem că $b = c = \dfrac{1}{a + d + 1} = \dfrac{1}{2a + 1}$. Folosind acum ecuaţia (1), avem că $a(2a + 1) - (a^2 - \dfrac{1}{(2a + 1)^2}) = 1$, echivalent cu $a(a + 1)(4a^2 + 4a - 3) = 0$, deci $a \in \{-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -1, 0\}$. Găsim soluţiile

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\ X_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ X_4 = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

XI.93. *Studiaţi convergenţa şirului $(u_n)_{n \geq 1}$ definit prin $u_1 \geq 0$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{u_n^2 + 1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.*

Gheorghe Costovici şi Adrian Corduneanu, Iaşi

Soluţie. Vom arăta că (u_n) este convergent către 1. Dacă $u_1 \in \{0, 1\}$, afirmaţia este imediată. Cazurile $u_1 \in (0, 1)$ şi $u_1 \in (1, \infty)$ tratându-se asemănător, ne vom fixa atenţia asupra primului. Evident că $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ şi se arată uşor prin inducţie că $u_{2n-1} < 1$ şi $u_{2n} > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Vom demonstra acum că $u_{2n+2} < u_{2n}$ şi

$u_{2n+1} > u_{2n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$; efectuăm calculele doar pentru prima afirmaţie:

$$u_{2n+2} < u_{2n} \Leftrightarrow \frac{u_{2n+1}+1}{u_{2n+1}^2+1} < u_{2n} \Leftrightarrow \left(\frac{u_{2n}+1}{u_{2n}^2+1}+1\right) \Big/ \left[\left(\frac{u_{2n}+1}{u_{2n}^2+1}\right)^2+1\right]$$
$$< u_{2n} \Leftrightarrow \frac{u_{2n}^4+u_{2n}^3+3u_{2n}^2+u_{2n}+2}{u_{2n}^4+3u_{2n}^2+2u_{2n}+2} < u_{2n} \Leftrightarrow u_{2n}^5-u_{2n}^4+2u_{2n}^2-$$
$$-u_{2n}^2+u_{2n}-2>0 \Leftrightarrow (u_{2n}-1)(u_{2n}^4+2u_{2n}^2+u_{2n}+2)>0,$$

adevărat. În concluzie, subşirul $(u_{2n-1})_{n\geq 1}$ este crescător şi mărginit, iar subşirul $(u_{2n})_{n\geq 1}$ este descrescător şi mărginit inferior de 1; înseamnă că ambele sunt convergente spre α, respectiv β. Trecând la limită în relaţia de recurenţă, obţinem că $\alpha = \dfrac{\beta+1}{\beta^2+1}$, iar $\beta = \dfrac{\alpha+1}{\alpha^2+1}$. Înlocuind, găsim pentru α ecuaţia $\alpha^5-\alpha^4+2\alpha^3-\alpha^2+\alpha-2=0$, deci $(\alpha-1)(\alpha^4+2\alpha^2+\alpha+2)=0$ şi, cum $\alpha>0$, înseamnă că $\alpha=1$. Deducem apoi că $\beta=1$, prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

Notă. În aceeaşi manieră, autorii problemei au stabilit că pentru orice $a, b \in (0,\infty)$, şirul $(u_n)_{n\geq 1}$ definit prin $u_1 \geq 0$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^a+b}{u_n^{a+1}+b}$ este convergent către 1.

XI.94. *Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există numerele distincte $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (1,2)$, aşa încât $x_1x_2\cdots x_n = \left(\dfrac{4}{e}\right)^n$.*

Dan Plăeşu, Iaşi

Soluţia 1 (a autorului). Considerăm funcţia $f:[1,2]\to\mathbb{R}$, $f(x) = x\ln x - x$. Aplicând teorema lui Lagrange funcţiei f pe intervalele $\left[1+\dfrac{k-1}{n}, 1+\dfrac{k}{n}\right]$, $k=1,2,\ldots,n$, determinăm $x_k \in \left(1+\dfrac{k-1}{n}, 1+\dfrac{k}{n}\right)$, $k=1,2,\ldots,n$, astfel încât $f\left(1+\dfrac{k}{n}\right) - f\left(1+\dfrac{k-1}{n}\right) = \dfrac{1}{n}f'(x_k)$, $k=1,2,\ldots,n$. Rezultă că $f'(x_1)+f'(x_2)+\ldots+f'(x_n) = n\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\left(f\left(1+\dfrac{k}{n}\right)-f\left(1+\dfrac{k-1}{n}\right)\right) = f(2)-f(1)$. Folosind faptul că $f'(x)=\ln x$ şi că $f(2)-f(1) = \ln\dfrac{4}{e}$, din ultima relaţie obţinem concluza problemei.

Soluţia 2 (Gabriel Popa). Construcţia şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ se poate face inductiv: luăm $x_1 = \dfrac{4}{e} \in (1,2)$, iar dacă presupunem existenţa numerelor $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (1,2)$ pentru care $x_1x_2\ldots x_n = \left(\dfrac{4}{e}\right)^n$, atunci numerele $x_1, \ldots, x_{n-1}, k_nx_n$ şi $\dfrac{4}{k_ne}$, unde $(k_n)_{n\geq 1}$ este un şir de numere din $(1,2)$ cu limita 1, au produsul $\left(\dfrac{4}{e}\right)^{n+1}$ şi pot fi făcute distincte, alegând convenabil k_n (posibil, întrucât orice vecinătate la dreapta a lui 1 este nenumărabilă).

Soluţia 3 (**Gheorghe Iurea**). Căutăm numerele $x_k, k=\overline{1,n}$ de forma $x_k = \left(\dfrac{4}{e}\right)^{a_k}$ cu $a_k \in \left(0, \dfrac{3}{2}\right)$, $k=\overline{1,n}$. Condiţia problemei devine $a_1+a_2+\ldots+a_n = n$.

Pentru $n = 2p$ putem alege numerele $1 - \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{4}, \ldots, 1 - \frac{1}{p+2}, 1 + \frac{1}{p+2}$, iar pentru $n = 2p+1$ putem alege numerele $1, 1 - \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{4}, \ldots, 1 - \frac{1}{p+2}, 1 + \frac{1}{p+2}$.

XI.95. *Calculaţi* $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)+\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^{\frac{1}{2^\alpha}}+\cdots+\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^{\frac{1}{n^\alpha}}-n\right]$, *unde* $\alpha \geq 1$ *este fixat. (În legătură cu L83 din RecMat-1/2005.)*

Marius Olteanu, Rm. Vâlcea

Soluţie. Notăm cu $(x_n)_{n\geq 1}$ şirul a cărui limită o căutăm. Cum $\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^{\frac{1}{k^\alpha}} > 1, \forall k = \overline{1,n}$, deducem că $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Din inegalitatea lui Bernoulli, obţinem că $\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^{\frac{1}{k^\alpha}} < 1 + \frac{1}{n^\alpha}\cdot\frac{1}{k^\alpha}$, deci $x_n < \frac{1}{n^\alpha}\left(1+\frac{1}{2^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Din teorema Cesarò-Stolz, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}\left(1+\frac{1}{2^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^\alpha}\cdot\frac{1}{(n+1)^\alpha-n^\alpha}$. Dacă vom dovedi că această din urmă limită este 0, conform criteriului cleştelui rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Aplicând teorema lui Lagrange funcţiei $f : [n, n+1] \to (0,\infty)$, $f(x) = x^\alpha$, deducem că $(n+1)^\alpha - n^\alpha = \alpha\cdot c^{\alpha-1}$, cu $c \in (n, n+1)$. Atunci $\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{(n+1)^{2\alpha-1}} < \frac{1}{(n+1)^\alpha}\cdot\frac{1}{(n+1)^\alpha-n^\alpha} < \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{(n+1)^\alpha\cdot n^{\alpha-1}}$, ceea ce, prin trecere la limită, conduce la faptul că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^\alpha}\cdot\frac{1}{(n+1)^\alpha-n^\alpha} = 0$.

<u>Clasa a XII-a</u>

XII.91. *Prove that* $\int_0^1 (1+x)\, e^{x(1+e^x)}dx = e^e - 1$.

Zdravko Starc, Vršac, Serbia

Soluţie. Facem substituţia $xe^x = t$; atunci $(x+1)e^x dx = dt$ şi $\int_0^1 (1+x)e^{x(1+e^x)}dx = \int_0^e e^t dt = e^t\Big|_0^e = e^e - 1$.

XII.92. *Fie* $b > a > 0$*, iar* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă pe* $[a,b]$ *şi derivabilă pe* (a,b)*; să se arate că există* $c \in (a,b)$ *astfel încât* $b\int_a^c f(x)\,dx = c\,(b-c)\,f(c)$.

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

Soluţie. Aplicăm teorema lui Rolle funcţiei $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x-b}{x}\int_a^x f(t)dt$ şi ţinem cont că $g'(x) = \frac{b}{x^2}\int_a^x f(t)dt + \frac{x-b}{x}f(x)$.

XII.93. *Demonstraţi că există* $c \in (2,\pi)$ *pentru care* $\int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx \leq \frac{2\cos 1}{c}$.

Constantin Micu, Melineşti (Dolj)

Soluţie. Se constată uşor că funcţia $f : \left[1, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ este strict crescătoare, iar $g : \left[1, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ este strict descrescătoare; atunci, conform inegalităţii lui Cebîşev,

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2}-1} \cdot \int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-1\right)^2} \cdot \int_1^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \cdot \int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x} dx,$$

de unde $\int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \le 2\cos 1 \cdot \frac{\ln \pi - \ln 2}{\pi - 2}$. Aplicând teorema lui Lagrange funcţiei $h : [2, \pi] \to \mathbb{R}$, $h(x) = \ln x$, găsim $c \in (2, \pi)$ pentru care $\frac{1}{c} = \frac{\ln \pi - \ln 2}{\pi - 2}$ şi astfel soluţia problemei este completă.

XII.94. *Calculaţi* $\lim\limits_{n\to\infty} n \int_n^{2n} \frac{x^a + b}{\sqrt{x^{2a+4}+1}} dx$, *unde* $a \in (0, \infty)$ *şi* $b \in \mathbb{R}$.

Liviu Smarandache, Craiova

Soluţie. Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^a + b}{\sqrt{x^{2a+4}+1}}$ şi $F(x) = \int_0^x \frac{t^a + b}{\sqrt{t^{2a+4}+1}} dt$, $x \ge 0$. Cum $0 \le F(x) \le \int_0^x \frac{t^a + b}{t^{a+2}} dt = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x} + \frac{b}{a+1}\left(\frac{1}{x^{a+1}} - \frac{1}{(2x)^{a+1}}\right)$, obţinem că $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 0$. Atunci

$$\lim_{x\to\infty} x \int_x^{2x} \frac{t^a + b}{\sqrt{t^{2a+4}+1}} dt = \lim_{x\to\infty} x(F(2x) - F(x)) = \lim_{x\to\infty} \frac{F(2x) - F(x)}{\frac{1}{x}} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2f(2x) - f(x)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} (x^2 f(x) - \frac{1}{2}(2x)^2 f(2x)) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{a+2} + bx^2}{\sqrt{x^{2a+4}+1}} = 1$. Prin urmare, limita cerută este $\frac{1}{2}$.

XII.95. *Fie* $(A, +, \cdot)$ *un inel în care* $0 \ne 1$ *şi* $1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 0$. *Să se arate că, dacă* $x^3 y^2 = y^2 x^3$, $\forall x, y \in A$, *atunci inelul este comutativ.*

I.V. Maftei, Bucureşti şi Mihai Haivas, Iaşi

Soluţie. Fie $x, y \in A$, arbitrare. Din $x^3y^2 = y^2x^3$ şi $x^3(y + 1)^2 = (y + 1)^2x^3$, găsim că $x^3(y + y) = (y + y)x^3$. Cum $1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 0$, rezultă că $5y = 0$, deci $x^3(5y) = (5y)x^3$. Deducem că $x^3(3y) = (3y)x^3$, prin urmare $x^3y = yx^3$. Folosind această relaţie pentru x şi $x + 1$, obţinem $x^3y = yx^3$ şi $(x + 1)^3y = y(x + 1)^3$, de unde $(3x^2 + 3x + 1)y = y(3x^2 + 3x + 1)$. Înlocuind pe x cu $x + 1$ şi ţinând cont că $3(x+1)^2+3(x+1)+1-(3x^2+3x+1) = 6x+6 = x+1$, rezultă că $(x+1)y = y(x+1)$, deci $xy = yx$. Cum x, y sunt arbitrare din A, concluzia problemei se impune.