Concursul de matematică "Florica T. Câmpan"
Etapa judeţeană, 21 februarie 2009

Clasa a IV-a (*Subiect elaborat de Dumitru Pârâială şi Cătălin Budeanu*)

1. Fiica, tatăl şi bunica au împreună 90 de ani. Peste doi ani, tatăl va avea de opt ori vârsta fiicei, iar bunica de două ori vârsta actuală a tatălui. Aflaţi vârsta fiecăruia în prezent.

2. Un blocnotes are 100 de pagini, numerotate de la 1 la 100. Se rup din acesta, la întamplare, 30 de foi, apoi se face suma numerelor ce marchează paginile rămase. Este posibil ca această sumă să fie egală cu 800? Justificaţi!

3. O cantitate de 120 kg de prune a fost împărţită în mod egal în mai multe lăzi. În vederea transportului, pentru a se evita pierderile, s-a transferat câte un sfert din cantitatea de prune din fiecare ladă, obţinâdu-se astfel o nouă ladă cu tot atâtea kilograme de prune câte au rămas în fiecare din lăzile iniţiale.

a) Câte lăzi au fost la început?Justificaţi!

b) Câte kilograme de prune erau iniţial în fiecare ladă?

c) Câţi lei s-au încasat din vânzarea prunelor din lada nou formată, dacă un kilogram de prune de calitatea întâi costă 4 lei, un kilogram de prune de calitatea a doua costă 3 lei, iar la fiecare 2 kilograme de prune de calitatatea întâi există câte 3kg de prune de calitatea a doua?

Clasa a V-a (*Subiect elaborat de Gheorghe Iurea şi Andrei Nedelcu*)

1. Notăm cu $a_1, a_2, ..., a_{2009}$ numerele 1, 2, ..., 2009, scrise în altă ordine. Arătaţi că numărul $N = (1 + a_1) \cdot (2 + a_2) \cdot \ldots \cdot (2009 + a_{2009})$ este par. Este posibil ca N să nu fie divizibil cu 4 ?

2. Într-un pătrat 7×7 sunt scrise 49 numere naturale diferite. De pe fiecare linie se consideră cel mai mic număr, iar cel mai mare dintre aceste şapte numere se notează cu x. De pe fiecare coloană se consideră cel mai mare număr, iar cel mai mic dintre aceste şapte numere se notează cu y. Justificaţi că $x \leq y$.

3. a) Arătaţi că numărul $3 \cdot 10^{2009} - 8$ nu este pătrat perfect.

b) Arătaţi că numărul 22^{1506} are cel puţin 2009 cifre.

Clasa a VI-a (*Subiect elaborat de Claudiu Ştefan Popa şi Ciprian Baghiu*)

1. a) Fie proporţia $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, cu toţi termenii numere naturale, astfel încât d este divizibil şi cu b, şi cu c, iar b şi c sunt prime între ele. Demonstraţi că bcd este pătrat perfect.

b) Dacă un extrem al unei proporţii cu toţi termenii numere naturale nenule este divizibil cu fiecare din mezii ei, arătaţi că suma tuturor termenilor este divizibilă cu celălalt extrem.

Claudiu Ştefan Popa

2. Din cauza crizei economice, preţul unei mărfi se reduce săptămânal cu 50%, timp de n săptămâni, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

a) Considerăm că preţul iniţial al mărfii este de 32 de lei. Ştiind că, atunci când este cazul, se procedează la rotunjirea preţului după o anumită reducere, pentru ca el să poată fi plătit cu unităţile monetare existente şi că în a n-a săptămână preţul afişat este acelaşi cu cel din săptămâna $n-1$, să se afle n.

b) Presupunând acum că preţurile succesiv obţinute sunt exprimate fără rotunjire şi că preţul iniţial al mărfii este a lei, arataţi că suma între preţurile mărfii din primele $n-1$ săptămâni şi dublul preţului mărfii din a n-a săptămână este a lei.

Claudiu Ştefan Popa

3. Considerăm triunghiul isoscel ABC, cu $AB = AC$ şi $m(\measuredangle BAC) < 90^0$. Punctele M şi N sunt în aşa fel încât AB separă C şi M, AC separă B şi N, $m(\measuredangle MAB) = m(\measuredangle NAC) = 90^0$, iar $AM = AN = AB$. Arătaţi că:

a) $MC = NB$;

b) $MB \neq NB$;

c) dacă, în plus, triunghiul MNB este isoscel, calculaţi $m(\measuredangle BAC)$.

<u>Clasa a VII-a</u> (*Subiect elaborat de Vasile Nechita şi Ionel Nechifor*)

1. a) Fie a, b, c numere reale strict pozitive astfel încât $5a + 3c = 4b$ şi $2b=\sqrt{15ac}$. Să se arate că numerele *a, b, c* sunt direct proporţionale cu numerele 6, 15 şi 10.

b) Determinaţi $x \in \mathbb{N}$ pentru care $\sqrt{x^2 + 9x + 13} \in \mathbb{N}$.

2. a) Pe o masă sunt 20 monede. Radu şi Bogdan joacă următorul joc: ia fiecare, pe rând, de pe masă, câte 1, 2 sau 3 monede; câştigătorul este cel care ia ultima monedă. Cine va câştiga jocul? (justificaţi!) Dar dacă numărul monedelor de pe masă este 21?

b) Fiind dat un paralelogram $ABCD$ şi o dreaptă d, care taie dreptele AB, BC, CD, DA în punctele M, N, P, respectiv Q, demonstraţi că $\dfrac{MA}{MB} \cdot \dfrac{NB}{NC} \cdot \dfrac{PC}{PD} \cdot \dfrac{QD}{QA} = 1$.

3. Andrei, Bogdan, Costel şi Dan cumpără trei torturi de îngheţată de formă pătrată, care au fiecare aceeaşi grosime şi compoziţie. Ştim că perimetrele torturilor sunt invers proporţionale cu numerele $\dfrac{1}{36}$, $\dfrac{1}{160}$, $\dfrac{1}{164}$, iar suma laturilor celor trei torturi este 90cm. Explicaţi cum vor împărţi copiii cele trei torturi, pentru a lua fiecare porţii egale (fără cântărire).

<u>Clasa a VIII-a</u> (*Subiect elaborat de Gabriel Popa şi Cristian Lazăr*)

1. a) Determinaţi numerele întregi a şi b cu proprietatea că

$$a^2b + ab^2 + a + b + 1 = 0.$$

Recreaţii Matematice, 1/2000

b) Fie n un număr natural dat. Determinaţi numerele reale strict pozitive x, y, z pentru care $x^n = yz$, $y^n = zx$ şi $z^n = xy$.

$\boxed{\textbf{Neculai Hârţan}}$, *Recreaţii Matematice, 2/2003*

2. Despre un număr natural n vom spune că are proprietatea (P) dacă $\sqrt{24n+1} \in \mathbb{Q}$ şi vom spune că are proprietatea (Q) dacă $\sqrt{24n+k} \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}, \forall k \in \{2, 3, 4, ..., 99\}$.

a) Daţi exemplu de un număr natural care are proprietatea (P), dar nu are proprietatea (Q).

b) Daţi exemplu de un număr natural care are proprietatea (Q), dar nu are proprietatea (P).

c) Daţi exemplu de un număr natural care nu are nici proprietatea (P), nici proprietatea (Q).

d) Determinaţi (cu justificare) cel mai mic număr natural care are atât proprietatea (P), cât şi proprietatea (Q).

e) Găsiţi toate numerele naturale care au atât proprietatea (P), cât şi proprietatea (Q).

Cristian Lazăr

3. Un zmeu din carton, care are forma unui triunghi ABC, lasă pe pământ o umbră având forma unui triunghi $A'B'C'$, care este asemenea cu triunghiul ABC.

a) Dacă zmeul se află sub razele soarelui la amiază, demonstraţi că $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$.

b) Dacă zmeul se află sub becul unui stâlp de iluminat, mai rezultă în mod necesar că $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$?

Constantin Cocea, Gabriel Popa

Etapa interjudeţeană, 21 martie 2009

<u>Clasa a IV-a</u> (*Subiect elaborat de Dan Brânzei şi Cătălin Budeanu*)

1. Aflaţi suma resturilor împărţirii a 2009 numere naturale consecutive la 15, ştiind că ultimul se împarte exact la 15.

2. Suma a două numere naturale este 26. Împărţind primul număr la al doilea şi apoi pe al doilea la primul se obţine, de fiecare dată, aceeaşi sumă dintre cât şi rest, aceasta fiind cu 8 mai mică decât unul dintre numere. Aflaţi numerele.

3. Fie numărul $N = 510152025\ldots725730735\ldots20020052010$.

a) Câte cifre are numărul N?

b) Care este a 1000-a cifră a lui N?

4. (*facultativ*) Centrul unei pieţe are forma unui pătrat de latură 7 şi este ocupat de o statuie cu un soclu pătrat de latură 1. Se poate acoperi suprafaţa rămasă cu patru dreptunghiuri având dimensiunile 3 şi 4?

<u>Clasa a V-a</u> (*Subiect elaborat de Gheorghe Iurea şi Andrei Nedelcu*)

1. La un turneu de fotbal în sală participă patru echipe. Se acordă 2 puncte pentru victorie, 1 punct pentru egal şi 0 puncte la înfrângere. Fiecare echipă joacă cu fiecare câte un singur meci. În clasamentul final nu sunt două echipe la egalitate de puncte. Care este numărul minim de puncte pe care îl poate avea echipa câştigătoare? Realizaţi o distribuţie a rezultatului meciurilor care să corespundă situaţiei de mai sus.

2. Considerăm mulţimea $A = \{2^a \cdot 3^b \cdot 5^c | a, b, c \in \mathbb{N}\}$. Arătaţi că printre oricare 9 elemente ale mulţimii A există cel puţin două a căror produs este pătrat perfect.

3. Un pătrat cu latura 5 se împarte în pătrate cu latura 1, care se numerotează cu numere de la 1 la 25. Se calculează sumele de pe fiecare linie şi de pe fiecare coloană. Există o numerotare astfel încât exact o sumă să fie număr par?

4. (*facultativ*) Numărul 31 organizează o petrecere în împărăţia Numerelor Naturale. Dacă $x \in \mathbb{N}$, atunci $9x - 2$ şi $9x + 2$ sunt părinţii lui x, iar $9x + 4$ este bunicul lui x. Se ştie că, dacă bunicul unui număr se află la petrecere, atunci este invitat şi nepotul său. De asemenea, dacă un număr este invitat la petrecere, atunci sunt invitaţi şi părinţii săi. Arătaţi că numărul 2009 este invitat la petrecere.

Clasa a VI-a (*Subiect elaborat de Ionel Nechifor şi Ciprian Baghiu*)

1. Să se arate că oricare ar fi $m, n \in \mathbb{N}$, atunci $\dfrac{m + 2^{267}}{m + 3^{178}} < \dfrac{n + 5^{388}}{n + 7^{291}}$.

2. Pe un teren de forma unui triunghi echilateral cu latura de 8m se plantează 5 brazi.

a) Demonstraţi că oricum am planta brazii, vor exista cel puţin doi având între ei o distanţă nu mai mare de 4 metri.

b) În câte moduri se pot planta cei 5 brazi, astfel încât să nu existe doi la distanţă strict mai mică de 4 metri?

3. Fie a un număr natural nenul. Arătaţi că există $b \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $9^b - 3^b$ să fie divizibil cu a.

Ciprian Baghiu

4.(*facultativ*) Determinaţi toate valorile numărului natural n, pentru care fracţia $\dfrac{2n^2 + 5}{3n^2 + 5n + 10}$ este reductibilă.

Clasa a VII-a (*Subiect elaborat de Vasile Nechita şi Claudiu Ştefan Popa*)

1. Luându-se după harta care a aparţinut piratului Supernegru, pentru a găsi comoara fabuloasă (adică o supercomoară) ascunsă de acesta cândva, undeva în Caraibe, patru supercăutători trebuie să caute în interiorului patrulaterului $NESV$ situat pe un teren plat şi obţinut astfel: din acelaşi punct O, fiecare dintre cei 4 merge, în linie dreaptă; primul face b paşi spre nord până în N, al doilea c paşi spre est până în E, al treilea a paşi spre sud până în S şi ultimul a paşi spre vest până în V (a,b,c numere naturale). Ştiind că între N şi E sunt exact a paşi şi că lungimea pasului fiecăruia dintre cei 4 este aceeaşi şi constantă, arătaţi că suprafaţa patrulaterului $NESV$ are aria exprimată printr-un număr natural (unitatea de măsură este pătratul cu latura de 1 *pas*). Este posibil ca aria patrulaterului să fie egală cu aria unui pătrat de latură 6 paşi ?

Claudiu Ştefan Popa

2. a) Fie a, b, cnumere reale pozitive. Demonstraţi că a este media geometrică a lui b şi c dacă şi numai dacă $\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{a+c}$.

b) Fie O intersecţia diagonalelor patrulaterului convex $ABCD$. Demonstraţi că $AB \parallel CD$ dacă şi numai dacă $\dfrac{1}{A_{AOD}} = \dfrac{1}{A_{ACD}} + \dfrac{1}{A_{ABD}}$.

Claudiu Ştefan Popa

3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia $x^2(y-1) + y^2(x-1) = 1$.

Gabriel Mîrşanu

Clasa a VIII-a (*Subiect elaborat de Gabriel Popa şi Cristian Lazăr*)

1. Se dă mulţimea $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Se formează toate sumele cu termeni distincţi din M, luând în seamă inclusiv sumele cu un singur termen. Două sume se consideră a fi distincte dacă diferă fie prin cel puţin un termen, fie prin ordinea termenilor (de exemplu, sumele $4,\ 1+3,\ 3+1,\ 1+2+3$ sunt distincte).

a) Câte sume diferite se pot forma?

b) Arătaţi că orice număr cuprins între 1 şi 10 poate fi obţinut ca rezultat în urma calculării unei astfel de sume.

c) Două numere cuprinse între 1 şi 10 vor fi numite *înrudite* dacă se obţin de acelaşi număr de ori ca rezultat al unor sume ca cele din enunţ. Determinaţi perechile de numere înrudite.

Gabriel Popa

2. Fie $VABCD$ şi $SABCD$ două piramide patrulatere regulate, având ca bază comună pătratul $ABCD$ de latură $12\sqrt{2}$cm, vârfurile V şi S de o parte şi de alta a planului $(ABCD)$ şi în care înălţimile şi muchiile laterale se exprimă (în centimetri) prin numere întregi.

a) Demonstraţi că punctele V, A, S şi C sunt coplanare.

b) Aflaţi valorile posibile ale înălţimii VO a piramidei $VABCD$.

c) Arătaţi că patrulaterul $VASC$ este circumscriptibil.

d) Dacă patrulaterul $VASC$ este inscriptibil, determinaţi lungimea segmentului VS.

Cristian Lazăr

3. Trei greieri "sar capra": un greiere, aflat în punctul A, sare peste un alt greiere, aflat în B, şi ajunge în C, unde C este simetricul lui A faţă de B. Apoi, acelaşi greiere sau un altul sare peste un partener de joacă şi tot aşa. Dacă iniţial cei trei greieri se aflau în trei dintre vârfurile unui pătrat, se poate ca la un moment dat, în cursul jocului, unul dintre greieri să ajungă în cel de-al patrulea vârf al acelui pătrat?

Mircea Ganga
