Concursul de matematică "Al. Myller"
Ediţia a VII-a, Iaşi, 28 martie 2009

Clasa a VII-a

1. Determinaţi $n \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $n! + 3 \cdot 2^n = 6^{n-2}$, unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$.

Artur Bălăucă

2. Fie triunghiul ABC şi punctul D situat pe latura $[BC]$. Arătaţi că
$$AB \cdot DC + AC \cdot BD \geq AD \cdot BC.$$

***

3. Fie p un număr natural impar. Se ştie că oricare divizor al lui p are ultima cifră diferită de 3 şi 7. Să se arate că numărul $5p + 1$ nu este pătrat perfect.

Mircea Fianu

4. Fie triunghiul echilateral ABC şi punctul D situat pe latura (AC). Bisectoarea unghiului $\angle ABD$ intersectează paralela prin A la dreapta BC în punctul E. Arătaţi că $AE + DC = BD$.

Cristian Lazăr

Clasa a VIII-a

1. Fie un tetraedru regulat cu muchia de lungime 3. Pe suprafaţa acestuia se consideră 37 de puncte. Arătaţi că printre aceste puncte există două astfel încât distanţa dintre ele este cel mult egală cu 1.

***

2. Determinaţi perechile de numere $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ care verifică egalitatea
$$2(a + b)^2 + 3(a + b) + ab + 4 = 0.$$

Petru Răducanu

3. Fie $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$ astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Să se arate că $a + b \geq 1 \geq c + d$.

Gheorghe Iurea

4. Numim *piramidă Myller* o piramidă $SABCD$ cu baza $ABCD$, care are $SA = SB = SC = SD$, $\angle ASB \equiv \angle ASD$ şi $\angle BSC \equiv \angle DSC$, iar lungimile SA, AB, BC, CD, DA, AC, BD sunt numere naturale nenule. Aflaţi piramida Myller de volum minim.

Cristian Lazăr

Clasa a IX-a

1. Determinaţi $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care există o mulţime $A \subset \mathbb{R}$ cu n elemente, având proprietatea $a(b^3 + 6) \leq b(a^3 + 6)$, $\forall a, b \in A$.

Gheorghe Iurea

2. Care este numărul minim de elemente care trebuie eliminate din mulţimea $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ astfel încât în mulţimea rămasă să nu existe trei elemente x, y, z pentru care $xy = z$?

***

3. Fie triunghiul ABC şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ astfel încât $BM+CN = MN + BC$. Notăm ρ raza cercului înscris în triunghiul AMN. Arătaţi că

$$\rho(\sqrt{bc} + \sqrt{(p-b)(p-c)}) \leq r(\sqrt{bc} - \sqrt{(p-b)(p-c)}).$$

Dan Brânzei

4. Numărul întreg m are proprietatea că, pentru orice număr natural n, există $a_n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $|nm - 80a_n + 1| < 20$. Arătaţi că 80 divide m.

Dinu Şerbănescu

Clasa a X-a

1. Determinaţi valorile lui $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care 41 are un multiplu de forma $\underbrace{\overline{a00\ldots0b}}_{n+2 \text{ cifre}}$ unde a, b sunt cifre zecimale nenule.

Mihai Bălună

2. Fie ABC un triunghi, $k \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ şi punctele $M \in BC$, $N \in CA$, $P \in AB$ astfel încât $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = k$. Se ştie că $AM = BN = CP$. Demonstraţi că triunghiul ABC este echilateral.

I. V. Maftei

3. Pentru $x, y \in \mathbb{R}$ definim $f(x; y) =$ distanţa de la $|x - y|$ la cel mai apropiat întreg, iar pentru o mulţime finită $M \subset [0, 1]$ definim

$$s(M) = \sum_{x,y \in M, x<y} f(x, y).$$

Determinaţi valoarea maximă pentru $s(M)$, când M parcurge familia mulţimilor cu 4 elemente.

Dinu Şerbănescu

4. Fie a un număr real. Arătaţi că şirul de termen general $x_n = (-1)^{[na]}$, $n \geq 0$, este periodic dacă şi numai dacă a este raţional.

Gheorghe Iurea

Clasa a XI-a

1. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere reale definit prin $x_1 = 1$ şi $x_{n+1} = \left|x_n - \dfrac{n}{n+1}\right|$, oricare ar fi $n \geq 1$. Să se arate că şirul este divergent.

Paul Georgescu, Gabriel Popa

2. a) Să se determine două matrice $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $A^2 + B^2 = I_2$ şi matricea $AB - BA$ este inversabilă.

b) Fie n un număr natural impar şi matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A^2+B^2 = I_n$. Să se arate că $\det(AB - BA) = 0$.

Andrei Ciupan

3. Fie $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii polinomiale neconstante cu proprietatea că există şi este finită $\lim\limits_{x\to\infty}([P(x)] - [Q(x)])$. Să se arate că există $n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $P(x) - Q(x) = n$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Gheorghe Iurea

4. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice simetrică cu elementele de pe diagonala principală egale cu 1 şi cu suma modulelor elementelor de pe fiecare linie mai mică sau egală cu 2. Să se arate că $\det A \leq 1$.

Cosmin Pohoaţă

Clasa a XII-a

1. Fie f, g două funcţii polinomiale reale, de acelaşi grad, ambele având coeficientul dominant egal cu 1. Dacă g nu are rădăcini reale pozitive, calculaţi

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 x \left(\frac{f(nx)}{g(nx)} - 1\right) dx.$$

Radu Gologan

2. Fie A un inel. a) Arătaţi că dacă $x \in A$ este nilpotent (există $k \in \mathbb{N}^*$ cu $x^k = 0$), atunci $1 + x$ este inversabil.

b) Dacă A este finit, numărul elementelor inversabile este un număr prim iar elementele neinversabile sunt nilpotente şi numărul elementelor neinversabile este mai mare sau egal cu numărul elementelor inversabile, arătaţi că A are 4 elemente.

***

3. Să se determine funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică egalitatea $f(\operatorname{arctg} x) = (1 + x^2)f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Al. Gabriel Mîrşanu

4. Fie $p, p > 2$, un număr prim şi f un polinom cu coeficienţi întregi, de grad $p-1$, cu proprietatea că pentru orice a, b numere întregi pentru care p divide $f(a) - f(b)$, rezultă că p divide $a - b$. Arătaţi că f are coeficientul dominant divizibil cu p.

Marian Andronache

Recreaţii ... matematice

Răspunsul la *"recreaţia"* de la pag. ... este:

Numărul maxim de operaţii cu care se poate scrie 2009 este 4017 :

$$2009 = 10 : 10 + 10 : 10 + \cdots + 10 : 10 \text{ (2009 termeni).}$$

Numărul minim de operaţii este 209:

$$2009 = (10 + 10 + \cdots + 10) + (10 : 10 + 10 : 10 + \cdots + 10 : 10)$$

(200 termeni în prima paranteză şi 9 în cea de-a doua).