Metoda identificării

Silviu BOGA[1]

Ne ocupăm în cele ce urmează de demonstrarea unor identităţi ce permit calculul unor sume sau al unor produse, prin formule de tipul

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = b_n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \text{respectiv}\ \prod_{k=1}^{n} a_k = b_n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

În ambele situaţii, cele mai populare strategii de abordare sunt următoarele:

• demonstrarea relatiei prin *raţionamente sintetic-constructive*; considerăm că această metodă este superioară calitativ faţă de oricare alta, însă presupunem o anume dexteritate din partea rezolvitorilor în utilizarea unor artificii de calcul şi raţionament;

• demonstrarea relaţiei prin *inducţie matematică* – este metoda aleasă de majoritatea rezolvitorilor, alegere motivată de gradul de accesibilitate al raţionamentului şi calculelor în acest caz, comparativ cu aplicarea strategiilor de tip sintetic-constructiv.

Vom oferi cititorului spre comparare un procedeu mai puţin cunoscut, pe care l-am denumit *metoda identificării*, exprimat prin următoarea

Propoziţie. a) *Dacă* $a_1 = b_1$, $b_k - b_{k-1} = a_k$, $\forall k \geq 2$, *atunci* $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = b_n$, $\forall n \geq 1$.

b) *Dacă* $a_1 = b_1$ *şi* $\dfrac{b_k}{b_{k-1}} = a_k$, $\forall k \geq 2$, *atunci* $\prod\limits_{k=1}^{n} a_k = b_n$, $\forall n \geq 1$.

Demonstraţie. Într-adevăr, $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = b_1 + \sum\limits_{k=2}^{n}(b_k - b_{k-1}) = b_1 + (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + ... + (b_n - b_{n-1}) = b_n$, la sumare efectuând aşa-numitele *reduceri telescopice.*

Faptul că metoda identificării nu apare printre căile frecvent aplicate pentru verificarea unor identităţi este explicabil prin aceea că celelalte metode au o arie de aplicabilitate incomparabil mai vastă. În ceea ce priveşte însă eleganţa raţionamentului şi simplitatea, următorul exemplu cu rezolvări comparative va convinge, probabil, de avantajele metodei identificării.

Problema 1. Demonstraţi că $\sum\limits_{k=1}^{n}(k^2+1)k! = n(n+1)!$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Soluţia 1 (prin *raţionamentele sintetic-constructive*). Dacă $a_k = (k^2+1)k!$ este termenul general al sumei, căutăm a, b, c astfel încât $a_k = a \cdot k! + b(k+1)! + c(k+2)!$; după calcule similare celor din metoda coeficienţilor nedeterminaţi, găsim $a = 2, b = -3$, $c = 1$, prin urmare $a_k = 2 \cdot k! - 3 \cdot (k+1)! + (k+2)!$ Sumând, obţinem că $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 2 \cdot 1! + (2-3) \cdot 2! + (1-3)(n+1)! + (n+2)! = n \cdot (n+1)!$ şi identitaea este astfel demonstrată.

[1] Profesor, Colegiul Tehnic "I.C. Ştefănescu", Iaşi

Soluţia 2 (prin *inducţie matematică*). Identitatea se verifică pentru $n = 1$ (obţinem $2 = 2$, afirmaţie adevărată). Presupunem că egalitatea din enunţ are loc pentru n (oarecare) şi demonstam că este adevărată şi pentru $n+1$. Avem

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(k^2+1)k! &= \sum_{k=1}^{n}(k^2+1)k! + ((n+1)^2+1)(n+1)! = \\ &= n(n+1)! + (n^2+2n+2)(n+1)! = \\ &= (n+1)!(n^2+3n+2) = (n+1)!(n+2)(n+1) = (n+1)(n+2)!\end{aligned}$$

Conform principiului inducţiei complete, identitatea are loc pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluţia 3 (prin *metoda identificării*). Identitatea este de tipul celei din Propoziţia 1, $a_k = (k^2+1)k!$ şi $b_n = n(n+1)!$. Observăm că $a_1 = b_1 (= 2)$, iar $b_k - b_{k-1} = k(k+1)! - (k-1)k! = (k^2+1)k! = a_k$, $\forall k \geq 2$. Rezultă că $\sum_{k=1}^{n} a_k = b_n = n(n+1)!$

Prezentăm încă două probleme, în rezolvarea cărora vom folosi direct metoda identificării:

Problema 2. Demonstraţi că $\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{2}{k^2+3k+2}\right) = \frac{n+3}{3(n+1)}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Soluţie. Identitatea este de tipul $\prod_{k=1}^{n} a_k = b_n$, $\forall n \geq 1$, cu $a_k = 1 - \frac{2}{k^2+3k+2}$ şi $b_n = \frac{n+3}{3(n+1)}$. Se observă că $a_1 = b_1$, iar $\frac{b_k}{b_{k-1}} = \frac{k+3}{3(k+1)} : \frac{k+2}{3k} = \frac{k^2+3k}{(k+1)(k+2)} = 1 - \frac{2}{k^2+3k+2} = a_k$, $\forall k \geq 2$. Conform Propoziţiei 1, identitatea este demonstrată.

Problema 3. Demonstraţi că $\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin\frac{nx}{2}\cdot\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Soluţie. Cu notaţiile din Propoziţia 1, avem evident că $a_1 = b_1$, iar $b_k - b_{k-1} = \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{kx}{2}\sin\frac{(k+1)x}{2} - \sin\frac{(k-1)x}{2}\sin\frac{kx}{2}\right) = \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{kx}{2}\cdot 2\cdot\sin\frac{x}{2}\cos\frac{kx}{2} = 2\sin\frac{kx}{2}\cos\frac{kx}{2} = \sin kx = a_k$, $\forall k \geq 2$, prin urmare are loc cerinţa problemei.

Propunem cititorului stabilirea următoarelor identităţi valabile pentru $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

4. $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$, **5.** $\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$,

6. $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{p-1}{k(k+p)}\right) = \frac{p(n+1)}{n+p}$, **7.** $\prod_{k=1}^{n}\cos 2^k x = \frac{\sin 2^{n+1}x}{2^n\cdot\sin 2x}$.

Bibliografie

1. **L. Panaitopol** - *Inducţia matematică*, Gil, Zalău, 2005.
2. **Gh. Rizescu** - *Sume şi produse*, Ed. Sigma, Bucureşti, 1999.