O metodă de rezolvare a problemelor

Maria MIHEŢ[1]

În această notă vom evidenţia o strategie importantă de rezolvare a problemelor: demonstraţia prin exprimarea în două moduri a unor mărimi. Această metodă s-a folosit încă în primele clase de gimnaziu, pentru obţinerea unor ecuaţii. Am întâlnit-o, de asemenea, în demonstraţia formulei pentru suma unghiurilor unui poligon convex: cu ajutorul unui punct O din interiorul poligonului se triangulează poligonul şi se exprimă în două moduri suma unghiurilor triunghiurilor obţinute. Prin exprimarea în două moduri a ariei sau volumului se pot afla anumite distanţe (ne amintim, de exemplu, cum se poate afla înălţimea din vârful unghiului drept într-un triunghi dreptunghic prin exprimarea în două moduri a ariei triunghiului), iar multe identităţi combinatoriale pot fi demonstrate folosind numărarea în două moduri.

Am exemplificat metoda prin câteva probleme tip, iar la sfârşitul lucrării am întocmit o listă de probleme însoţite de indicaţii de rezolvare. Am dori ca cititorii să încerce mai întîi să le rezolve fără a apela la indicaţii.

Această notă se adresează în special elevilor din clasele VI-VIII. Ea poate fi însă completată cu multe exemple de nivel liceal.

Problema 1. *Fie q un număr real, iar $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Să se calculeze, în funcţie de q, suma $S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$.*

Soluţie. Exprimăm S_{n+1} în două moduri: mai întâi $S_{n+1} = S_n + q^{n+1}$, iar, pe de altă parte, $S_{n+1} = qS_n + 1$. Rezultă că $S_n + q^{n+1} = qS_n + 1$, de unde obţinem că

$$(*) \qquad (q-1)S_n = q^{n+1} - 1.$$

Astfel, dacă $q \neq 1$, atunci $S_n = \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$. Dacă $q = 1$, prin înlocuire în S_n se obţine direct că $S_n = n + 1$. Aşadar,

$$S_n = \begin{cases} n+1, & \text{dacă } q = 1; \\ \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}, & \text{dacă } q \neq 1. \end{cases}$$

Problema 2. *Fie $n \geq 2$ un număr natural şi $\mathcal{D}_n = \{d_1, \ldots, d_k\}$ mulţimea divizorilor naturali ai lui n. Demonstraţi că $\dfrac{d_1 + \ldots + d_k}{\frac{1}{d_1} + \ldots + \frac{1}{d_k}}$ este un număr natural.*

Soluţie. Observăm că d este un divizor al lui n dacă şi numai dacă $\frac{n}{d}$ este divizor al lui n. Mai mult, mulţimea $\left\{\dfrac{n}{d_1}, \ldots, \dfrac{n}{d_k}\right\}$ este egală cu mulţimea $\mathcal{D}_n$. Scriind că suma elementelor în aceste mulţimi este aceeaşi, obţinem egalitatea $\dfrac{d_1 + \ldots + d_k}{\frac{1}{d_1} + \ldots + \frac{1}{d_k}} = n$.

[1] Profesor, Şcoala cu clasele I-VIII nr. 24, Timişoara

Problema 3. *Să se arate că în orice triunghi ABC au loc relaţiile:*

a) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ (*teorema sinusurilor*);

b) $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AB}{AC}$ unde D este piciorul bisectoarei unghiului A (*teorema bisectoarei*).

Soluţie. a) Vom arăta că $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$; pentru aceasta, fie M mijlocul laturii $[BC]$. Considerând triunghiurile ABM şi ACM cu înălţimile din A, obţinem că $S_{ABM} = S_{ACM}$.

Pe de altă parte, $2S_{ABM} = AB \cdot BM \cdot \sin\angle(ABC)$, iar $2S_{ACM} = AC \cdot CM \cdot \sin\angle(ACB)$. Cum $CM = BM$, rezultă că $b\sin C = c\sin B$, adică $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

b) Considerăm triunghiurile ABD şi ACD. Atunci $\dfrac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \dfrac{BD \cdot h_a}{CD \cdot h_a} = \dfrac{BD}{CD}$. Pe de altă parte, deoarece D se află pe bisectoarea unghiului A, înălţimile din D ale triunghiurilor ABD şi ACD sunt egale; prin urmare $\dfrac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \dfrac{AB}{AC}$. Egalând rapoartele, obţinem teorema bisectoarei.

În cele ce urmează, propunem celor interesaţi o serie de probleme care pot fi rezolvate folosind această strategie.

1) Vasul A conţine apă, iar vasul B conţine alcool pur. Se toarnă în A un pahar plin de alcool din B, apoi se scoate din A un pahar de amestec, care se toarnă în B. Ce relaţie există între cantitatea de alcool din A şi cantitatea de apă din B?

Indicaţie. Exprimaţi în două moduri cantitatea de apă care lipseşte din A după cele două operaţii.

2) Doi călători au plecat în acelaşi moment din localităţile A şi B, fiecare deplasându-se spre localitatea celuilalt cu viteză constantă. Ei s-au întâlnit la ora 13 şi, continuându-şi drumul, primul a ajuns în B la ora 17, iar cel de-al doilea în A la ora 21. La ce oră au plecat cei doi în călătorie?

Indicaţie. Calculaţi în două moduri distanţele parcurse de cei doi călători până la întâlnire.

3) O motonavă a plecat într-o cursă pe mare. Când motonava s-a îndepărtat cu 180 mile de ţărm, a fost trimis după ea un hidroavion cu un mesaj urgent. Viteza hidroavionului este de zece ori mai mare decât viteza motonavei. La ce distanţa de ţărm a fost ajunsă motonava?

Indicaţie. Exprimaţi în două moduri timpul până la întâlnire.

4) 98 de numere naturale consecutive $a_1 < a_2 < \ldots < a_{98}$ au suma 137. Aflaţi $a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{98}$.

Indicaţie. Exprimaţi în două moduri $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{98}$.

5) În fiecare din pătrăţelele unui tabel dreptunghiular cu 4 linii şi 5 coloane scriem câte un număr natural, astfel încât suma numerelor de pe fiecare linie să fie aceeaşi şi suma numerelor de pe fiecare coloană să fie aceeaşi (nu neapărat egală cu cea de pe linii). Fie S suma numerelor din tabel. a) Putem avea $S = 30$? b) Daţi două exemple de tabele cu $S = 20$. c) Aflaţi toate tabelele cu $S < 20$.

Indicaţie. Calculaţi S în două moduri.

6) Există poligoane convexe cu mai mult de trei unghiuri ascuţite?

Indicaţie. Calculaţi în două moduri suma unghiurilor poligonului.

7) Un număr natural $n \geq 2$ cu număr impar de divizori este pătrat perfect.

Indicaţie. Scrieţi în două moduri mulţimea divizorilor lui n şi grupaţi divizorii în perechi de forma $\left\{d, \frac{n}{d}\right\}$.

8) Fie $\{d_1, \dots, d_k\}$ mulţimea divizorilor naturali ai numărului natural $n \geq 2$. Demonstraţi că $(d_1 d_2 \dots d_k)^2 = n^k$.

Indicaţie. Scrieţi în două moduri mulţimea divizorilor lui n.

9) Demonstraţi că dacă $m \geq 2$, $n \geq 2$ sunt numere naturale, iar m divide n, atunci $2^m - 1$ divide pe $2^n - 1$.

Indicaţie. Calculaţi în două moduri $1 + 2 + \dots + 2^{n-1}$.

10) Aflaţi cea mai mică valoare pentru $\max\left\{a + \frac{1}{b}, b + \frac{1}{a}\right\}$, când $a, b \in (0, \infty)$.

Indicaţie. Evaluaţi în două moduri suma dintre $a + \frac{1}{b}$ şi $b + \frac{1}{a}$.

11) Pe latura (BC) a triunghiului ABC, se consideră punctele D, E astfel încât $\angle BAD \equiv \angle CAE$. Demonstraţi că $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{BE}{EC} = \frac{AB^2}{AC^2}$ (*Steiner*).

Indicaţie. Exprimaţi în două moduri $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}$ şi $\frac{S_{ABE}}{S_{ACE}}$.

12) În triunghiul ascuţitunghic ABC, înălţimea AA' şi mediana CM au aceeaşi lungime. Aflaţi $m(\angle MCB)$.

Indicaţie. Exprimaţi în două moduri aria triunghiului MCB.

13) Fie $n \in \mathbb{N}$. Demonstraţi că

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \text{ (\textit{Botez-Catalan}).}$$

Indicaţie. Calculaţi în două moduri suma: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$.

14) Produsul a două numere de forma $x^2 - 2y^2$, $x, y \in \mathbb{N}$, este un număr de aceeşi formă.

Indicaţie. Exprimaţi în două moduri $(a + \sqrt{2}b)(c + \sqrt{2}d)(a - \sqrt{2}b)(c - \sqrt{2}d)$.

15) Fie $k \geq 3$ un număr natural impar. Arătaţi că dacă $x_1, x_2, \dots, x_k$ sunt numere întregi astfel încât $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_3| = \dots = |x_{k-1} - x_k| = |x_k - x_1|$, iar $x_1 + x_2 + \dots + x_k = m$, atunci k îl divide pe m.

Indicaţie. Exprimaţi în două moduri suma $(x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + \dots + (x_{k-1} - x_k) + (x_k - x_1)$.

16) Aflaţi numerele $N = \overline{a_0 a_1 \dots a_9}$ de 10 cifre (în baza 10) cu proprietatea că a_0 este numărul cifrelor de 0 ale lui N, a_1 este numărul de 1-uri din scrierea lui N, ..., a_9 este numărul cifrelor de 9 ale lui N.

Indicaţie. Calculaţi în două moduri suma cifrelor lui N.

17) Numerele $a_1, a_2, \dots, a_n$ aparţin mulţimii $\{-1, 1\}$, iar $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n + a_n a_1 = 0$. Arătaţi că n este multiplu de 4.

Indicaţie. Calculaţi în două moduri produsul $(a_1 a_2)(a_2 a_3) \dots (a_n a_1)$.

18) Un tablou cu m linii şi n coloane are toate elementele egale cu 1 sau cu -1, iar produsul elementelor de pe fiecare linie şi fiecare coloană este -1. Demonstraţi că m şi n au aceeaşi paritate.

Indicaţie. Calculaţi în două moduri produsul elementelor din tablou.

19) Într-un tablou cu 25 de linii şi 25 de coloane pentru fiecare $i, j \in \{1, \ldots, 25\}$ scriem la intersecţia dintre linia i şi coloana j numărul 1, dacă i divide pe j şi 0, dacă i nu divide pe j. Demonstraţi că numărul zerourilor din tablou este par.

Indicaţie. Calculaţi în două moduri suma elementelor tabloului.

20) La un turneu de şah au participat 14 şahişti, fiecare jucând câte o partidă cu fiecare din ceilalţi 13. La sfârşitul turneului s-a constatat că suma punctelor obţinute de primii trei clasaţi a fost egală cu suma punctelor ultimilor 9. Ştiind că meciul dintre şahiştii de pe locurile 4 şi 5 nu s-a terminat remiză, aflaţi câte puncte a obţinut şahistul clasat pe locul 4 (pentru victorie se primeşte 1p, pentru remiză $\frac{1}{2}$p, iar pentru înfrângere niciun punct).

Indicaţie. Calculaţi în două moduri suma punctelor primilor trei şahişti.

21) Putem scrie pe tablă 17 numere reale astfel încât suma oricăror 7 dintre ele să fie strict pozitivă, iar suma oricăror 11 să fie strict negativă?

Indicaţie. Dacă $x_1, \ldots, x_{17}$ sunt cele 17 numere, calculaţi în două moduri suma elementelor din tabloul (cu 11 linii şi 7 coloane):

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \ldots & x_7 \\ x_2 & x_3 & \ldots & x_8 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{17}. \end{array}$$

22) La o adunare a zeilor în Olimp, fiecare zeu a primit în cupa sa aceeaşi cantitate de ambrozie şi are voie să toarne din cupa sa în cupa altui zeu, însă doar o cantitatea de ambrozie egală cu cea pe care o are celălalt zeu. La sfârşitul adunării, toată ambrozia a ajuns în cupa lui Zeus. Demonstraţi că numărul participanţilor a fost o putere a lui 2.

Indicaţie. Scrieţi în două moduri cantitatea iniţială de ambrozie din cupa lui Zeus.

Bibliografie

1. **A. Engel** - *Probleme de matematică – strategii de rezolvare*, GIL, Zalău, 2006.
2. **M. Miheţ, E. Obădeanu** - *Teste şi probleme comentate pentru Concursul "Traian Lalescu" (gimnaziu)*, 19 (1988).
3. **L. Niculescu** - *Teme de algebră pentru gimnaziu*, Ed. Cardinal, 1993.
4. **G. Polya** - *Cum rezolvăm o problemă?*, Ed. Ştiinţifică, 1965.
5. ******* - *Colecţia RMT*, 1996-2009.