Dualitatea unor sume combinatoriale

Andrei VERNESCU[1]

Abstract. The main result consist in the combinatorial identity (6), where Ω_n is the notation in (1). Some connections of this identity with other combinatorial identities of similar kind, that are known or are expected to be established, are formulated.

Keywords: combinatorial identity.

MSC 2000: 05A19.

1. În lucrarea [**1**], din numărul 2/2007 al acestei reviste, s-a aplicat o ideee foarte elegantă pentru calculul unei sume care conţine expresiile $\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$.

În nota de faţă venim în continuarea lucrării citate, prezentând calculul bazat pe aceeaşi idee al altei sume, care ar putea fi considerată, din punctul de vedere al mijloacelor folosite, ca fiind duala celei precedente.

Pentru facilitarea calculelor care vor urma, vom utiliza notaţia

$$\Omega_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{1}$$

(Am introdus această notaţie în manuscrisul din 1987 al cărţii [**11**], am publicat-o pentru prima dată în articolul [**6**], am folosit-o în toate ediţiile culegerii de probleme [**7**], ca şi într-o serie de lucrări: [**8**], [**9**], [**11**] şi [**13**].)

Tot în scopul scrierii mai simple a formulelor şi calculelor care vor urma, este necesar să definim Ω_n şi pentru $n = 0$. Pentru aceasta, în cazul $n \geq 1$, să amplificăm fracţia din partea dreaptă a egalităţii (1) cu $(2n)!! = 2^n n!$. Obţinem $\Omega_n = \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$. Ca această formulă să poată fi prelungită şi pentru $n = 0$, convenim să punem prin definiţie

$$\Omega_0 = 1. \tag{2}$$

Cu această notaţie, identitatea care formează rezultatul principal al articolului citat [**1**] se scrie concentrat astfel:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \Omega_k = \Omega_n. \tag{3}$$

Ea poate fi considerată din două puncte de vedere: ca formulă de însumare combinatorială, precum şi ca identitate referitoare la expresiile Ω_k.

2. Obţinerea identităţii (3) se efectuează în [**1**] utilizând integralele:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx, \tag{4}$$

[1] Conf. dr., Departamentul de Ştiinţe, Univ. "Valahia", Târgovişte

pentru care $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$ şi pe care, folosind notaţia (1) împreună cu definiţia (2), putem să le mai scriem sub forma:

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\Omega_k, & \text{dacă } n = 2k \\ \dfrac{1}{\Omega_k} \cdot \dfrac{1}{2k+1}, & \text{dacă } n = 2k+1. \end{cases} \tag{5}$$

(Găsirea, pe baza formulei de recurenţă $I_k = \dfrac{k-1}{k} I_{k-2}$, $k \geq 2$, a expresiilor integralei I_n – scrise însă fără a folosi expresia Ω_k – este reamintită în [**1**].)

Astfel, cu utilizarea notaţiei menţionate pentru Ω_n şi a simbolului de însumare $\sum$, putem sintetiza obţinerea rezultatului principal din [**1**] astfel:

$$\frac{\pi}{2}\Omega_n = I_{2n} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x \, dx = \int_0^{\pi/2} \left(1 - \sin^2 x\right)^n \, dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \sin^{2k} x \right) dx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \left(\int_0^{\pi/2} \sin^{2k} x \, dx \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k I_{2k} = \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{n} (-1)^n C_n^k \Omega_k,$$

adică

$$\frac{\pi}{2}\Omega_n = \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \Omega_k,$$

de unde (3).

Putem aplica acum exact aceeaşi idee de calcul pornind de la integrala (4) de ordin impar, I_{2n+1}. Vom obţine:

$$\frac{1}{\Omega_n} \cdot \frac{1}{2n+1} = I_{2n+1} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x \, dx = \int_0^{\pi/2} \left(1 - \sin^2 x\right)^n \cos x \, dx \overset{t=\sin x}{=\!=}$$

$$\overset{t=\sin x}{=\!=} \int_0^1 \left(1 - t^2\right)^n \, dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k t^{2k} \right) dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \left(\int_0^1 t^{2k} \, dt \right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{C_n^k}{2k+1},$$

adică

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{C_n^k}{2k+1} = \frac{1}{\Omega_n} \cdot \frac{1}{2n+1}. \tag{6}$$

Această identitate, care constituie rezultatul principal al lucrării noastre, nu se mai referă la expresiile Ω_k în interiorul sumei, ci conţine pe Ω_n doar la rezultat, fiind (spre deosebire de (3), care admite două interpretări) doar o identitate combinatorială. Dar, din punct de vedere al procedeului de deducere folosit, ea constituie o identitate duală celei din [**1**], adică (3).

Însă, ca de multe ori în domeniul identităţilor combinatoriale, identitatea găsită nu este nouă! Într-adevăr, în cartea lui H. W. Gould [**2**], la pag. 6, este prezentată identitatea

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{x}{x+k}=\frac{1}{\binom{x+n}{n}}\qquad (x\in\mathbb{R})$$

în care notaţia consacrată $\dbinom{\alpha}{k}$, pentru $\alpha\in\mathbb{R}$ şi $k\in\mathbb{N}^*$, are semnificaţia:

$$\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k},$$

cu $\dbinom{\alpha}{0}\overset{def}{=}1$, iar dacă $\alpha=n\in\mathbb{N}$ şi $k\le n$ se obţin combinările, $\dbinom{n}{k}=C_n^k$.

Introducând în identitatea lui Gould $x=\dfrac{1}{2}$, se obţine (6).

3. Prin prisma identităţilor combinatoriale, egalitatea (6) ocupă poziţia a patra din următoarea succesiune de formule:

$$S_n\overset{\text{def}}{=}\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1};\quad S_n^{(a)}\overset{\text{def}}{=}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{C_n^k}{k+1}=\frac{1}{n+1};$$
$$T_n\overset{\text{def}}{=}\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{2k+1}=f(n);\qquad T_n^{(a)}\overset{\text{def}}{=}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{C_n^k}{2k+1}=\frac{1}{\Omega_n}\cdot\frac{1}{2n+1},$$

unde a desemnează o sumă alternată, iar $f(n)$ este o expresie neprecizată.

Găsirea sumelor S_n şi $S_n^{(a)}$ este binecunoscută (o cale fiind integrarea identităţilor $(1+t)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k t^k$, respectiv $(1-t)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k t^k$, pe intervalul $[0,1]$). Obţinerea sumei $T_n^{(a)}$ a format obiectul prezentei note, expus în secţiunea 2 şi astfel, se mai pune problema calculului sumei T_n. O altă problemă de studiu ar putea-o constitui calculul unei sume asemănătoare cu cea din (3), dar nealternată, anume $\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\Omega_k$.

Bibliografie

1. **A. Corduneanu**, **Gh. Costovici** – *Un şir strâns legat de şirul lui Wallis*, Recreaţii Matematice, Anul IX, Nr. 2 iulie-decembrie 2007, 95-96.
2. **H. W. Gould** – *Combinatorial identities*, Morgantown Printing and Binding, Co., 1972.
3. **R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik** – *Concrete Mathematics*, Addison Wesley Longman, Reading MA, 1994.

4. **D. E. Knuth** – *The art of Computer Programming*, Vol. 1, Addison Wesley Longman, Reading, MA 1977 (traducerea la Ed. Teora, Bucureşti).
5. **J. Riordan** – *Combinatorial Identities*, J. Wiley & Sons, New York, 1968.
6. **L. Tóth, A. Vernescu** – *Dezvoltarea asimptotică a şirului lui Wallis*, G. M.-A, **11** (1990), Nr. 1, 26-29.
7. **A. Vernescu** – *Analiză matematică. Probleme. Calcul diferenţial*, Editura Pantheon, Bucureşti, 1991.
8. **A. Vernescu** – *Ordinul de convergenţă al şirului lui Wallis*, G. M.-A, **12** (1991), 7-8.
9. **A. Vernescu** – *Asupra unui tip de relaţie de recurenţă*, Revista Matematică din Timişoara (seria a IV-a), nr. 4/2003, 8-14.
10. **A. Vernescu** – *Şiruri de Numere Reale*, Ed. Univ. Bucureşti, 2004.
11. **A. Vernescu** – *Numărul e şi matematica exponenţialei*, Ed. Univ. Bucureşti, 2004.
12. **A. Vernescu** – *The natural proof of the inequalities of Wallis type*, Libertas Mathematica, **24** (2004), 183-190.
13. **A. Vernescu, C. Mortici** – *New results in discrete asymptotic analysis*, General Mathematics, to appear.

Recreaţii ... matematice

(continuare de la pagina 9)

Mă aflu în posesia unei demonstraţii minunate a acestei afirmaţii, dar marginea paginii este prea strâmtă pentru a o cuprinde.

Care avea să fie o *provocare* timp de peste 350 de ani pentru multe generaţii de matematicieni.

Abia în 1995 **Andrew Wiles** a demonstrat afirmaţia, punând capăt provocării lui Fermat. Drumul parcurs de lumea matematică până la acest final a fost presărat de tentative de demonstraţie, eşecuri, descoperiri epocale, drame şi tragedii individuale, dezvăluiri senzaţionale în mass-media etc.

N-au lipsit nici glumele pe marginea provocării lui Fermat:

În staţia de metrou de pe Eighth Street, New York a apărut inscripţia:

> $x^n + y^n = z^n$: **nu există soluţie. Am descoperit o demonstraţie cu adevărat remarcabilă a acestui fapt dar nu pot s-o scriu fiindcă-mi vine trenul.**

Sau catrenul:

"Pe untul meu sunt multe litere scrise",
Supărat un client la o masă răcnise;
"N-am avut loc, răspunse piccolo-ul Pierre,
Nici pe margine, nici pe rafturile din frigider."

(**Simon Singh**–*Marea Teoremă a lui Fermat*, Humanitas, Bucureşti, 2005.)