Asupra unui şir de integrale Riemann

Dan POPESCU[1]

Abstract. This Note is an extension of a former paper–[**3**] in the reference list. The author remarks that many problems proposed as topics to various contests are direct consequences of Propositions 1 and 2 in the note.

Keywords: continuous function, periodic function, Rimann integral.

MSC 2000: 26A42.

În cele ce urmează, sunt prezentate două condiţii suficiente de convergenţă a şirului real de integrale

$$\left(\int_a^b f(x)\, g(nx)\ dx\right)_{n\in\mathbb{N}},$$

unde f şi g sunt funcţii integrabile Riemann care asigură corectitudinea definirii şirului.

Un prim rezultat este prezentat în [**3**]:

Propoziţia 1. *Fie $f:[0,T]\to\mathbb{R}$ o funcţie integrabilă Riemann şi $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ o funcţie cu perioada $T>0$, astfel încât restricţia $g|_{[0,T]}$ este integrabilă Riemann. Atunci*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T f(x)\, g(nx)\, dx = \frac{1}{T}\left(\int_0^T f(x)\, dx\right)\left(\int_0^T g(x)\, dx\right). \tag{1}$$

O aplicaţie directă a acestui rezultat este următoarea:

Fie $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ o funcţie continuă cu perioada 1. Atunci

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)\cdot f(nx)\, dx = \left(\int_0^1 f(x)\right)^2.$$

(**Cristinel Mortici**, *etapa judeţeană, 2003*)

În lucrarea [**2**], se propune tot o consecinţă directă a rezultatului (1):

Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continuă şi periodică cu perioada $T>0$. Să se demonstreze că, pentru $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, avem

$$\lim_{x\to\infty}\int_a^b f(nx)\, dx = \frac{b-a}{T}\int_0^T f(x)\, dx.$$

Tot ca o consecinţă a rezultatului (1), este prezentată următoarea problemă:

Fie funcţia continuă $f:[0,1]\to\mathbb{R}$. Să se demonstreze că şirul $(a_n)_{n\geq1}$, definit de relaţia $a_n=\int_0^1 \{nx\}^2 f(x)\, dx$, este convergent şi să i se afle limita, în funcţia f, unde $\{x\}=x-\max\{k\in\mathbb{Z}; k\leq x\}, \forall x\in\mathbb{R}$.

(**Octavian Purcaru,** *Lista scurtă, O.N.M., 2003*)

[1]Profesor, Colegiul Naţional "Ştefan cel Mare", Suceava

Demonstraţie. Cum funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} g(x) = \{x\}^2$ este periodică cu perioada principală 1, au loc:

$$a_n = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\, g(nx)\, dx = \left(\int_0^1 f(x)\, dx\right)\left(\int_0^1 \{x\}^2\, dx\right) = \frac{1}{3}\int_0^1 f(x)\, dx,$$

deoarece $\int_0^1 \{x\}^2\, dx = \int_0^1 x^2 dx$, funcţiile de integrat fiind egale pe $[0,1)$.

În lucrarea [**1**], apare următoarea problemă, semnată de **Mihail Bencze**:

Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 t^2 \{nt\}\, dt$, *unde* $\{x\}$*are semnificaţia de mai sus.*

Un al doilea rezultat util:

Propoziţia 2. *Fie funcţiile continue* $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *şi* $f : [0,a] \to \mathbb{R}$, *unde* $a>0$. *Dacă* $\lim_{x\to\infty} g(x) = L \in \mathbb{R}$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^a g(nx)\, f(x)\, dx = L \int_0^a f(x)\, dx. \tag{2}$$

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă $h(x) = g(x) - L, \forall x \in [0,\infty)$, atunci

$$\int_0^a g(nx)\, f(x)\, dx = \int_0^a (h(nx) + L)\, f(x)\, dx = \int_0^a h(nx)\, f(x)\, dx + L\int_0^a f(x)\, dx.$$

Notând $nx = t$, se obţine:

$$\int_0^a h(nx)\, f(x)\, dx = \frac{1}{n}\int_0^{na} h(t)\, f\left(\frac{t}{n}\right) dt.$$

Cum $\exists b > 0$ astfel încât $|f(x)| \le b, \forall x \in [0,a]$,

$$\left|\int_0^a h(nx)\, f(x)\, dx\right| \le \frac{b}{n}\int_0^{na} |h(t)|\, dt = \frac{ab}{na}\int_0^{na} |h(t)|\, dt.$$

Dacă H este o primitivă pentru $|h|$ pe intervalul $[0,\infty)$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x |h(t)|\, dt}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{H(x) - H(0)}{x} = \lim_{x\to\infty} |h(x)| = 0,$$

ceea ce asigură că $\lim_{x\to\infty} \int_0^a h(nx)\, f(x)\, dx = 0$.

Observaţie. Relaţia (2) se poate scrie şi

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^a g(nx)\, f(x)\, dx = \left(\lim_{a\to\infty} \frac{1}{a}\int_0^a g(x)\, dx\right)\int_0^a f(x)\, dx, \tag{2'}$$

ceea ce justifică prezentarea celor două şiruri de integrale Riemann împreună .

O aplicaţie a acestui rezultat:

Fie funcţiile $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *şi* $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, *astfel ca* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$. *Să se demonstreze că*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^n f(x)\, g\left(\frac{x}{n}\right) dx = L \int_0^1 g(x)\, dx.$$

(**Laurenţiu Panaitopol,** *etapa judeţeană, 2003*)

Demonstraţie. Cu substituţia $x = nt$, limita devine

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(nt)\, g(t)\, dt = L \int_0^1 g(x)\, dx$$

şi finalizarea este clară.

Propunem cititorului următoarele exerciţii:

1. Să se demonstreze că

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi e^{-x} \cos nx\, dx \ = \frac{2}{\left(1 - e^{-\pi}\right)} \pi.$$

2. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \{nx\}\, [x]\, dx$, justificându-se întâi existenţa limitei, unde $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} | k \le x\}$ şi $\{x\} = x - [x]\, , \forall x \in \mathbb{R}$.

3. Să se demonstreze că, pentru orice funcţie continuă $f : [0, a] \to \mathbb{R}$, are loc relaţia

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^a e^{-nx} f(x)\, dx = 0.$$

Bibliografie

1. **D.M. Bătineţu - Giurgiu ş.a.** – *Analiză matematică. Probleme pentru clasa a XII-a*, Editura Matrix, 2004.
2. **R. Miculescu ş.a.** – *Probleme de calcul integral*, Editura GIL, 2005.
3. **D. Popescu**, **F. Popovici** – *O generalizare a lemei lui Riemann*, Recreaţii Matematice, Iaşi, 4(2002), nr.1, 12-13.