Exponentul de triangularitate al unui triunghi

Dorin MĂRGHIDANU[1]

Abstract. The following problem is investigated: if a, b, c denote the lengths of the sides of a triangle, it is required to determine the values of the real and positive exponents α such that the powers a^α, b^α, c^α can still be the side lengths of a triangle. It is introduced the notion of *triangularity exponent* t and it is proved that $t = 2$ for the right-angled triangles, $t \in (1, 2)$ for the obtuse-angled triangles and $t > 2$ for the acute-angled triangles (Proposition 2).

Keywords: triangularity exponent.

2000 MSC: 51M15.

În această notă dăm un răspuns la următoarea întrebare:

Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, pentru care numere α reale şi pozitive puterile a^α, b^α, c^a pot forma de asemenea un triunghi?

În prima parte a notei prezentăm instrumentul algebric de lucru – o extindere a inegalităţii 11.19 din [**1**], p.99, iar în cea de-a doua introducem *exponentul de triangularitate* al unui triunghi, noţiune necesară rezolvării problemei propuse.

1. La fel cum a fost demonstrată inegalitatea 11.19 din [**1**], putem stabili şi

Propozţia 1. *Dacă pentru numerele reale strict pozitive $a, a_1, a_2, \ldots, a_n$ există un număr real $\alpha > 0$ astfel încât $a^\alpha = a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha$, atunci au loc:*

(1) 1) $a^\beta > a_1^\beta + a_2^\beta + \ldots + a_n^\beta, \;\; \forall \beta \in \mathbb{R}, \beta > \alpha;$

(2) 2) $a^\beta < a_1^\beta + a_2^\beta + \ldots + a_n^\beta, \;\; \forall \beta \in \mathbb{R}, 0 < \beta < \alpha.$

Demonstraţie. Din relaţia de condiţie rezultă că $a > a_1$, $a > a_2, \ldots, a > a_n$.

1) $\beta > \alpha$ implică $a^{\beta-\alpha} > a_1^{\beta-\alpha}, \ldots, a^{\beta-\alpha} > a_n^{\beta-\alpha}$ şi avem

$$\begin{aligned} a^\beta &= a^{\beta-\alpha} \cdot a^\alpha = a^{\beta-\alpha}(a_1^\alpha + \ldots + a_n^\alpha) = a^{\beta-\alpha} \cdot a_1^\alpha + \ldots + a^{\beta-\alpha} \cdot a_n^a \\ &> a_1^{\beta-\alpha} \cdot a_1^\alpha + \ldots + a_n^{\beta-\alpha} \cdot a_n^\alpha = a_1^\beta + \ldots + a_n^\beta. \end{aligned}$$

2) $\beta < \alpha$ implică $a^{\beta-\alpha} < a_1^{\beta-\alpha}, \ldots, a^{\beta-\alpha} < a_n^{\beta-\alpha}$ şi, inversând semnul de inegalitate în calculul de la punctul 1), obţinem (2).

Observaţii. 1. Relaţia (1) rămâne valabilă şi în condiţia $a^\alpha > a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha$.

2. Pentru $n = 2, \alpha = 2$ şi $\beta \in \mathbb{N}, \beta > 2$, punctul 1) revine la afirmaţia 11.19 [**1**].

Corolar. *Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi şi este verificată condiţia $a^\alpha = b^\alpha + c^\alpha$, atunci $(a^\beta, b^\beta, c^\beta)$ formează un triunghi dacă şi numai dacă $\beta < \alpha$.*

Vom indica două aplicaţii directe, în geometrie, ale rezultatelor precedente.

Aplicaţia 1. *Într-un paralelipiped dreptunghic de muchii a, b, c şi diagonală mare D, avem $D^p > a^p + b^p + c^p, \;\; \forall p \in \mathbb{R}, p > 2.$*

Demonstraţie. Fie d diagonala feţei de laturi a, b. Conform punctului 1) al Propoziţiei 1 (cu $n = 2, \alpha = 2$), aplicat de două în cazul particular al triunghiului dreptunghic avem $D^p > d^p + c^p > a^p + b^p + c^p$.

[1] Prof. dr., Liceul Teoretic din Corabia, d.marghidanu@gmail.com

Aplicaţia 2. *Fie $OABC$ un tetraedru tridreptunghic cu vârful O şi $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Atunci $AB^p + BC^p + CA^p > 2(a^p + b^p + c^p)$, $\forall p \in \mathbb{R}, p > 2$.*

Demonstraţie. Cu Propoziţia 1, aplicată la triunghiurile dreptunghice OAB, OBC şi OCA, obţinem relaţiile $AB^p > a^p + b^p$, $BC^p > b^p + c^p$ şi $CA^p > c^p + a^p$ care, adunate, conduc la inegalitatea din enunţ.

2. Vom introduce o noţiune, cu rol decisiv, prin următoarea

Definiţie. Numărul real pozitiv t se numeşte *exponent de triangularitate* al triunghului ABC cu laturi de lungimi a, b, c, dacă tripleta (a^s, b^s, c^s) formează un triunghi pentru orice $s \in \mathbb{R}_+^*$, $s < t$, şi nu formează un triunghi pentru $s \geq t$.

Rezolvarea problemei propuse este dată de

Propoziţia 2. *Sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

1) $t = 2$, *dacă triunghiul este dreptunghic;*

2) $t \in (1, 2)$, *dacă este obtuzunghic;*

3) $t > 2$, *dacă este ascuţiunghic; în acest caz, t este număr real (finit), dacă triunghiul nu-i isoscel sau dacă este isoscel şi unghiul opus bazei sale este strict mai mare de $60°$ şi $t = +\infty$, dacă triunghiul este isoscel şi are unghiul opus bazei mai mic sau egal ca $60°$.*

Demonstraţie. Fie ABC cu $a = \max\{a, b, c\}$. Considerăm funcţia continuă $f(x) = a^x - b^x - c^x, x > 0$.

1) Triunghiul fiind dreptunghic, avem $a^2 = b^2 + c^2$. Conform Corolarului de mai sus, deducem că $t = 2$.

2) În acest caz, $f(1) = a - b - c < 0$ şi $f(2) = a^2 - b^2 - c^2 > 0$ (triunghiul ABC fiind obtuzunghic). Rezultă că există o valoare $t\in(1, 2)$ (unică, conform Propoziţiei 1) astfel încât $f(t) = 0$, adică $a^t = b^t + c^t$. Din nou apelând la Corolar, deducem că t este exponentul de triangularitate al triunghiului.

3) Avem $f(2) = a^2 - b^2 - c^2 < 0$ (triunghi ascuţiunghic) şi $f(\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} a^x \left[1 - \left(\frac{b}{a}\right)^x - \left(\frac{c}{a}\right)^x\right] = +\infty$, dacă triunghiul nu-i isoscel sau dacă este isoscel şi baza sa este mai mare ca laturile sale (echivalent, măsura unghiului din vârf este strict cuprinsă între $60°$ şi $90°$). Deci, există $t \in (2, \infty)$ unic astfel încât $a^t = b^t + c^t$. Conchidem că t astfel găsit este exponentul de triangularitate în subcazul considerat.

În sfârşit, dacă triunghiul este isoscel cu baza mai mică sau cel mult egală cu laturile sale (echivalent, unghiul din vârf are măsura mai mică sau cel mult $60°$), atunci se constată direct că puterile de exponent α ale laturilor acestuia formează un triunghi de acelaşi tip, oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{R}$. Aşadar, în acest subcaz avem $t = +\infty$.

Consideraţiile precedente sugerează examinarea triunghiurilor care verifică condiţii ca $a^3 = b^3 + c^3$ (sau $\sqrt{a} = \sqrt{b} + \sqrt{c}$ etc.), aşa cum s-a făcut în cazul triunghiurilor dreptunghice ($a^2 = b^2 + c^2$) sau altor triunghuiuri speciale (triunghiuri mediane, triunghiuri cu laturi în progresie aritmetică etc.).

Bibliografie

1. **O. Bottema, R.Z. Djordjević, R.R. Janić, D.S. Mitrinović, P.M. Vasić** – *Geometric inequalities*, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1969.