Teorema lui Brouwer - un caz particular elementar

Cornelia-Livia BEJAN[1]

Abstract. By following the ideas developed by T. Traynor in [**2**], an elementary proof of Brouwer's fixed point theorem is presented for the restricted case of continuously differentiable functions.

Keywords: closed ball, ball, fixed point, continuously differentiable function.

MSC 2000: 54H25.

Teorema de punct fix a lui Brouwer are o istorie lungă. Ideile ce conduc la demonstraţia acesteia se găsesc la *Henri Poincaré* înainte de 1886. *L.E.J. Brouwer* a demonstrat teorema pentru $n = 3$ în 1909. În 1910 *J. Hadamard* dă prima demonstraţie pentru n arbitrar, iar Brouwer dă o alta în 1912.

În [**2**], autorul a dat o prezentare elementară a teoremei de punct fix a lui Brouwer. În această notă, adaptând demonstraţia elementară dată în [**2**], ne propunem să prezentăm un caz particular al teoremei lui Brouwer, într-o formă şi mai accesibilă profesorilor şi studenţilor.

Peste tot vom nota cu D discul unitate din plan şi cu $\mathcal{C}$ frontiera sa, adică cercul. Teorema de punct fix a lui Brouwer afirmă că *orice aplicaţie continuă $f : D \to D$ admite măcar un punct fix, adică există măcar un element $x \in D$ astfel încât $f(x) = x$.* Altfel spus, dacă deformăm în mod continuu discul unitate în el însuşi, atunci există măcar un punct care nu-şi schimbă poziţia.

Vom prezenta un caz particular al acestei teoreme (ipoteze întărite) şi anume:

Teoremă. *Dacă $f : D \to D$ este o funcţie cu derivatele de ordinul întâi continue, atunci ea admite măcar un punct fix.*

Lemă. *Nu există nici o aplicaţie $f : D \to \mathcal{C}$ cu derivatele de ordinul întâi continue care să lase fixe toate punctele cercului, adică $f(x) = x$, $\forall x \in \mathcal{C}$.*

Demonstraţie. Presupunem că ar exista o astfel de aplicaţie f şi notăm $g(x) = f(x) - x$, $\forall x \in D$. Constatăm că g este o funcţie cu derivatele de ordin întâi continue şi, în consecinţă, majorate (în normă) de o constantă k. Din teorema valorii medii avem $\|g(x) - g(y)\| \leq k\|x - y\|$, $\forall x, y \in D$, adică distanţa între $g(x)$ şi $g(y)$ este majorată de distanţa dintre punctele x şi y, multiplicată cu k.

Definim aplicaţia $f_t(x) = x + t \cdot g(x) = (1 - t)x + tf(x)$, $\forall t \in [0, 1]$. Se verifică faptul că f_t lasă fixe punctele cercului, $\forall t \in [0, 1]$. Arătăm că f_t este injectivă pentru $0 \leq t < \frac{1}{k}$. Într-adevăr, dacă $f_t(x) = f_t(y)$, atunci $\|x - y\| = t\|g(x) - g(y)\| \leq tk\|x - y\|$, de unde obţinem $x = y$ întrucât $tk < 1$.

În plus, pentru fiecare $t \in [0, 1]$ fixat, avem $f_t'(x) = I + tg'(x)$, unde I este aplicaţia identică a planului. Pentru $0 \leq t < \frac{1}{k}$ se vede că aplicaţia f_t duce discul D în el însuşi, adică $f_t(D) = D$. În continuare să scriem:

$$\pi = Aria(D) = Aria(f_t(D)) = \int_D \det f_t'(x)dx, \ 0 \leq t < \frac{1}{k}.$$

[1]Prof.dr., Catedra de matematică, Univ. Tehnică "Gh. Asachi", Iaşi

Deci membrul drept al relaţiei precedente este constant în raport cu t. Mai mult, cantitatea de sub integrală fiind un polinom în t, rezultă că prin integrare se obţine tot un polinom în t. Din faptul că membrul drept este pe de o parte o constantă şi pe de altă parte un polinom în t, urmează că valoarea sa este o constantă pentru orice $t \in [0,1]$, nu numai pentru $t \in [0, \frac{1}{k})$. Trecând la limită pentru $t \to 1$ în relaţia precedentă şi ţinând cont de $f(D) = \mathcal{C}$, găsim:

$$\pi = Aria\, D = \lim_{t \to 1} Aria(f_t(D)) = Aria(f(D)) = Aria\, \mathcal{C} = 0,$$

ceea ce este fals. Contradicţia ne arată că Lema este adevărată.

Demonstraţia Teoremei. Presupunem că aplicaţia din ipoteza teoremei nu are puncte fixe. Atunci din inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz se obţine

$$f(x) \cdot x \leq \|x\| \|f(x)\| \leq 1, \quad \forall x \in D.$$

Egalitatea s-ar atinge când x şi $f(x)$ ar fi liniar dependente. Cum membrul drept ≤ 1, dacă membrul stâng $f(x) \cdot x$ ar fi $= 1$, am avea egalitate, în care caz am avea $f(x) = \alpha x$ cu $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $\|x\| = 1$. Deci $\alpha = \alpha x \cdot x = 1$, de unde $f(x) = \alpha x = x$; deducem că f ar avea puncte fixe, ceea ce contrazice presupunerea făcută. În concluzie, egalitatea nu se atinge şi deci avem $x \cdot f(x) < 1$, $\forall x \in D$.

Construim o aplicaţie $h(x) = x - \dfrac{1 - x \cdot x}{1 - x \cdot f(x)} f(x)$, $\forall x \in D$. Această aplicaţie este bine definită întrucât $1 - x \cdot f(x) > 0$. Evident, aplicaţia f are derivatele de ordinul întâi continue, iar $h(x) = x$, $\forall x \in \mathcal{C}$. Pe de altă parte, avem:

Caz 1. Dacă $(x \cdot f(x))x = (x \cdot x) f(x)$, atunci

$$h(x) = \frac{x - (x \cdot f(x))x - f(x) + (x \cdot x) f(x)}{1 - x \cdot f(x)} = \frac{x - f(x)}{1 - x \cdot f(x)} \neq 0,$$

deoarece am presupus că f nu are puncte fixe.

Caz 2. Dacă $(x \cdot f(x))x \neq (x \cdot x) f(x)$ rezultă că x şi $f(x)$ nu sunt liniar dependente. După modul cum este definită aplicaţia h, deducem că $h(x) \neq 0$ căci în caz contrar x şi $f(x)$ ar fi liniar dependente.

În concluzie, constatăm că h nu se anulează şi deci putem defini o aplicaţie $H(x) = \dfrac{h(x)}{\|h(x)\|}$, $\forall x \in D$. Se vede că $H : D \to \mathcal{C}$ are derivatele de ordin întâi continue şi fixează punctele cercului, adică $H(x) = x$, $\forall x \in \mathcal{C}$. În baza Lemei, însă, am ajuns la o absurditate, întrucât o astfel de aplicaţie H nu există. Demonstraţia este încheiată.

Observaţie. O generalizare de la plan la spaţiul cu n dimensiuni se face urmând pas cu pas calea parcursă mai sus. În liceu, elevii întâlnesc teorema lui Brouwer în cazul unidimensional: *o funcţie* $f : [0,1] \to [0,1]$ *continuă are cel puţin un punct fix.*

Bibliografie

1. **L.E.J. Brouwer** - *Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann., 71(1912), 97-115.
2. **T. Traynor** - *An Easy Analitic Proof of Brouwer's Fixed Point Theorem*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, XLIV (1996), 479-483.