

Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G176. Fie $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$, cu $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = 1$. Arătați că $\frac{1}{a_1^3 + a_2^2} + \frac{1}{a_2^3 + a_3^2} + \dots + \frac{1}{a_n^3 + a_1^2} < \frac{1}{2}$.

Angela Țigăeru, Suceava

G177. Fie $k > 0$ și $a, b, c \in [0, +\infty)$ astfel încât $a + b + c = 1$. Demonstrați că $\frac{a}{a^2 + a + k} + \frac{b}{b^2 + b + k} + \frac{c}{c^2 + c + k} \leq \frac{9}{9k + 4}$.

Titu Zvonaru, Comănești

G178. Dacă $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, arătați că $\frac{1-n}{n} \leq \{nx\} - \{x\} \leq \frac{n-1}{n}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Gheorghe Iurea, Iași

G179. Determinați numerele prime a, b, c, d și numărul $p \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a^{2^p} + b^{2^p} + c^{2^p} = d^{2^p} + 3$.

Cosmin Manea și Dragoș Petrică, Pitești

G180. Aflați restul împărțirii numărului $S = 2010^{2009!} + 2009^{2008!} + \dots + 2^{1!} + 1^{0!}$ prin 41.

Răzvan Ceucă, elev, Iași

G181. Fie $k \geq 1$ un număr natural dat. Arătați că există o infinitate de numere naturale n astfel încât n^k divide $n!$.

Marian Tetiva, Bârlad

G182. Se consideră triunghiul ABC și punctele $M \in [AB]$, $N \in [BC]$, $P \in [CA]$ astfel încât $MP \parallel BC$, iar $MN \parallel AC$. Fie $\{Q\} = AN \cap MP$ și $\{T\} = BP \cap MN$. Demonstrați că $\mathcal{A}_{AMN} = \mathcal{A}_{PTN} + \mathcal{A}_{QPC}$.

Andrei Răzvan Băleanu, elev, Motru

G183. Se consideră triunghiul isoscel ABC , cu $AB = AC$ și $m(\hat{A}) < 30^\circ$. Știind că există $D \in [AB]$ și $E \in [AC]$ astfel încât $AD = DE = EC = BC$, determinați măsura unghiului \hat{A} .

Vasile Chiriac, Bacău

G184. În planul xOy , considerăm punctele A_{ij} de coordonate (i, j) , unde $i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Fie \mathcal{P} mulțimea pătratelor care au toate vârfurile printre punctele A_{ij} considerate. Aflați lungimea minimă a unui drum care parcurge numai laturi ale pătratelor din \mathcal{P} și care unește punctele A_{00} și A_{44} .

Claudiu Ștefan Popa, Iași

G185. Arătați că există o colorare a planului cu n culori, unde $n \geq 2$ este un număr natural dat, astfel încât orice segment din plan să conțină puncte colorate cu fiecare dintre cele n culori.

Paul Georgescu și Gabriel Popa, Iași

B. Nivel liceal

L176. Fie D, E, F proiecțiile centrului de greutate G al triunghiului ABC pe dreptele BC, CA , respectiv AB . Arătați că cevienele AD, BE și CF sunt concurente dacă și numai dacă triunghiul este isoscel.

Temistocle Bîrsan, Iași

L177. Considerăm triunghiul ABC , G centrul său de greutate, iar L punctul de intersecție al simedianelor. Notăm cu M și N proiecțiile lui G pe bisectoarea interioară și pe cea exterioară ale unghiului \hat{A} , iar P și Q sunt proiecțiile lui L pe bisectoarele interioară, respectiv exterioară, ale unghiului \hat{A} . Demonstrați că dreptele GK, MN și PQ sunt concurente.

Titu Zvonaru, Comănești

L178. Fie $ABCD$ un romb de latură 1 și punctele $A_1 \in (AB)$, $B_1 \in (BC)$, $C_1 \in (CD)$, $D_1 \in (DA)$. Demonstrați că $A_1B_1^2 + B_1C_1^2 + C_1D_1^2 + D_1A_1^2 \geq 2\sin^2 A$.

Neculai Roman, Mircești, Iași

L179. Demonstrați că în orice triunghi are loc inegalitatea

$$\frac{2(9R^2 - p^2)}{9Rr} \geq \frac{\cos^2 A}{\sin B \sin C} + \frac{\cos^2 B}{\sin C \sin A} + \frac{\cos^2 C}{\sin A \sin B} \geq 1.$$

I.V. Maței și Dorel Băițan, București

L180. Determinați numărul minim de factori din produsul $P = \sin \frac{\pi}{4^n} \cdot \sin \frac{2\pi}{4^n} \cdot \sin \frac{3\pi}{4^n} \cdot \dots \cdot \sin \frac{(2^{2n-1} - 1)\pi}{4^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $P < 10^{-9}$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

L181. Fie P un punct de pe frontiera circulară a unui semidisc, iar d tangenta în P la această frontieră. Notăm cu \mathcal{C} corpul de rotație care se obține prin rotirea semidiscului în jurul dreptei d . Studiați variația volumului lui \mathcal{C} , funcție de poziția punctului P .

Paul Georgescu și Gabriel Popa, Iași

L182. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere întregi cu proprietatea că $x_{n+2} - 5x_{n+1} + x_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că, dacă un termen al șirului se divide cu 22, atunci o infinitate de termeni au această proprietate.

Marian Tetiva, Bârlad

L183. Considerăm numerele $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ și polinomul $p(X) = X^2 + aX + 1$. Arătați că există un polinom cu coeficienți întregi q_n și un număr întreg b_n , astfel încât $p(X)q_n(X) = X^{2n} + b_nX^n + 1$.

Marian Tetiva, Bârlad

L184. Arătați că funcția $f : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$, $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + 2xy - x - 3y + 2}{2}$, este bijectivă.

Silviu Boga, Iași

L185. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că $|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq |x-y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Arătați că $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ dacă și numai dacă $\lim_{x \rightarrow 0} xf(x) = 0$.

Adrian Zahariuc, student, Princeton

Training problems for mathematical contests

A. Junior highschool level

G176. Let $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$, with $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = 1$. Prove that

$$\frac{1}{a_1^3 + a_2^2} + \frac{1}{a_2^3 + a_3^2} + \dots + \frac{1}{a_n^3 + a_1^2} < \frac{1}{2}.$$

Angela Țigăeru, Suceava

G177. Let $k > 0$ and $a, b, c \in [0, +\infty)$ such that $a + b + c = 1$. Prove that

$$\frac{a}{a^2 + a + k} + \frac{b}{b^2 + b + k} + \frac{c}{c^2 + c + k} \leq \frac{9}{9k + 4}.$$

Titu Zvonaru, Comănești

G178. If $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, show that $\frac{1-n}{n} \leq \{nx\} - \{x\} \leq \frac{n-1}{n}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Gheorghe Iurea, Iași

G179. Determine the prime numbers a, b, c, d and the number $p \in \mathbb{N}^*$, so that $a^{2^p} + b^{2^p} + c^{2^p} = d^{2^p} + 3$.

Cosmin Manea and Dragoș Petrică, Pitești

G180. Find the remainder of the division of $S = 2010^{2009!} + 2009^{2008!} + \dots + 2^{1!} + 1^{0!}$ by 41.

Răzvan Ceucă, hight-school student, Iași

G181. Let $k \geq 1$ be a given natural number. Show that there are infinitely many natural numbers n such that n^k divides $n!$.

Marian Tetiva, Bârlad

G182. The triangle ABC is considered with the points $M \in [AB]$, $N \in [BC]$, $P \in [CA]$ such that $MP \parallel BC$ and $MN \parallel AC$. Let $\{Q\} = AN \cap MP$ and $\{T\} = BP \cap MN$. Prove that $\mathcal{A}_{AMN} = \mathcal{A}_{PTN} + \mathcal{A}_{QPC}$.

Andrei Răzvan Băleanu, hight-school student, Motru

G183. Let ABC be an isosceles triangle, with $AB = AC$ și $m(\hat{A}) < 30^\circ$. Knowing that the points $D \in [AB]$ and $E \in [AC]$ exist such that $AD = DE = EC = BC$, determine the measure of the angle \hat{A} .

Vasile Chiriac, Bacău

G184. The points A_{ij} of coordinates (i, j) are considered in the plane xOy , where $i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Let \mathcal{P} be the set of the squares with their vertices among the considered points A_{ij} . Find the minimum length of a path consisting of square sides only, which joins the points A_{00} and A_{44} .

Claudiu Ștefan Popa, Iași

G185. Show that there exists a coloring of the plane by n colours, where $n \geq 2$ is a given natural number, so that any line segment in the plane contains points colored by each of the n colours.

Paul Georgescu and Gabriel Popa, Iași

B. Highschool Level

L176. Let D, E, F be the projections of the centroid G of the triangle ABC onto the lines BC, CA , and respectively AB . Show that the Cevian lines AD, BE and CF meet at a unique point if and only if the triangle is isosceles.

Temistocle Bîrsan, Iași

L177. We consider the triangle ABC with its centroid G and Lemoine's point L . Denote by M and N the projections of G onto the interior and exterior bisector lines of angle A and let P and Q be the projections of L on the interior and respectively exterior bisector lines of angle A . Prove that the lines GK, MN and PQ meet at the same point.

Titu Zvonaru, Comănești

L178. Let $ABCD$ be a rhombus with its side length $\ell = 1$ and the points $A_1 \in (AB), B_1 \in (BC), C_1 \in (CD), D_1 \in (DA)$. Prove that $A_1B_1^2 + B_1C_1^2 + C_1D_1^2 + D_1A_1^2 \geq 2\sin^2 A$.

Neculai Roman, Mircești, Iași

L179. Prove that the following inequality holds in any triangle:

$$\frac{2(9R^2 - p^2)}{9Rr} \geq \frac{\cos^2 A}{\sin B \sin C} + \frac{\cos^2 B}{\sin C \sin A} + \frac{\cos^2 C}{\sin A \sin B} \geq 1.$$

I.V. Maftai and Dorel Băițan, București

L180. Determine the minimum number of factors in the product $P = \sin \frac{\pi}{4^n} \cdot \sin \frac{2\pi}{4^n} \cdot \sin \frac{3\pi}{4^n} \cdot \dots \cdot \sin \frac{(2^{2n-1} - 1)\pi}{4^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, so that $P < 10^{-9}$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

L181. Let P be a point on the circular boundary of a half-disc, and d the tangent at P to this boundary. Denote by \mathcal{C} the rotation body obtained by the rotation of the half-disc around the line d . Study the variation of the volume of \mathcal{C} as a function of the position of point P .

Paul Georgescu and Gabriel Popa, Iași

L182. Let $(x_n)_{n \geq 1}$ be a sequence of integer numbers with the property that $x_{n+2} - 5x_{n+1} + x_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Show that if a term of the sequence is divisible by 22 then infinitely many terms there of have this property.

Marian Tetiva, Bârlad

L183. Let us consider the numbers $a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$ and the polynomial $p(X) = X^2 + aX + 1$. Show that there exist a polynomial with integer coefficients q_n and an integer number b_n such that $p(X)q_n(X) = X^{2n} + b_nX^n + 1$.

Marian Tetiva, Bârlad

L184. Show that the function $f: \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*, f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + 2xy - x - 3y + 2}{2}$, is bijective.

Silviu Boga, Iași

L185. Let $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a function with the property that $|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq |x-y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Show that $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ if and only if $\lim_{x \rightarrow 0} xf(x) = 0$.

Adrian Zahariuc, student, Princeton