Probleme propuse[1]

Clasele primare

P.184. Vreau să pun într-o cutie bile albe şi verzi, în total 10, astfel încât bile albe să fie cel mult 6. În câte moduri pot face acest lucru?
(*Clasa I*) **Inst. Maria Racu, Iaşi**

P.185. Ce literă urmează în înşiruirea logică VKUJT...?
(*Clasa I*) **Andreea Amarandei, studentă, Iaşi**

P.186. Completaţi dreptunghiurile de mai jos cu numere aşa încât suma numerelor scrise în oricare trei dreptunghiuri alăturate să fie aceeaşi. Ce observaţi?

35		65				35

(*Clasa a II-a*) **Alexandru Chiriac, student, Iaşi**

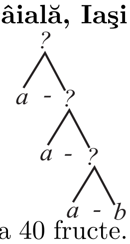
P.187. Şoricelul Chiţ a primit un zar de la mătuşa Miţ. El a aruncat zarul de patru ori, obţinând în total 21 de puncte. Ştiind că la primele două aruncări a obţinut în total 9 puncte, aflaţi cât a obţinut la fiecare aruncare. (Găsiţi toate posibilităţile!)
(*Clasa a II-a*) **Ioana Maria Popa, elevă, Iaşi**

P.188. În exerciţiul $a + a : a = \ldots$, există o valoare a lui a pentru care putem să efectuăm operaţiile în ordinea scrisă, fără a modifica rezultatul?
(*Clasa a III-a*) **Ionela Bărăgan, studentă, Iaşi**

P.189. Aflaţi numărul natural a ştiind că, dacă se împarte 25 la $8 - 3 \times a$, se obţine restul 1.
(*Clasa a III-a*) **Mariana Nastasia, elevă, Iaşi**

P.190. În grădina casei mele sunt câţiva pomi. Dacă ar fi de patru ori mai mulţi decât sunt, atunci ar depăşi numărul 20 cu atât cât lipseşte, de fapt, pentru a fi 20. Câţi pomi sunt în grădină?
(*Clasa a III-a*) **Inst. Dumitru Pârâială, Iaşi**

P.191. Compuneţi o problemă care să se rezolve după schema alăturată, cu numerele a şi b convenabil alese.
(*Clasa a III-a*) **Amalia Cantemir, elevă, Iaşi**



P.192. Bunica are mere şi pere. Dacă mi-ar da un sfert din numărul merelor şi o optime din numărul perelor, aş avea 35 de fructe. Dacă mi-ar da o optime din numărul merelor şi o pătrime din numărul perelor, aş avea 40 fructe. Câte fructe are bunica?
(*Clasa a IV-a*) **Mihaela Gâlcă, elevă, Iaşi**

P.193. Mai multe perechi, formate din câte o fată şi câte un băiat, culeg alune. În fiecare pereche, alunele culese de băiat sunt fie de patru ori mai multe, fie de patru ori mai puţine decât cele culese de fată. Numărul alunelor culese împreună de fete şi de băieţi poate fi 2009? Dar 2010?
(*Clasa a IV-a*) **Mihaela Obreja şi Ioan Lungu, Vaslui**

[1]Se primesc soluţii până la data de 31 decembrie 2010.

P.194. Arătaţi că există un singur şir format din zece numere naturale consecutive astfel încât suma a opt dintre numere să fie egală cu dublul sumei celorlaltor două.

(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

P.195. Trei fraţi, Ionuţ, Andrei şi Mihai, primesc lunar câte o aceeaşi sumă de bani de la bunicul lor. Pe ascuns, bunica le dă şi ea aceeaşi sumă. Odată, unul dintre cei trei a spart un geam. Bunicul, crezându-l vinovat pe Ionuţ, a împărţit banii cuveniţi lui celorlalţi doi. Bunica a procedat la fel, însă a crezut că cel vinovat este Mihai. Andrei, ştiind că el a spart geamul, a împărţit jumătate din suma sa celor doi fraţi şi a constatat că rămâne cu 60 de lei mai puţin decât Ionuţ şi Mihai la un loc. Ce sumă de bani primea fiecare nepot de la bunicul?

(*Clasa a IV-a*) **Cosmin Şerbănescu, student, Iaşi**

Clasa a V-a

V.116. Se consideră numărul $a = (2^n \cdot 5^{n+1} + 4) : 36$, $n \in \mathbb{N}^*$. Determinaţi valorile lui n pentru care a este număr natural, a cărui scriere în baza 10 are toate cifrele distincte.

Andrei Nedelcu, Iaşi

V.117. Arătaţi că $A = 6^{1001}$ se poate scrie ca diferenţa a două pătrate perfecte.

Damian Marinescu, Târgovişte

V.118. Determinaţi numerele naturale a şi n pentru care $a^{2n} - 9 = 8(9 + 9^2 + 9^3 + \ldots + 9^{2009})$.

Gabriela Popa, Iaşi

V.119. Fie $n \in \mathbb{N}$ un număr a cărui scriere în baza 10 este de forma $\overline{\ldots 55}$.

a) Arătaţi că $(n - 5)(n + 5)$ se divide cu 1000.

b) Aflaţi ultimele trei cifre ale lui n^2.

Mihai Crăciun, Paşcani

V.120. Considerăm numărul natural $a = \overline{12345\ldots 9899}$. Aflaţi restul împărţirii lui a prin 45.

Elena Iurea, Iaşi

V.121. Arătaţi că $\dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dfrac{2}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots + \dfrac{2010}{2011 \cdot 2012 \cdot 2013} < \dfrac{1}{4}$.

Tinuţa Bejan, Iaşi

V.122. Câte fracţii ireductibile de forma $\dfrac{\overline{20xy}}{\overline{2y}}$ există?

Diana Gregoretti, Galaţi

Clasa a VI-a

VI.116. Se consideră unghiul $\widehat{AOB}$ cu măsura de $126°$ şi semidrepte $(OM_1, (OM_2, \ldots, (OM_{n-1}$ interioare lui, astfel încât interioarele unghiurilor $\widehat{AOM_1}$, $\widehat{M_1OM_2}$, $\ldots$, $\widehat{M_{n-1}OB}$ sunt disjuncte două câte două, iar $m(\widehat{AOM_1}) = 2°$, $m(\widehat{M_1OM_2}) = (2^2)°$, $\ldots, m(\widehat{M_{n-1}OB}) = (2^n)°$. Dacă $(OM$ este bisectoarea unghiului $\widehat{AOM_4}$, determinaţi măsura complementului lui $\widehat{AOM}$.

Cătălina Drăgan, Galaţi

VI.117. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC, iar $x = m(\widehat{BIC}) - m(\widehat{A})$, $y = m(\widehat{AIC}) - m(\widehat{B})$, $z = m(\widehat{AIB}) - m(\widehat{C})$. Arătaţi că numerele x, y şi z sunt măsurile unghiurilor unui triunghi ascuţitunghic.

Constantin Apostol, Rm. Sărat

VI.118. În triunghiul isoscel ABC, cu $m(\widehat{A}) = 120°$, se notează cu D mijlocul laturii $[AB]$. Perpendiculara din D pe BC intersectează dreptele AC şi BC în E, respectiv F. Bisectoarea unghiului $\widehat{DEA}$ taie BC în G. Arătaţi că $BC = 4 \cdot FG$.

Cătălin Budeanu, Iaşi

VI.119. Un număr natural N se termină în 0 şi are exact 323 de divizori. Aflaţi ultimele 16 cifre ale numărului N.

Mirela Obreja, Vaslui

VI.120. Demonstraţi că numărul $A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 2010^2 - 2000$ se divide cu 3.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

VI.121. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere naturale consecutive. Arătaţi că suma $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ se divide cu n dacă şi numai dacă n este număr impar.

Andrei Paşa, elev, Iaşi

VI.122. Vom spune că un număr natural este *anti-Goldbach* dacă poate fi scris ca sumă de două numere compuse. Determinaţi toate numerele anti-Goldbach.

Ionel Nechifor, Iaşi

Clasa a VII-a

VII.116. Calculaţi suma $S = \left|\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right| + \left|\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right| + \ldots + \left|\frac{2008}{2009} - \frac{2009}{2010}\right|$.

Daniela Munteanu, Iaşi

VII.117. Fie x, y numere reale astfel încât $x > 2011$, iar $xy = x + y$. Arătaţi că partea fracţionară a lui y este mai mică decât $\frac{1}{2010}$.

Claudiu Ştefan Popa, Iaşi

VII.118. Arătaţi că $x^{2010} + 1 \geq x^{1010} + x^{1000}, \forall x \in \mathbb{R}$. Când se atinge egalitatea?

Cătălin Melinte, student, Iaşi

VII.119. Considerăm numărul natural $A = 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Demonstraţi că A se divide cu 8, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Determinaţi $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care A se divide cu 40.

Ciprian Baghiu, Iaşi

VII.120. Un poligon are 170 de diagonale. Măsurile unghiurilor sale se exprimă, în grade, prin numere naturale impare. Demonstraţi că poligonul are cel puţin două unghiuri congruente.

Cătălin Budeanu, Iaşi

VII.121. În triunghiul ascuţitunghic ABC, notăm cu X, Y şi Z mijloacele înălţimilor $[AA']$, $[BB']$, respectiv $[CC']$ şi cu M, N şi P mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, respectiv $[AB]$. Demonstraţi că dreptele XM, YN şi ZP sunt concurente.

Doru Buzac, Iaşi

VII.122. Se consideră dreptunghiul $ABCD$, cu $AB = 1$ şi $AD = 1 + \sqrt{3}$, iar M este un punct interior dreptunghiului, astfel încât $m(\widehat{MDC}) = m(\widehat{MCD}) = 75°$. Arătaţi că triunghiul MAB este echilateral.

Dumitru Mihalache, Bârlad

Clasa a VIII-a

VIII.116. Raportăm planul la un reper cartezian xOy. Determinaţi mulţimea punctelor $M(x, y)$ din plan, pentru care $2\sqrt{x^2 - y^2} = x + y$.

Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă, Blaj

VIII.117. Numerele reale pozitive x, y, z sunt astfel încât $xy = z+1$ şi $\frac{x}{z+1}+y = 2$. Demonstraţi că $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} \geq 3$. Când se atinge egalitatea?

Gheorghe Molea, Curtea de Argeş

VIII.118. Fie x, y, z numere reale astfel încât $x^2 + 5yz \geq 6$, $y^2 + 5zx \geq 6$ şi $z^2 + 5xy \geq 6$. Aflaţi valoarea minimă a lui $|x + y + z|$.

Dan Nedeianu, Drobeta-Tr. Severin

VIII.119. Determinaţi $x \in \left[0, \frac{5}{4}\right]$ şi $y \in \left[-\frac{5x}{2}, \frac{x}{2}\right]$ pentru care

$$\sqrt{(7 - 2x)(5x + 2y)} + \sqrt{(x - 2y)(5 - 4x)} = 6.$$

Liviu Smarandache şi Lucian Tuţescu, Craiova

VIII.120. Rezolvaţi în numere naturale ecuaţia $x + 2y + 3z = 4xyz - 5$.

Titu Zvonaru, Comăneşti

VIII.121. Demonstraţi că nu putem alege trei puncte necoliniare A, B, C, de aceeaşi parte a unui plan α, astfel încât dreptele AB, BC şi CA să formeze cu planul α unghiuri de aceeaşi măsură nenulă.

Petru Asaftei, Iaşi

VIII.122. În fiecare pătrăţel al unei table de şah este scris câte un număr natural. Fiecare număr n de pe tablă apare de câte n ori, iar pe primul rând al tablei apar, ordonat strict crescător, toate numerele folosite.

a) Arătaţi că, dintre cele opt numere de pe primul rând, cel mult şase sunt pare.

b) Determinaţi cel mai mare număr care poate apărea pe tablă.

c) Arătaţi că există o singură modalitate de alegere a numerelor care apar pe tablă, pentru care produsul numerelor de pe primul rând este impar.

Silviu Boga, Iaşi

Clasa a IX-a

IX.106. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor p şi q, unde

$$p : (\exists a \in \mathbb{Z})(\exists n \in \mathbb{N}^*)(a^4 + 1 = 3^n); \quad q : (\exists a \in \mathbb{Z})(\exists n \in \mathbb{N})(a^4 - 1 = 3^n).$$

Dan Popescu, Suceava

IX.107. Dacă $a, b \in \mathbb{N}^*$, atunci $\left|\frac{3a+4b}{2a+3b} - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{4}\left|\frac{a+2b}{a+b} - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{16}\left|\frac{a}{b} - \sqrt{2}\right|$.

Mihail Bencze, Braşov

IX.108. Dacă $a \in (0,1)$, demonstraţi că $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{4}{(a+1)^2}\right) \geq \frac{4}{(a+1)^2}$, pentru orice $b \in (0, \infty)$.

Ovidiu Pop, Satu Mare

IX.109. Demonstraţi că $\operatorname{tg} x > 4 \sin x - 2$, oricare ar fi $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ionuţ Ivănescu, Craiova

IX.110. În $\triangle ABC$, cu notaţiile uzuale, arătaţi că $OI \perp OI_a \Leftrightarrow m(\widehat{A}) = 60°$.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Clasa a X-a

X.106. Cele $m \times n$ pătrăţele ale unui dreptunghi cu m linii şi n coloane se colorează cu p culori, unde $m < p < n$. Spunem că o colorare are o *tăietură* dacă, pe una dintre cele n coloane, toate cele m pătrăţele au aceeaşi culoare. Determinaţi numărul colorărilor care au k tăieturi, unde $0 \leq k \leq n$. (*În legătură cu problema 2, OJM 2006.*)

Cecilia Deaconescu, Piteşti

X.107. Se consideră variabila aleatoare $X : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix}$, unde $p, q \in (0,1)$, $p \neq q$. Arătaţi că variabilele aleatoare $|X - M(X)|$ şi $(X - M(X))^2$ sunt dependente.

Laurenţiu Modan, Bucureşti

X.108. Dacă $a, b, c \in (1, \infty)$, demonstraţi că are loc inegalitatea

$$(\log_b a + \log_c a) \cdot (\log_a b + \log_c b)(\log_a c + \log_b c) \geq 8 \log_{\frac{b+c}{2}} a \cdot \log_{\frac{c+a}{2}} b \cdot \log_{\frac{a+b}{2}} c.$$

Lucian Tuţescu, Craiova

X.109. Se consideră mulţimile nedisjuncte A şi B şi funcţiile $f : A \to (0, \infty)$, $g : B \to (0,1)$. Determinaţi numărul $a \in (0,1) \cup (1, \infty)$ pentru care $a^{f(x)\cdot g(x)} + \log_a g(x) \geq a^{f(x)}$, $\forall x \in A \cap B$.

Mihai Haivas, Iaşi

X.110. Fie $D = \{z = x + iy | y > 0\}$ mulţimea numerelor complexe din semiplanul superior, iar $D' = \{z = x + iy | x^2 + y^2 < 1\}$ discul unitate (fără frontieră). Dacă $z_0 \in D$ este fixat, arătaţi că funcţia $f : D \to D'$, $f(z) = \frac{z - z_0}{z - \overline{z}_0}$ este bijectivă.

Adrian Corduneanu, Iaşi

Clasa a XI-a

XI.106. Dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, arătaţi că $\det(A^2 + A + I_2) + \det(A^2 - A + I_2) \geq \frac{3}{2}$.

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

XI.107. Se dă parabola $y = ax^2 (a > 0)$. În fiecare punct $P(x, y)$ al parabolei, se consideră vectorul tangent $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{i} + 2ax\overrightarrow{j}$ şi vectorul normal $\overrightarrow{PQ'}$, orientat spre exterior, astfel încât $|\overrightarrow{PQ'}| = |\overrightarrow{PP'}|$. Apoi, se consideră vectorul $\overrightarrow{PQ} = \alpha(x) \cdot \overrightarrow{PQ'}$, unde $\alpha(x)$ este o funcţie dată. Determinaţi locul geometric al punctului Q, atunci când P descrie parabola, în fiecare din cazurile:

a) $\alpha(x) = a, \forall x \in \mathbb{R}$; b) $\alpha(x) = -\frac{1}{a}, \forall x \in \mathbb{R}$; c) $\alpha(x) = \frac{1}{2ax}, \forall x \in \mathbb{R}^*$.

Adrian Corduneanu, Iaşi

XI.108. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^{1+\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\ldots+\frac{1}{\ln n}}$.

Cezar Lupu, student, Bucureşti

XI.109. Determinaţi $a, b, c \in (0, \infty)$ pentru care limita $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a}{\sqrt[n]{b}+c}\right)^n$ există şi este finită.

Constantin Chirilă, Iaşi

XI.110. Date funcţiile continue $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sunt echivalente afirmaţiile:

i) $f = g$;

ii) dacă $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă, ecuaţia $f(x) = h(x)$ are soluţii reale atunci şi numai atunci când ecuaţia $g(x) = h(x)$ are soluţii reale.

Marian Tetiva, Bârlad

Clasa a XII-a

XII.106. Pentru $a > 0$ dat, calculaţi $\int \frac{ax+2}{x(a+x^2e^{ax})}dx$, unde $x \in (0, +\infty)$

I.V. Maftei, Bucureşti şi Mihai Haivas, Iaşi

XII.107. Fie $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx$ şi $V_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}dx$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că $U_n = (-1)^n V_n = \frac{\pi}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Gheorghe Costovici, Iaşi

XII.108. Demonstraţi că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_n = \int_1^n \frac{\ln x}{x^p+1}dx, \forall n \geq 1$, unde $p \in (1, \infty)$ este fixat, este convergent.

Rodica Luca Tudorache, Iaşi

XII.109. Fie $(G, \cdot)$ un grup comuativ, cu proprietatea că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât din $x^n = y^n$, $x, y \in G$, rezultă că $x = y$. Dacă f, g sunt endomorfisme ale lui G, arătaţi că ecuaţia $f(x) = g(x^{-1})$ are soluţie unică în G, dacă şi numai dacă funcţia $h : G \to G$, $h(x) = f(x^n) \cdot g(x^n)$ este injectivă.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

XII.110. Fie $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ polinoame neconstante, astfel încât P şi Q au aceleaşi rădăcini, iar $P - 1$ şi $Q - 1$ au şi ele aceleaşi rădăcini. Arătaţi că $P = Q$.

Adrian Reisner, Paris