Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor propuse în nr. 1/2009

A. Nivel gimnazial

G156. *Dacă* $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \le 3$, *demonstraţi că* $\frac{a^2+1}{\sqrt{a^2-a+1}} + \frac{b^2+1}{\sqrt{b^2-b+1}} + \frac{c^2+1}{\sqrt{c^2-c+1}} \ge 6$.

I.V. Maftei, Bucureşti şi Mihai Haivas, Iaşi

Soluţia I (a autorilor). Observăm că $\frac{a^2+1}{\sqrt{a^2-a+1}} = \sqrt{a^2-a+1} + \frac{a}{\sqrt{a^2-a+1}} \ge 2\sqrt{a}$, $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$ şi analog pentru celelalte două fracţii ale sumei din membrul stâng. Rezultă că această sumă este cel puţin egală cu $2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$. Pe de altă parte, $\sqrt{a} \ge \frac{2a}{1+a}$ (inegalitatea $MG \ge MH$, aplicată numerelor a şi 1), deci

$$2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \ge 4\left(\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}\right) \ge$$

$$\ge 36 \cdot \frac{1}{\frac{1+a}{a} + \frac{1+b}{b} + \frac{1+c}{c}} = \frac{36}{3 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \ge \frac{36}{3+3} = 6,$$

de unde inegalitatea din enunţ.

Soluţia a II-a (**Oana Adăscăliţei** şi **Florina Toma, eleve, Iaşi**). Vom face aceeaşi demonstraţie în doi paşi, cu alte argumente. Cum $\sqrt{a(a^2-a+1)} \le \frac{a + a^2 - a + 1}{2} = \frac{a^2+1}{2}$, atunci $\frac{1}{\sqrt{a(a^2-a+1)}} \ge \frac{2}{a^2+1}$, deci $\frac{a^2+1}{\sqrt{a^2-a+1}} \ge 2\sqrt{a}$ şi încă două inegalităţi similare. Apoi, din inegalitatea C-B-S, obţinem că $\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 \le \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(1+1+1)$, de unde $\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \le 3$. Însă $\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}\right)(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \ge 9$, prin urmare $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \ge 3$ şi astfel rezultă inegalitatea din enunţ.

G157. *Spunem că un număr natural are proprietatea* (P) *dacă se poate scrie ca sumă a trei pătrate perfecte nenule şi că are proprietatea* (Q) *dacă se poate scrie ca sumă a patru pătrate perfecte nenule.*

a) Daţi exemple de numere naturale care au: numai proprietatea (P)*; numai proprietatea* (Q)*; atât proprietatea* (P) *cât şi proprietatea* (Q).

b) Dacă $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ *au suma pară şi oricare dintre ele este diferit de suma celorlaltor două, demonstraţi că numărul* $a^2 + b^2 + c^2$ *are proprietatea* (Q).

Ovidiu Pop, Satu Mare

Soluţie. a) $6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$ are numai proprietatea (P), $7 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2$ are numai proprietatea (Q), iar $30 = 1^2 + 2^2 + 5^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$ are şi proprietatea (P), şi proprietatea (Q).

b) Cum suma şi diferenţa au aceeaşi paritate, concluzia problemei rezultă din identitatea $a^2+b^2+c^2=\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2+\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b+c}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2$.

G158. *Se consideră ecuaţia* $x^2+y^2+z^2=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2, x,y,z\in\mathbb{N}$.

a) *Arătaţi că ecuaţia are o infinitate de soluţii.*

b) *Dacă* (x,y,z) *este soluţie a ecuaţiei, demonstraţi că fiecare dintre numerele* xy, yz, zx *şi* $xy+yz+zx$ *este pătrat perfect.*

Liviu Smarandache, Craiova

Soluţie. a) De exemplu, putem considera $x=1$, $y=a^2$, $z=(a+1)^2$, cu $a\in\mathbb{N}$.

b) Din relaţia din enunţ, obţinem că $(x+y+z)^2=4(xy+yz+zx)$, de unde rezultă că $xy+yz+zx$ este pătrat perfect. Apoi, tot din relaţia din enunţ, rezultă succesiv $x^2+y^2+z^2=2(xy+yz+zx)\Leftrightarrow x^2-2x(y+z)+(y+z)^2-4yz=0\Leftrightarrow(x-y-z)^2=4yz$, deci yz este pătrat perfect. La fel se arată că xy şi zx sunt pătrate perfecte.

G159. *Aflaţi ultimele două cifre ale numerelor* $(70n+6)\cdot 6^{n-1}$, $n\in\mathbb{N}$.

Ion Săcăleanu, Hârlău

Soluţie (Gheorghe Iurea). Notăm $a_n=(70n+6)\cdot 6^{n-1}$, $n\in\mathbb{N}$. Deoarece $a_{n+1}-a_n=50(7n+9)\cdot 6^{n-1}=M_{100}$, $n\in\mathbb{N}^*$, rezultă că toate numerele a_n au aceleaşi ultime două cifre. Cum $a_1=76$, deducem că toate numerele considerate se termină în 76.

G160. *Se consideră mulţimile* $A=\{1,2,3,\ldots,2009\}$, $B=\left\{\frac{a}{a+d}+\frac{b}{b+d}+\frac{c}{c+d}\,\middle|\, a,b,c,d\in A,\ a,b,c,d \text{ distincte}\right\}$ *şi* $C=\left\{\frac{d}{a+d}+\frac{d}{b+d}+\frac{d}{c+d}\,\middle|\, a,b,c,d\in A,\ a,b,c,d \text{ distincte}\right\}$. *Determinaţi* $A\cap B\cap C$. *(În legătură cu E: 13650 din G.M. 5-6/2008.)*

Andrei Crăcană, elev, Iaşi

Soluţie. Se constată uşor că, dacă $x=\frac{a}{a+d}+\frac{b}{b+d}+\frac{c}{c+d}\in B$, atunci $3-x\in C$. În cazul în care $x\in A\cap B\cap C$, obţinem că $x\in\{1,2\}$. Vom arăta că $\{1,2\}\subset A\cap B\cap C$ şi astfel va rezulta că $A\cap B\cap C=\{1,2\}$. Pentru $(a,b,c,d)=(14,21,30,42)$, obţinem că $x=1$, deci $1\in B$ şi $3-1=2\in C$. Pentru $(a,b,c,d)=(75,375,875,125)$, avem că $x=2$, prin urmare $2\in B$ şi $3-2=1\in C$ şi astfel rezolvarea problemei este încheiată.

G161. *Fie* M *mulţimea numerelor de forma* $\overline{abc}$, *cu* $a\cdot b\cdot c\neq 0$. *Determinaţi cardinalul maxim al unei submulţimi* N *a lui* M *astfel încât* $x+y\neq 1109$, $\forall x,y\in N$.

Petru Asaftei şi Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Numărul cerut este 405. Cum fiecare dintre cifrele a,b,c este nenulă, cardinalul lui M este $9\cdot 9\cdot 9=729$. Dintre elementele lui M, $9\cdot 9\cdot 1=81$ se termină în 9. Grupăm celelalte elemente (în număr de $729-81=648$) în perechi de forma $(x,1109-x)$, obţinând 324 de perechi. Dacă se consideră o submulţime N a lui M cu cel puţin 406 elemente, cum $324+81=405$, din principiul cutiei rezultă că măcar două dintre elementele lui N aparţin unei aceleiaşi perechi $(x,1109-x)$, deci au suma 1109. Luând câte un element din fiecare dintre perechile considerate, precum şi toate numerele din M care se termină în 9, obţinem o submulţime a lui M de cardinal 405, care verifică proprietatea din enunţ.

G162. *Putem înlocui un triplet de numere întregi* (a, b, c) *cu unul dintre tripletele* $(2b + 2c - a, b, c)$, $(a, 2a + 2c - b, c)$ *sau* $(a, b, 2a + 2b - c)$. *Arătaţi că dacă pornim de la tripletul* $(31329, 24025, 110224)$ *şi efectuăm succesiv asemenea înlocuiri, se obţin mereu triplete formate numai din pătrate perfecte.*

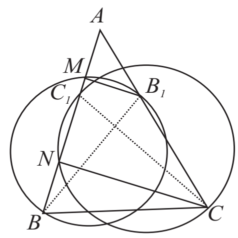
Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Dacă pornim de la un triplet de forma $(x^2, y^2, (x+y)^2)$ şi efectuăm oricare dintre cele trei transformări, obţinem tot triplete de forma $(m^2, n^2, (m+n)^2)$. Într-adevăr, dacă înlocuim x^2 cu $2y^2 + 2(x+y)^2 - x^2 = (x+2y)^2$, atunci $m = x+2y$, $n = -y$; dacă înlocuim y^2 cu $2x^2+2(x+y)^2-y^2 = (2x+y)^2$, putem considera $m = -x$, $n = 2x+y$; în sfârşit, dacă înlocuim $(x+y)^2$ cu $2x^2+2y^2-(x+y)^2 = (x-y)^2$, vom lua $m = x$, $n = -y$. Observăm acum că tripletul iniţial este de forma $(x^2, y^2, (x+y)^2)$, unde $x = 177$, $y = 155$ şi de aici urmează concluzia problemei.

G163. *Fie* ABC *un triunghi cu* $m(\widehat{A}) \neq 90°$ *şi punctele* $B_1 \in (AC)$ *şi* $C_1 \in (AB)$. *Arătaţi că axa radicală a cercurilor de diametre* $[BB_1]$ *şi* $[CC_1]$ *trece prin punctul* A *dacă şi numai dacă* $B_1C_1 \| BC$.

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

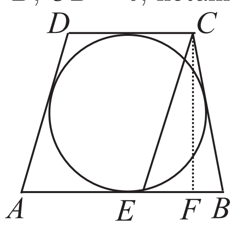
Soluţie. Fie M al doilea punct de intersecţie dintre cercul de diametru $[BB_1]$ şi dreapta AB, iar N proiecţia lui C pe AB. Unghiul $\widehat{BMB_1}$ fiind înscris într-un semicerc, avem că $B_1M \perp AB$, de unde $MB_1 \| NC$, deci $\dfrac{AM}{AN} = \dfrac{AB_1}{AC}$. Atunci: A se află pe axa radicală a celor două cercuri $\Leftrightarrow AM \cdot AB = AC_1 \cdot AN \Leftrightarrow \dfrac{AM}{AN} = \dfrac{AC_1}{AB} \Leftrightarrow \dfrac{AB_1}{AC} = \dfrac{AC_1}{AB} \Leftrightarrow B_1C_1 \| BC$ şi astfel rezolvarea problemei este completă.



G164. *Fie* B, b *numere reale date, cu* $B > b > 0$. *Dintre toate trapezele circumscriptibile care au lungimile bazelor* B *şi* b*, determinaţi-l pe cel de arie maximă.*

Claudiu Ştefan Popa, Iaşi

Soluţie. Fie $ABCD$ trapez circumscriptibil, cu bazele $AB = B$, $CD = b$; notăm $x = BC$, $y = AD$. Vom avea că $B + b = x + y$. Construim $CF \perp AB$, $CE \| AD$, cu $E, F \in AB$. Calculăm $h = CF$ exprimând în două moduri aria triunghiului BCE. Observăm că $CE = y$, $BE = B - b$, iar semiperimetrul $\triangle BCE$ este $\frac{1}{2}[x + y + (B - b)] = \frac{1}{2}[(B + b) + (B - b)] = B$. Din formula lui Heron, $\mathcal{A}_{BCE} = \sqrt{B(B-x)(B-y)(B-(B-b))} = \sqrt{Bb[B^2 - B(x+y) + xy]} = \sqrt{Bb[B^2 - B(B+b) + xy]} = \sqrt{Bb(xy - Bb)}$. Pe de altă parte, $\mathcal{A}_{BCE} = \frac{1}{2} BE \cdot h = \frac{1}{2}(B - b) \cdot h$, prin urmare $h = \dfrac{2\sqrt{Bb(xy - Bb)}}{B - b}$. Cum $\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{1}{2} h(B + b)$, iar lungimile B şi b sunt date, atunci aria trapezului este

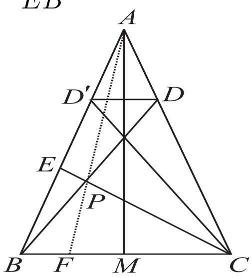


maximă când produsul xy este maxim. Suma $x+y$ fiind constantă (este egală cu $B+b$), produsul xy va fi maxim când $x=y$, deci în cazul trapezului isoscel. Prin calcul direct, înălţimea acestuia este $h=\sqrt{Bb}$.

G165. *Fie ABC un triunghi isoscel ($AB=AC$), M mijlocul laturii $[BC]$, iar P un punct în interiorul triunghiului ABM. Notăm $\{D\}=BP\cap AC$, $\{E\}=CP\cap AB$. Demonstraţi că $BE<CD$ şi $PE<PD$.*

Cristian Pravăţ, Iaşi şi Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Fie $\{F\}=AP\cap BC$ şi $x=\dfrac{BF}{FC}$, $y=\dfrac{CD}{DA}$, $z=\dfrac{AE}{EB}$. Atunci, din teorema lui Ceva, $xyz=1$, iar $x<1$ deoarece $P\in IntABM$. Avem că $BE<CD\Leftrightarrow AB\cdot\dfrac{1}{z+1}<AC\cdot\dfrac{y}{y+1}\Leftrightarrow y+1<yz+y\Leftrightarrow 1<yz$ şi, cum ultima inegalitate este adevărată, rezultă prima parte a concluziei. Fie D' simetricul lui D faţă de AM; trapezul $BCDD'$ este isoscel, deci inscriptibil, iar E se va afla în interiorul cercului circumscris. Deducem că $m(\widehat{DD'C})<m(\widehat{DEC})$, de unde $m(\widehat{PDE})<m(\widehat{PDD'})=m(\widehat{DD'C})<m(\widehat{DEP})$, prin urmare $PE<PD$.



B. Nivel liceal

L156. *Fie M un punct exterior cercului $\mathcal{C}$ de centru O şi rază R. Notăm cu T_1,T_2 punctele de contact cu cercul ale tangentelor duse din M la $\mathcal{C}$ şi cu A punctul de intersecţie a dreptei OM cu cercul $\mathcal{C}$, astfel încât $A\notin[OM]$. Determinaţi punctele M cu proprietatea că se poate construi un triunghi cu segmentele $[MT_1]$, $[MT_2]$ şi $[MO]$, dar nu se poate construi un triunghi cu $[MT_1],[MT_2]$ şi $[MA]$.*

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. A se vedea Recreaţii Matematice 1/2009, pg. 41.

L157. *În planul $\triangle ABC$ definim transformarea $P\to P'$ astfel: 1. punctul P se proiectează pe dreptele BC,CA,AB în D,E şi respectiv F; 2. simetricele punctelor D,E,F în raport cu mijloacelor laturilor $[BC],[CA]$ şi respectiv $[AB]$ se notează D',E',F'; 3. P' este punctul de concurenţă a perpendicularelor în D',E',F' pe BC,CA şi respectiv AB. Arătaţi că transformarea $P\to P'$ coincide cu simetria în raport cu O, centrul cercului circumscris $\triangle ABC$.*

Temistocle Bîrsan, Iaşi

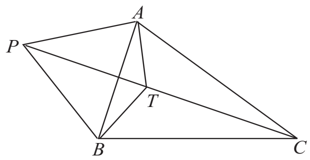
Soluţie (**Daniel Văcaru**, Piteşti). Cum avem de-a face cu două izometrii, este suficient să demonstrăm că transformatele punctelor A,B,C sunt aceleaşi. Să vedem cine sunt D,E,F când $P=A$; avem că $D=A'$, $E=A$ şi $F=A$, unde A' este proiecţia lui A pe BC. Observăm apoi că D' este simetricul lui A' faţă de mijlocul lui $[BC]$, E' coincide cu C şi F' cu B. Construind perpendicularele în B pe AB şi în C pe AC, se obţine patrulaterul inscriptibil $ABP'C$. Deducem că P' coincide cu A', simetricul lui A faţă de O, centrul cercului circumscris. Raţionamentul este analog în cazul în care $P=B$, respectiv $P=C$ şi astfel se închide demonstraţia.

Notă. Această problemă este, până la diferenţă de formulare, tocmai Propoziţia 3 din articolul *Simetria faţă de centrul cercului cricumscris unui triunghi* de *Bogdan Ioniţă* şi *Titu Zvonaru* (*G.M. - 3/1997,* p. 98). Faptul ne este adus la cunoştinţă de dl. **Titu Zvonaru**. Autorul problemei regretă şi îşi cere scuze pentru acest incident. (Menţionăm încă o soluţie diferită de cea din articol: Perpendicularele în D şi D' pe BC determină în cercul $\mathcal{C}(O, OP)$ un dreptunghi, deci perpendiculara în D' trece prin simetricul fată de O al punctului P etc.).

L158. *În interiorul triunghiului ABC cu latura $[BC]$ fixă şi vârful A mobil, considerăm punctul T asfel încât $\widehat{ATB} \equiv \widehat{BTC} \equiv \widehat{CTA}$. Determinaţi poziţia punctului A în planul triunghiului pentru care $m(\widehat{BAC}) = \alpha < \frac{5\pi}{6}$, iar suma distanţelor de la T la vârfurile triunghiului este maximă.*

Cătălin Calistru, Iaşi

Soluţie. Remarcăm faptul că T ese tocmai punctul lui Toricelli asociat triunghiului ABC. Astfel, dacă $\triangle PAB$ este echilateral, construit în exteriorul $\triangle ABC$, atunci punctele P, T şi C sunt coliniare, iar $TA + TB + TC = CP$ (vezi, de exemplu, L. Niculescu şi V. Boskoff - *Probleme practice de geometrie*, Ed. Tehnică, 1990). Folosind teorema cosinusului în triunghiurile APC şi ABC, obţinem că



$$\begin{aligned} CP^2 &= AP^2 + AC^2 - 2AP \cdot AC \cdot \cos\left(A + \frac{\pi}{3}\right) = \\ &= BC^2 + 2AB \cdot AC \cdot \cos A - 2AB \cdot AC \cdot \cos\left(A + \frac{\pi}{3}\right) = \\ &= BC^2 + 2AB \cdot AC\left(\cos A - \cos\left(A + \frac{\pi}{3}\right)\right) = \\ &= BC^2 + 4AB \cdot AC \cdot \sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6} = BC^2 + BC \cdot \frac{\sin(A + \frac{\pi}{6})}{\sin A} \cdot h_a. \end{aligned}$$

Cum BC este constantă, iar $\sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right) > 0$ (deoarece $\alpha < \frac{5\pi}{6}$), deducem că CP este maxim atunci când h_a este maxim. Însă A se mişcă pe un arc capabil de unghiul α, prin urmare poziţiile căutate ale punctului A sunt date de intersecţiile mediatoarei segmentului $[BC]$ cu arcele capabile de unghiul α, construite pe $[BC]$.

L159. *Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ şi $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, demonstraţi inegalitatea*

$$a\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 + b\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + c\left(\frac{\sin x}{x}\right) + 3\sqrt[3]{abc}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right) > 6 \cdot \sqrt[3]{abc}.$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

Soluţie. Din inegalitatea mediilor, rezultă că

$$a\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 + b\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + c\left(\frac{\sin x}{x}\right) \geq 3\sqrt[3]{abc \cdot \left(\frac{\sin x}{x}\right)^6} = 3\sqrt[3]{abc}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2.$$

Pentru a obţine inegalitatea din enunţ, ar fi suficient să demonstrăm că $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \frac{\operatorname{tg} x}{x} > 2$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Această inegalitate, atribuită lui Wilker, poate fi găsită în G.M. 1/2007, pg. 1.

Notă. Soluţie corectă, bazată pe considerente de analiză matematică, s-a primit de la Dl. **Daniel Văcaru**, Piteşti.

L160. *Demonstraţi că în orice triunghi are loc inegalitatea*

$$m_a + m_b + m_c \geq 6r\left(\frac{m_a}{m_b + m_c} + \frac{m_b}{m_a + m_c} + \frac{m_c}{m_a + m_b}\right) \geq 9r.$$

Marius Olteanu, Rm. Vâlcea

Soluţie. Avem că $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$ şi $m_a \geq h_a$, $m_b \geq h_b$, $m_c \geq h_c$. În plus, în orice triunghi cu laturile a, b, c, are loc inegalitatea

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 6\left(\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b}\right)$$

(a se vedea, de exemplu, *Algebraic Inequalities* de V. Cârtoaje, apărută la GIL, Zalău, 2006, problema 70, pg. 379). Cum medianele unui triunghi pot fi laturi ale unui alt triunghi, obţinem că

$$\frac{1}{r}(m_a + m_b + m_c) = \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)(m_a + m_b + m_c) \geq$$

$$\geq \left(\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c}\right)(m_a + m_b + m_c) \geq 6\left(\frac{m_a}{m_b + m_c} + \frac{m_b}{m_a + m_c} + \frac{m_c}{m_a + m_b}\right),$$

adică tocmai prima inegalitate cerută. Pentru a doua inegalitate, folosim binecunoscuta $\frac{x}{y + z} + \frac{y}{z + x} + \frac{z}{x + y} \geq \frac{3}{2}$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ (*Nesbitt*).

L161. *Dacă* $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ *şi* $a + b + c = 1$, *demonstraţi inegalitatea*

$$3 + \sum \frac{(a - b)^2 + (a - c)^2}{1 + a} \leq 4(a^2 + b^2 + c^2)\left(\sum \frac{1}{1 + a}\right).$$

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Notând $Q = a^2 + b^2 + c^2$, avem că

$$\frac{4}{1 + a} - \frac{3a}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{4a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 3a(2a + b + c)}{(1 + a)(a^2 + b^2 + c^2)} =$$

$$= \frac{(b - a)(4b + a)}{Q(1 + a)} + \frac{(c - a)(4c + a)}{Q(1 + a)}$$

şi încă două identităţi similare. Pe de altă parte,

$$\frac{(b - a)(4b + a)}{Q(1 + a)} + \frac{(a - b)(4a + b)}{Q(1 + b)} = \frac{a - b}{Q} \cdot \frac{4a^2 - 4b^2 + 3a - 3b}{(1 + a)(1 + b)} =$$

$$= \frac{(a - b)^2}{Q} \cdot \frac{4a + 4b + 3}{(1 + a)(1 + b)} \geq \frac{(a - b)^2}{Q} \cdot \frac{1 + a + 1 + b}{(1 + a)(1 + b)} = \frac{(a - b)^2}{Q(1 + a)} + \frac{(a - b)^2}{Q(1 + b)}.$$

Analog se obţin încă două minorări şi deducem că

$$\frac{4}{1+a}+\frac{4}{1+b}+\frac{4}{1+c}-\frac{3(a+b+c)}{a^2+b^2+c^2}\geq$$
$$\geq\frac{(a-b)^2+(a-c)^2}{(1+a)Q}+\frac{(b-c)^2+(b-a)^2}{(1+b)Q}+\frac{(c-a)^2+(c-b)^2}{(1+c)Q},$$

inegalitate echivalentă cu cea din enunţ. Egalitatea se atinge pentru $a=b=c=\frac{1}{3}$.

L162. *Dacă $n\in\mathbb{Z}^*$ este fixat, rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia* $\left[\frac{x}{n}\right]=\left[\frac{[x]}{n}\right]$.

Dumitru Mihalache şi Gabi Ghidoveanu, Bârlad

Soluţie. Dacă $n\in\mathbb{N}^*$, mulţimea soluţiilor ecuaţiei este $\mathbb{R}$, conform unei cunoscute proprietăţi a părţii întregi. Într-adevăr,

$$\left[\frac{x}{n}\right]=k\Leftrightarrow kn\leq x<(k+1)n\Leftrightarrow kn\leq[x]<(k+1)n\Leftrightarrow\left[\frac{[x]}{n}\right]=k.$$

În cazul în care $n\in\mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}^*$, există şi sunt unice numerele $q\in\mathbb{Z}$ şi $r\in\mathbb{R}$, $0\leq r<|n|$, astfel ca $x=nq+r$. Urmează că

$$\left[\frac{x}{n}\right]=\left[\frac{nq+r}{n}\right]=\left[q+\frac{r}{n}\right]=q+\left[\frac{r}{n}\right],$$
$$\left[\frac{[x]}{n}\right]=\left[\frac{[nq+r]}{n}\right]=\left[\frac{nq+[r]}{n}\right]=q+\left[\frac{[r]}{n}\right].$$

Dacă $r=0$, atunci $\left[\frac{r}{n}\right]=\left[\frac{[r]}{n}\right]=0$. Dacă $r\in(0,1)$, atunci $\left[\frac{r}{n}\right]=-1$, deoarece $\frac{r}{n}\in\left(-\frac{1}{|n|},0\right)$, iar $\left[\frac{[r]}{n}\right]=0$. Dacă $r\in[1,|n|)$, atunci $\frac{r}{n}$, $\frac{[r]}{n}\in\left(-1,-\frac{1}{|n|}\right]$, deci $\left[\frac{r}{n}\right]=\left[\frac{[r]}{n}\right]=-1$. De aici se obţine că, pentru $n\in\mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}^*$, mulţimea soluţiilor ecuaţiei din enunţ este $\mathbb{R}\backslash\bigcup\limits_{q\in\mathbb{Z}}(nq,nq+1)$.

L163. *Fie a un număr întreg impar, iar $n\in\mathbb{N}^*$. Arătaţi că polinomul $X^{2^n}+a^{2^n}$ este ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$ însă, pentru orice număr prim p, polinomul redus modulo p este reductibil în $\mathbb{Z}_p[X]$.*

Dorel Miheţ, Timişoara

Soluţie. Deoarece $f(X+a)=X^{2^n}+C^1_{2^n}aX^{2^n-1}+\ldots+C^{2^n-1}_{2^n}a^{2^n-1}X+2a^{2^n}$, iar coeficienţii binomiali $C^1_{2^n},\ldots,C^{2^n-1}_{2^n}$ sunt toţi pari, din criteriul lui Eisenstein rezultă că $f(X+a)$ (şi la fel f) este ireductibil peste $\mathbb{Q}$, deci şi peste $\mathbb{Z}$ (având coeficientul dominant 1).

Dacă $p=2$, atunci $\widehat{f}=X^{2^n}+\widehat{1}$ este reductibil în $\mathbb{Z}_2[X]$, deoarece este de grad mai mare decât unu şi are rădăcina 1. Fie p un număr prim impar; putem scrie că

$$\begin{aligned}\widehat{f}&=X^{2^n}+\widehat{a^{2^n}}=(X^{2^{n-1}})^2-(\widehat{-1}\widehat{a^{2^n}})=(X^{2^{n-1}}+\widehat{a^{2^{n-1}}})^2-\widehat{2}\widehat{a^{2^{n-1}}}\cdot X^{2^{n-1}}=\\&=(X^{2^{n-1}}-\widehat{a^{2^{n-1}}})^2-(-\widehat{2}\widehat{a^{2^{n-1}}}\cdot X^{2^{n-1}}).\end{aligned}$$

În cazul în care $\widehat{a} = \widehat{0}$, concluzia este imediată. În caz contrar, $\widehat{a}$ va fi generator al grupului ciclic $(\mathbb{Z}_p^*, \cdot)$, prin urmare $-\widehat{1} = a^s$, $\widehat{2} = a^t$ şi $-\widehat{2} = a^{s+t}$, pentru anumite numere naturale s şi t. Deoarece cel puţin unul dintre numerele s, t şi $s+t$ este par, rezultă că unul dintre elementele $-\widehat{1}, \widehat{2}, -\widehat{2}$ este pătrat perfect în $\mathbb{Z}_p$, deci $\widehat{f}$ va fi reductibil în $\mathbb{Z}_p(X)$.

L164. *O secvenţă $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de $2n$ numere reale are proprietatea (P) dacă $x_i^2 + y_i^2 = 1$, $\forall i = \overline{1,n}$. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât pentru orice secvenţă cu proprietatea (P), există $1 \le i < j \le n$ cu $x_i x_j + y_i y_j \ge 0,947$. Determinaţi cea mai bună constantă α aşa încât $x_i x_j + y_i y_j \ge \alpha$, pentru orice secvenţă cu proprietatea (P).*

Vlad Emanuel, student, Bucureşti

Soluţie. Considerăm punctele $M_k(x_k, y_k)$, $k = \overline{1,n}$ şi vectorii $\vec{v}_k = \overrightarrow{OM_k}$. Pentru o secvenţă cu proprietatea (P), avem că $|\vec{v}_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, deci $x_i x_j + y_i y_j = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = |\vec{v}_i| \cdot |\vec{v}_j| \cos(\widehat{\vec{v}_i, \vec{v}_j}) = \cos(\widehat{\vec{v}_i, \vec{v}_j})$. Vom demonstra că, în ipotezele problemei, $n \ge 20$. Presupunem, prin absurd, că $n \le 19$ şi alegem M_k-imaginile rădăcinilor de ordin n ale unităţii. Atunci $x_i x_j + y_i y_j \le \cos \dfrac{2\pi}{n} \le \cos \dfrac{2\pi}{19} < 0,947$, după cum se poate constata cu ajutorul unui calculator. Fie deci $n \ge 20$; deoarece $\sum m((\widehat{\vec{v}_k, \vec{v}_{k+1}})) = 2\pi$, unde $\vec{v}_{n+1} = \vec{v}_1$, înseamnă că cel puţin unul dintre unghiurile $(\widehat{\vec{v}_k, \vec{v}_{k+1}})$ este cel mult egal cu $\dfrac{2\pi}{n}$. Pentru acel unghi, $x_k x_{k+1} + y_k y_{k+1} \ge \cos \dfrac{2\pi}{n} \ge \cos \dfrac{\pi}{10} = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}$ şi această constantă nu poate fi îmbunătăţită, căci putem lua $n = 20$ şi M_k imaginile rădăcinilor de ordin 20 ale unităţii. În concluzie, $\alpha = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}$.

L165. *Fie $n \ge 2$ un număr natural. Determinaţi cel mai mare număr natural m pentru care există submulţimile nevide şi distincte $A_1, A_2, \ldots, A_m$ ale lui $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, cu proprietatea că fiecare element al lui A este conţinut în cel mult k dintre ele, unde:*

a) $k = 2$; b) $k = n$; c) $k = n + 1$.

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Fie x_i, $i = \overline{1,n}$, numărul acelora dintre submulţimile $A_1, A_2, \ldots, A_n$ care au i elemente şi fie y_j, $j = \overline{1,m}$, numărul elementelor lui A care se găsesc în exact j dintre mulţimile $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Avem evident că $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m$, iar $y_1 + y_2 + \ldots + y_m \le n$ (se poate să fie elemente ale lui A care să nu aparţină niciuneia dintre submulţimi). Egalitatea

$$x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n = y_1 + 2y_2 + \ldots + my_m \tag{1}$$

se obţine numărând în două feluri toate elementele care apar în $A_1, A_2, \ldots, A_m$, incluzând repetiţiile (şi este adevărată chiar dacă $A_1, A_2, \ldots, A_m$ nu sunt distincte).

a) În ipoteza $k = 2$, avem că $y_j = 0, \forall j \ge 3$, deci $y_1 + y_2 \le n$ şi $x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n = y_1 + 2y_2$. Atunci

$$2m - x_1 = x_1 + 2(m - x_1) = x_1 + 2(x_2 + \ldots + x_n) \le$$

$$\leq x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n = y_1 + 2y_2 \leq 2(y_1 + y_2) \leq 2n,$$

deci $2m \leq 2n + x_1 \leq 3n$ (deoarece x_1 nu poate depăşi C_n^1, numărul submulţimilor lui A cu un singur element). Am obţinut astfel că $m \leq \left[\frac{3n}{2}\right]$. Demonstrăm că $\left[\frac{3n}{2}\right]$ este chiar maximul căutat: submulţimile cu un element ale lui A şi încă $\left[\frac{n}{2}\right]$ submulţimi cu două elemente, alese astfel încât să fie două câte două disjuncte, sunt $\left[\frac{3n}{2}\right]$ submulţini cu proprietatea că fiecare element al lui A se află în cel mult două dintre ele.

b) Avem că $y_j = 0$, $\forall j \geq n+1$, deci $y_1 + y_2 + \ldots + y_n \leq n$, iar relaţia (1) devine $x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n = y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n$. Atunci

$$3m - 2x_1 - x_2 = x_1 + 2x_2 + 3(m - x_1 - x_2) = x_1 + 2x_2 + 3(x_1 + \ldots + x_n) \leq$$
$$\leq x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n = y_1 + 2y_2 + \ldots + y_n \leq n(y_1 + \ldots + y_n) \leq n^2,$$

deci $3m \leq n^2 + 2x_1 + x_2 \leq n^2 + 2C_n^1 + C_n^2 = \frac{3n^2+3n}{2}$. Obţinem, în cele din urmă, că $m \leq \frac{n(n+1)}{2}$. Cum submulţimile nevide cu cel mult două elemente ale lui A sunt în număr de $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ şi au proprietăţile din enunţ, înseamnă că $\frac{n(n+1)}{2}$ este maximul căutat.

c) Cu un raţionament asemănător, obţinem că m maxim este $\frac{n(n+1)}{2} + \left[\frac{n}{3}\right]$.

ERATĂ

Dintr-o eroare de editare, pe care o regretăm şi pentru care ne cerem scuze, din lista membrilor *Comitetului de redacţie* al *Recreaţiilor Matematice* a fost omis, începând cu nr. 1/2007, dl. **Alexandru CĂRĂUŞU**, pasionat susţinător al revistei. În spiritul corectitudinii, aducem această rectificare de ordin formal.

*
*   *

Recreaţii Matematice – 1/2009

- p. 9, r. 5: în loc de "bisectoare" se va considera "bisectoarea";
- p. 26, r. 6 de jos: în loc de "R" se va considera "1";
- p. 79, r. 9: în loc de "$x_iy_j + y_iy_j$" se va considera "$x_ix_j + y_iy_j$";
- p. 81, r. 9 de jos: în loc de "$x_iy_i + y_iy_j$" se va considera "$x_ix_j + y_iy_j$".

Recreaţii Matematice – 2/2009

- p. 96, r. 11 de jos: în loc de "$a_1^\alpha + \ldots + a_n^\alpha$" se va considera "$a_1^\beta + \ldots + a_n^\beta$";
- p. 172, r. 11 de jos: în loc de *Haşedeu* se va considera "*Hasdeu*".

Probleme propuse[1]

Clasele primare

P.184. Vreau să pun într-o cutie bile albe şi verzi, în total 10, astfel încât bile albe să fie cel mult 6. În câte moduri pot face acest lucru?
(*Clasa I*) **Inst. Maria Racu, Iaşi**

P.185. Ce literă urmează în înşiruirea logică VKUJT...?
(*Clasa I*) **Andreea Amarandei, studentă, Iaşi**

P.186. Completaţi dreptunghiurile de mai jos cu numere aşa încât suma numerelor scrise în oricare trei dreptunghiuri alăturate să fie aceeaşi. Ce observaţi?

35		65				35

(*Clasa a II-a*) **Alexandru Chiriac, student, Iaşi**

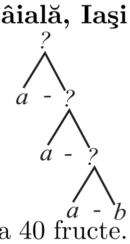
P.187. Şoricelul Chiţ a primit un zar de la mătuşa Miţ. El a aruncat zarul de patru ori, obţinând în total 21 de puncte. Ştiind că la primele două aruncări a obţinut în total 9 puncte, aflaţi cât a obţinut la fiecare aruncare. (Găsiţi toate posibilităţile!)
(*Clasa a II-a*) **Ioana Maria Popa, elevă, Iaşi**

P.188. În exerciţiul $a + a : a = \ldots$, există o valoare a lui a pentru care putem să efectuăm operaţiile în ordinea scrisă, fără a modifica rezultatul?
(*Clasa a III-a*) **Ionela Bărăgan, studentă, Iaşi**

P.189. Aflaţi numărul natural a ştiind că, dacă se împarte 25 la $8 - 3 \times a$, se obţine restul 1.
(*Clasa a III-a*) **Mariana Nastasia, elevă, Iaşi**

P.190. În grădina casei mele sunt câţiva pomi. Dacă ar fi de patru ori mai mulţi decât sunt, atunci ar depăşi numărul 20 cu atât cât lipseşte, de fapt, pentru a fi 20. Câţi pomi sunt în grădină?
(*Clasa a III-a*) **Inst. Dumitru Pârâială, Iaşi**

P.191. Compuneţi o problemă care să se rezolve după schema alăturată, cu numerele a şi b convenabil alese.
(*Clasa a III-a*) **Amalia Cantemir, elevă, Iaşi**



P.192. Bunica are mere şi pere. Dacă mi-ar da un sfert din numărul merelor şi o optime din numărul perelor, aş avea 35 de fructe. Dacă mi-ar da o optime din numărul merelor şi o pătrime din numărul perelor, aş avea 40 fructe. Câte fructe are bunica?
(*Clasa a IV-a*) **Mihaela Gâlcă, elevă, Iaşi**

P.193. Mai multe perechi, formate din câte o fată şi câte un băiat, culeg alune. În fiecare pereche, alunele culese de băiat sunt fie de patru ori mai multe, fie de patru ori mai puţine decât cele culese de fată. Numărul alunelor culese împreună de fete şi de băieţi poate fi 2009? Dar 2010?
(*Clasa a IV-a*) **Mihaela Obreja şi Ioan Lungu, Vaslui**

[1] Se primesc soluţii până la data de 31 decembrie 2010.