Soluţiile problemelor propuse în nr. 1/2009

Clasele primare

P.164. *Scrie vecinii vecinului comun al numerelor* 16 *şi* 18.
(*Clasa I*) **Diana Tănăsoaie, elevă, Iaşi**

Soluţie. Vecinii numărului 16 sunt numerele 15 şi 17, iar ai numărului 18 sunt numerele 17 şi 19. Vecinul comun este 17. Vecinii numărului 17 sunt 16 şi 18.

P.165. *După ce dau celor doi fraţi mai mari câte două banane, mănânc şi eu trei banane. În coş îmi rămâne un număr de banane ce poate fi scris cu două cifre diferite şi care este cel mai mic număr de acest fel. Câte banane am avut în coş?*
(*Clasa I*) **Inst. Maria Racu, Iaşi**

Soluţie. Numărul bananelor rămase în coş este 10. Numărul iniţial de banane din coş este $2 + 2 + 3 + 10 = 17$.

P.166. *Din cei* 8 *căţeluşi albi şi negri, cel mult* 3 *sunt albi. Care este numărul maxim de căţeluşi negri? Dar cel minim?*
(*Clasa a II-a*) **Ioana Bărăgan, elevă, Iaşi**

Soluţie. Deoarece avem căţeluşi albi şi negri, cel puţin un căţeluş este alb. Numărul maxim de căţeluşi negri este 7. Cum cel mult 3 căţeluşi sunt albi, cel puţin 5 vor fi negri.

P.167. *Într-o cameră se joacă un pisoi cu doi pisici, un căţeluş care ţine în gură o păpuşă şi un băieţel, călare pe un căluţ de lemn. Câte picioare participă la joc?*
(*Clasa a II-a*) **Alexandru Dumitru Chiriac, elev, Iaşi**

Soluţie. La joc participă pisoiul cu cei doi pisici, căţeluşul şi băieţelul. În total participă la joc $4 + 4 + 4 + 4 + 2 = 18$ picioare.

P.168. *Există numerele naturale* a, b, c, d *astfel încât* $a + b + c + d = 123$ *şi* $a : b = b : c = c : d = 1$*?*
(*Clasa a III-a*) **Amalia Cantemir, elevă, Iaşi**

Soluţie. Din $a : b = b : c = c : d = 1$, rezultă $a = b = c = d$. Concluzionăm că numărul 123 trebuie să se împartă exact la 4, ceea ce este fals.

P.169. *Calculează diferenţa următoare, fără a efectua parantezele:* $(2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 1000) - (1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 999) =$
(*Clasa a III-a*) **Mădălina Bucşă, elevă, Iaşi**

Soluţie. De la 1 la 1000 sunt 500 numere pare şi 500 numere impare. Exerciţiul devine $(2 - 1) + (4 - 3) + (6 - 5) + \ldots + (1000 - 999) = \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{\text{de } 500 \ ori} = 500$.

P.170. *Doi fraţi au cumpărat un teren în formă de pătrat pe care l-au împărţit în două dreptunghiuri egale. Fiecare doreşte să împrejmuiască propriul teren cu gard. Cât mai are de lucru fiecare, dacă primul a realizat* 430 m*, al doilea* 470 m*, iar perimetrul pătratului este de* 1000 m*?*
(*Clasa a III-a*) **Dragoş Iacob, elev, Iaşi**

Soluţie. Latura pătratului este de $1000m : 4 = 250m$. Împrejmuirea fiecărui frate cuprinde jumătate din perimetrul pătratului şi încă jumătate din porţiunea comună de gard. Primul frate mai are de lucrat $(500m + 125m) - 430m = 195m$, iar al doilea $(500m + 125m) - 470m = 155m$.

P.171. *Dacă $a+b+c = 175$ şi $a+2c = 200$, calculaţi produsul $(2a+b+3c)\cdot(c-b)$.*
(*Clasa a IV-a*) **Inst. Marian Ciuperceanu, Craiova**

Soluţie. $2a+b+3c = (a+b+c)+(a+2c) = 175+200 = 385$. Din $a+b+c = 175$ şi $a + c + c = 200$, rezultă $c - b = 200 - 175 = 25$. Aşadar, $(2a + b + 3c) \cdot (c - b) = 375 \times 25 = 275 \times 100 : 4 = 9375$.

P.172. *Câte numere $\overline{abc}$ au suma cifrelor 7 şi pot fi rotunjite cu numărul $\overline{ab0}$?*
(*Clasa a IV-a*) **Maria Nastasiu, elevă, Iaşi**

Soluţie. Cifra unităţilor poate fi $0, 1, 2, 3$ sau 4. Dacă $c = 0$, atunci $a + b = 7$ şi găsim numerele $160, 250, 340, 430, 520, 610$ şi 700. Dacă $c = 1$, atunci $a + b = 6$ şi obţinem numerele $151, 241, 331, 421, 511$ şi 601. Analog, în celelalte cazuri găsim numerele $142, 232, 322, 412, 502; 133, 223, 313, 403; 124, 214$ şi 304. În total, există 25 de numere cu proprietăţile din enunţ.

P.173. *Se formează şirul de numere: 34, 334, 344, 3334, 3444, ... Câte cifre de 3 are numărul de pe locul 2008?*
(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

Soluţie. Numerele de pe locurile pare au o singură cifră de 4, restul fiind cifre de 3. Astfel, numărul de pe locul 2008 are $2008 : 2 + 1 = 1005$ cifre de 3.

Clasa a V-a

V.102. *Un întreprinzător doreşte să cumpere un număr de frigidere de la un angrosist, pe care urmează să le transporte către firma sa cu ajutorul unui camion de mare tonaj, care consumă $10\,l$ de motorină la $100\,km$ ($1l$ de motorină costă 3 lei). Întreprinzătorul poate opta între doi furnizori: A vinde frigiderul cu 1000 lei/buc., iar B vinde acelaşi produs cu 990 lei/buc., însă are depozitul mai departe decât A, la o distanţă pe şosea $AB = 150\,km$.*

a) *Dacă întreprinzătorul doreşte să cumpere 20 de frigidere, ce furnizor va alege?*

b) *La ce număr de frigidere costurile de achiziţie nu depind de furnizor?*

Marian Ciuperceanu, Craiova

Soluţie. Fie n numărul de frigidere achiziţionate, iar x cheltuielile de transport de la firma întreprinzătorului până la furnizorul A. Cheltuielile de transport până la furnizorul B vor fi $x + 3 \cdot 10 \cdot 3 = x + 90$ (distanţa AB se parcurge dus-întors, în total 300 km). Chletuielile totale cu furnizorul A vor fi $C_A = x + 1000n$, iar cele cu furnizorul B vor fi $C_B = x + 90 + 990n$.

a) Dacă $n = 20$, atunci $C_A = x+20000$, iar $C_B = x+19890$, prin urmare $C_B < C_A$. Furnizorul ales va fi B.

b) Avem că $C_A = C_B$, de unde se obţine $n = 9$.

V.103. *Se consideră numerele naturale $m = \dfrac{3x + 5}{2x + 2}$, $a = \dfrac{2y + 5}{3}$, $b = \dfrac{5z + 2}{5}$, unde $x, y, z \in \mathbb{N}$. Demonstraţi că m nu poate fi divizor al lui a, dar poate fi divizor al lui b.*

Claudiu Ştefan Popa, Iaşi

Soluţie. Pentru că $m \in \mathbb{N}$, trebuie să avem că $2x+2 \mid 3x+5$, de unde $2x+2 \mid 2(3x+5)-3(2x+2)$, adică $2x+2 \mid 4$. Găsim că $x \in \{0,1\}$; dacă $x=0$, atunci $m = \frac{5}{2} \notin \mathbb{N}$, iar dacă $x=1$, atunci $m=2$. Presupunând că $2 \mid a$, s-ar obţine că $2y+5=6k$, cu $y,k \in \mathbb{N}$, absurd (membrul stâng este impar, iar cel drept par). Pentru $z=2$, avem că $b=4$, număr care se divide cu 2.

V.104. *Scrieţi numărul* 2008 *ca sumă de trei cuburi perfecte pare.* (*Găsiţi toate posibilităţile!*)

Veronica Plăeşu şi Dan Plăeşu, Iaşi

Soluţie. Deoarece $2008 = 2^3 \cdot 251$, este destul să-l scriem pe 251 ca sumă de trei cuburi perfecte. Cel mai mare dintre cele trei cuburi nu poate depăşi $261 = 6^3$, deoarece $7^3 = 343 > 251$. După o analiză a cazurilor posibile, găsim doar două situaţii favorabile: $251 = 1^3+5^3+5^3$ şi $251 = 2^3+3^3+6^3$. În concluzie, $2008 = 2^3+10^3+10^3 = 2^3+6^3+12^3$.

V.105. *Se consideră numărul* $a = 7+7^2+7^3+\ldots+7^{2009}$.

a) *Demonstraţi că* a *nu poate fi pătrat perfect.*

b) *Aflaţi restul împărţirii lui* a *la* 400.

Damian Marinescu, Târgovişte

Soluţie. a) Cum a se divide cu 7, dar nu şi cu 7^2, înseamnă că nu poate fi pătrat perfect.

b) Avem că $a = 7+7^2(1+7+7^2+7^3)+\ldots+7^{2006}(1+7+7^2+7^3) = 7+400(7^2+\ldots+7^{2006})$, deci restul împărţirii lui a la 400 este 7.

V.106. *Să se determine numărul natural* a *şi cifra* b, *dacă* $(a+3)\cdot\overline{200b} = a \cdot 2009$.

Enache Pătraşcu, Focşani

Soluţie. Cum $2009 = 7^2 \cdot 41$, rezultă că $(a+3)\cdot\overline{200b} \vdots 7^2$ şi $(a+3)\cdot\overline{200b} \vdots 41$. Evident că $b \leq 8$ (deoarece $a+3 > a$), iar dintre numerele $2000, 2001, \ldots, 2008$, nicunul nu se divide nici cu 7^2, nici cu 41. Deducem că $a+3 \vdots 7$ şi $a+3 \vdots 41$, prin urmare $\alpha+3 = 287k$. Înlocuind, obţinem că $\overline{200b}\cdot k = 7(287k-3)$, de unde $k(2009-\overline{200b}) = 21$. De aici, $(k,b) \in \{(21,8);(7,6);(3,2)\}$, deci soluţiile problemei sunt $(a,b) \in \{(6024,8);(2006,6);(858,2)\}$.

O altă rezolvare se poate da încercând pentru b fiecare dintre valorile $0,1,2,\ldots,8$; se obţin astfel nouă ecuaţii simple, doar trei dintre acestea având soluţii naturale.

V.107. *Dacă* $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ *este dat, determinaţi* $x,y \in \mathbb{N}^*$ *pentru care* $x(x+2y+1) = 2^n \cdot 135$.

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. Dacă $x = 2^i$, $1 \leq i \leq n-1$, atunci am avea că $2^i+2y+1 = 2^{n-i}\cdot 135$, contradicţie (membrul stâng este impar, iar cel drept este par). Analog se arată că nu putem avea $x = 2^i \cdot p$, unde $1 \leq i \leq n-1$, $p \in D_{135}\backslash\{1\}$. Rămâne că $x = 2^n \cdot p$, cu $p \in D_{135}$. Cum $x < x+2y+1$, trebuie cercetate doar cazurile în care $p \in \{1,3,5\}$. Dacă $x = 2^n$, obţinem că $y = 67-2^{n-1}$, iar $y \in \mathbb{N}^*$ doar pentru $n \leq 7$. Dacă $x = 2^n\cdot 3$, atunci $y = 22-3\cdot 2^{n-1}$, care este număr natural când $n \leq 3$. În sfârşit, dacă $x = 2^n \cdot 5$, atunci $y = 13-5\cdot 2^{n-1}$, soluţie convenabilă pentru $n \leq 2$. În concluzie, obţinem $3, 2, 1$ sau 0 perechi (x,y), după cum $n=2$, $n=3$, $n \in \{4,5,6,7\}$, respectiv $n \geq 8$.

V.108. *Pe tablă sunt scrise numerele* $2, 0, 0, 9$. *Putem şterge de pe tablă oricare două numere, scriind în loc succesorii acestora. Este posibil ca, în urma mai multor operaţii de acest fel, să obţinem patru numere egale?*

Cătălin Budeanu, Iaşi

Soluţie. Suma numerelor de pe tablă creşte cu 2 la fiecare pas. După a n-a operaţie, ea devine $2n+2+0+0+9 = 2n+11$, număr care este impar, deci nu poate fi suma a patru numere egale.

Clasa a VI-a

VI.102. *O asociaţie de locatari este formată din trei familii care au consumat într-o lună* $27m^3, 16m^3$, *respectiv* $4m^3$ *de apă potabilă. Din consumul total, pentru* $38m^3$ *de apă trebuie plătită o taxă de canalizare, care se împarte proporţional cu consumul fiecărei familii. Dacă preţul apei este de* $1,6$ *lei/*m^3, *taxa de canalizare este de* $0,56$ *lei/*m^3 *şi fiecărei sume i se aplică T.V.A. de* 19 *%, aflaţi ce sumă trebuie să plătească fiecare familie (efectuaţi calculele cu două zecimale exacte).*

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. Pentru apă, prima familie plăteşte $27 \times 1,6 \times 1,19 = 51,4$ lei, a doua $16 \times 1,6 \times 1,19 = 30,46$ lei, iar a treia $4 \times 1,6 \times 1,19 = 7,61$ lei (am trunchiat rezultatele la cifra sutimilor, conform cerinţelor problemei). Observând că $38m^3$ reprezintă $80,85\%$ din $47m^3$ (unde $47m^3$ este consumul total), deducem că pentru canalizare prima familie plăteşte $0,8085 \times 28 \times 0,56 \times 1,19 = 14,54$ lei, a doua $0,8085 \times 16 \times 0,56 \times 1,19 = 8,62$ lei, iar a treia $0,8085 \times 4 \times 0,56 \times 1,19 = 2,15$ lei. În total, prima familie are de plătit $65,94$ lei, a doua $39,08$ lei, iar a treia $9,76$ lei.

VI.103. *Să se determine numărul prim* p *şi numerele întregi* a *şi* x *pentru care* $(x-a)(x-1)(a-1) = p$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Dacă $p \geq 3$, atunci toţi divizorii săi ar fi impari, deci $x-a, x-1$ şi $a-1$ vor fi numere impare. Însă $(x-1)-(x-a) = a-1$, egalitate care nu poate avea loc pentru trei numere impare. Rămâne să studiem cazul $p = 2$; atunci $a-1 \in \{\pm 1, \pm 2\}$, deci $a \in \{-1, 0, 2, 3\}$. Considerând fiecare dintre cele patru situaţii, găsim soluţiile $a = -1, x = 0$ şi $a = 2$, $x \in \{0, 3\}$.

VI.104. *Determinaţi numerele prime* p *şi* q, *ştiind că există* $x, y \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât* $x^2 + y^2 = p$, *iar* $x + y + 1 = q$.

Andrei Cozma, elev, Bucureşti

Soluţie. Observăm că $p - q = x(x-1) + y(y-1) - 1$, prin urmare $p - q$ este număr impar. Rezultă că unul dintre numerele p sau q este par, deci egal cu 2. Dacă $p = 2$, din $x^2 + y^2 = 2$ obţinem că $x = y = 1$, prin urmare $q = 3$. Dacă $q = 2$, atunci $x + y = 1$, fals, deoarece $x, y \in \mathbb{N}^*$. În concluzie, $p = 2$ şi $q = 3$.

VI.105. *Să se arate că numărul* $N = 3^{3^{2009}} - 3^{3^{2008}}$ *se poate scrie ca produs a trei numere naturale consecutive.*

Dan Nedeianu, Drobeta-Tr. Severin

Soluţie. Notând $a = 3^{3^{2008}}$, observăm că $3^{3^{2009}} = 3^{3^{2008} \cdot 3} = a^3$. Astfel, $N = a^3 - a = a(a^2 - 1) = (a-1) \cdot a \cdot (a+1)$, ceea ce încheie rezolvarea.

VI.106. *Se consideră unghiul* $\widehat{xOy}$ *şi punctele* $A, B \in (Ox, C, D \in (Oy$ *astfel încât*

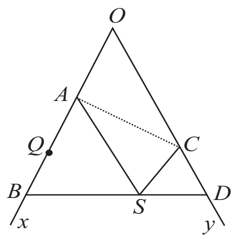
$A \in (OB)$, iar $C \in (OD)$. Mediatoarele segmentelor $[AB]$ şi $[CD]$ se intersectează în S, iar $\widehat{SAB} \equiv \widehat{SCD}$.

a) *Demonstraţi că $BC = AD$.*

b) *Dacă, în plus, punctele B, D şi S sunt coliniare, iar $m(\widehat{SAB}) = 60°$, arătaţi că $AC \perp SC \Leftrightarrow BS = 2 \cdot SD$.*

Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă, Blaj

Soluţie. a) Triunghiurile SAB si SCD fiind isoscele, din ipoteza $\widehat{SAB} = \widehat{SCD}$ obţinem că $180° - 2m(\widehat{SAB}) = 180° - 2m(\widehat{SCD})$, deci $\widehat{ASB} = \widehat{CSD}$. Atunci $\widehat{BSC} \equiv \widehat{ASD}$, ceea ce ne arată că $\triangle BSC \equiv \triangle ASD$ (L.U.L.), de unde $BC = AD$.



b) În ipotezele acestui punct, triunghiurile ABS, CDS şi OBD sunt echilaterale, iar $AS \| Oy$, $CS \| Ox$. Dacă $AC \perp SC$, cum $m(\widehat{ASC}) = 60°$, atunci $m(\widehat{CAS}) = 30°$. În triunghiul dreptunghic ACS vom avea că $AS = 2CS$, prin urmare $BS = 2SD$. Reciproc, dacă $BS = 2SD$, atunci $AB = 2SC$. Notând cu Q mijlocul lui AB, obţinem că $AQ = CS$. Avem şi că $AQ \| CS$, deci $ACSQ$ este paralelogram. În plus, $CA \perp AB$ (o mediană a unui triunghi echilateral este şi înălţime); deducem că $ACSQ$ este dreptunghi, de unde $AC \perp SC$.

VI.107. *Se consideră A, B, C, D, E, F şase puncte în plan astfel încât $AB = CD = CF = DF = 3cm$, $BC = BE = CE = 5cm$, iar $AD = 11cm$. Stabiliţi câte drepte determină cele şase puncte.*

Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Cum $AB + BC + CD = AD$, rezultă că punctele A, B, C şi D sunt coliniare şi se află în această ordine pe dreapta pe care o determină. Mai observăm şi faptul că triunghiurile CDF şi BCE sunt echilaterale. În cazul în care aceste triunghiuri se află într-un acelaşi semiplan faţă de dreapta AB, cele şase puncte determină 10 drepte: $AB, AE, AF, BE, BF, CE, CF, DE, DF$ şi EF. Dacă punctele E şi F sunt separate de dreapta AB, atunci C, E şi F vor fi coliniare, prin urmare EF, CE şi CF sunt una şi aceeaşi dreaptă; în acest caz, cele şase puncte determină 8 drepte.

VI.108. *Un ogar situat în vârful A al unei curţi dreptunghiulare $ABCD$ ($AB = 80m$, $BC = 160m$), porneşte în urmărirea a trei iepuri aflaţi în B, C şi D, alergând de-a lungul gardurilor. Dacă viteza ogarului este $4m/s$, iar vitezele iepurilor sunt $3m/s$, aflaţi după cât timp reuşeşte ogarul să prindă fiecare iepure.*

Marian Ciuperceanu, Craiova

Soluţie. Dacă ogarul porneşte către vârful B, va prinde iepurele aflat iniţial în B după $80 : (4 - 3) = 80s$. Iepurele din C va fi ajuns după $(80 + 160) : (4 - 3) = 240s$, iar cel din D după $(80 + 160 + 80) : (4 - 3) = 320s$. Dacă însă ogarul aleargă în sens contrar, pornind întâi către D, va prinde iepurele de acolo după $160 : (4 - 3) = 160s$, apoi iepurele din C după $(160 + 80) : (4 - 3) = 240s$, iar iepurele aflat iniţial în B după $(160 + 80 + 160) : (4 - 3) = 400s$.

Clasa a VII-a

VII.102. *În urma unui război dus între două triburi de canibali, în mâinile învingătorilor rămân zece prizonieri, printre care şi căpetenia învinşilor. Şeful de trib al învingătorilor alege, pentru prepararea cinei, câţiva prizonieri (măcar unul), la întâmplare. Care este probabilitatea ca şeful tribului învins să rămână în viaţă?*

Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Numărul cazurilor egal posibile este numărul submulţimilor nevide ale mulţimii cu 10 elemente a prizonierilor, deci $2^{10} - 1 = 1023$. Căpetenia învinşilor rămâne în viaţă dacă se alege o submulţime nevidă a mulţimii formată din ceilalţi nouă prizonieri, deci există $2^9 - 1 = 511$ cazuri favorabile. Probabilitatea cerută este $\frac{511}{1023}$.

VII.103. *Aflaţi numerele întregi x şi y pentru care $y - 4x + 6 < 0$, $2y - x - 2 > 0$ şi $3y + 2x - 24 < 0$.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Scriem cele trei condiţii din ipoteză astfel:

$$y < 4x - 6 \ (1)\ ; y > \frac{x+2}{2} \ (2);\ y < \frac{24-2x}{3} \ (3).$$

Din (1) şi (2) deducem că $\frac{x+2}{2} < 4x - 6$, deci $x > 2$. Din (2) şi (3) rezultă că $\frac{x+2}{2} < \frac{24-2x}{3}$, de unde $x < 6$, prin urmare $x \in \{3, 4, 5\}$. Din (1), (2) şi (3), înlocuind pe rând x cu $3, 4$ şi 5, obţinem soluţiile $(3,3); (3,4); (4,4); (4,5); (5,4)$.

Notă. La nivelul clasei a IX-a, se poate da o soluţie folosind împărţirea planului în regiuni.

VII.104. *Spunem că un număr natural are proprietatea (P) dacă este prim, cel puţin egal cu 5 şi se poate scrie ca sumă de două pătrate perfecte. Dacă numerele $p_1, p_2, \ldots, p_n$ au proprietatea (P), arătaţi că numărul $A = p_1 + p_2 + \ldots + p_n + n^2 - n + 2$ nu poate fi pătrat perfect.*

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

Soluţie. Un pătrat perfect poate fi M_4 sau $M_4 + 1$, deci o sumă de două pătrate va fi $M_4, M_4 + 1$ sau $M_4 + 2$. Dacă dorim ca această sumă de pătrate să fie număr prim cel puţin egal cu 5, atunci ea va fi neapărat de forma $M_4 + 1$. Deducem că $A = (M_4+1)+(M_4+1)+\ldots+(M_4+1)+n^2-n+2 = M_4+n+n^2-n+2 = M_4+n^2+2$ şi, cum $n^2 = M_4$ sau $n^2 = M_4 + 1$, atunci $A = M_4 + 2$ sau $A = M_4 + 3$, prin urmare A nu poate fi pătrat perfect.

VII.105. *Pentru $x, y \in \mathbb{R}$, definim $a(x,y) = \min(2x - y^2, 2y - x^2)$. Arătaţi că:*

a) *$a(x,y) \le 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$;* b) *$\max\{a(x,y) | x, y \in \mathbb{R}\} = 1$.*

Ovidiu Pop, Satu Mare

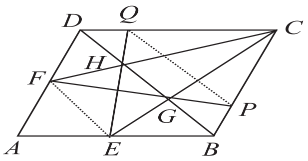
Soluţie. a) Dacă, prin absurd, ar exista $x, y \in \mathbb{R}$ pentru care $a(x,y) > 1$, ar însemna că $2x - y^2 > 1$ şi $2y - x^2 > 1$, pentru anumite valori ale numerelor x şi y. Prin adunare, am obţine că $(x-1)^2 + (y-1)^2 < 0$, imposibil.

b) Folosind a) şi observând că $a(1,1) = 1$, rezultă cerinţa.

VII.106. *Se consideră paralelogramul $ABCD, E$ şi F mijloacele laturilor $[AB]$, respectiv $[AD]$, $\{G\} = CE \cap BD$, $\{H\} = CF \cap BD$, $\{P\} = FG \cap BC$, $\{Q\} = EH \cap CD$. Arătaţi că $3EF = 2PQ$.*

Mirela Marin, Iaşi

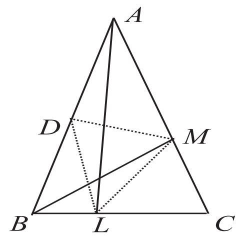
Soluţie. Din $\triangle DHF \sim \triangle BHC$, deducem că $\frac{DH}{HB} = \frac{DF}{BC} = \frac{1}{2}$. Cum $\triangle DHQ \sim \triangle BHE$, obţinem că $\frac{DQ}{BE} = \frac{DH}{HB} = \frac{1}{2}$, prin urmare $DQ = \frac{1}{4}AB$, adică $\frac{DQ}{DC} = \frac{1}{4}$. Analog se arată că $\frac{BP}{BC} = \frac{1}{4}$, deci $PQ \| BD$ (reciproca teoremei lui Thales), iar $\frac{PQ}{BD} = \frac{CQ}{CD} = \frac{3}{4}$ (teorema fundamentală a asemănării). Astfel, $2PQ = \frac{3}{2} \cdot BD = 3 \cdot \frac{1}{2}BD = 3FE$ (deoarece $[FE]$ este linie mijlocie în $\triangle ABD$).



VII.107. *Fie ABC un triunghi cu $m(\widehat{C}) = 60°$, L proiecţia lui A pe BC, M proiecţia lui B pe AC, iar D mijlocul lui $[AB]$. Demonstraţi că triunghiul DML este echilateral.*

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

Soluţie. În triunghiurile LAB şi MAB, LD şi respectiv MD sunt mediane, prin urmare $LD = MD = \frac{1}{2}AB$, deci $\triangle DML$ este isoscel, la fel ca şi triunghiul ADM. Vom avea că $\widehat{AMD} = \widehat{A}$ şi, cum patrulaterul $ABLM$ este inscriptibil, avem şi că $\widehat{CML} \equiv \widehat{B}$. Astfel, $m(\widehat{DML}) = 180° - m(\widehat{AMD}) - m(\widehat{CML}) = 180° - m(\widehat{A}) - m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = 60°$, deci $\triangle DML$ va fi chiar echilateral.



VII.108. *Considerăm în plan trei cercuri distincte, congruente, ale căror centre nu sunt coliniare. Construiţi cu rigla şi compasul un cerc la care cercurile date să fie tangente interior.*

Adrian Corduneanu, Iaşi

Soluţie. Putem determina, folosind rigla şi compasul, centrele celor trei cercuri date; să notăm cu A, B şi C aceste centre. Aflăm, cu rigla şi compasul, centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC şi punctul M de intersecţie al dreptei OA cu cercul de centru A, astfel încât $OM > OA$. Astfel, cercul de centru O şi rază OM este cercul căutat: dacă r este raza cercurilor date, iar $\{N\} = OB \cap \mathcal{C}(B, r)$, $\{P\} = OC \cap \mathcal{C}(C, r)$, atunci $ON = OB + BN = OA + r = OM$ şi analog $OP = OM$. Mai trebuie justificat că $\mathcal{C}(O, OM)$ are câte un *singur* punct comun cu cercurile date. Dacă, de exemplu, ar exista un al doilea punct Q comun cercurilor $\mathcal{C}(O, OM)$ şi $\mathcal{C}(A, r)$, atunci $OQ < OA + AQ$ (inegalitatea triunghiului), deci $OQ < OA + r = OM$ şi se ajunge la o contradicţie.

Clasa a VIII-a

VIII.102. *Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia* $\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 - \frac{26}{5} \cdot \frac{x^2-4}{x^2-1} = 0.$

Vasile Chiriac, Bacău

Soluţie. Se impune ca $x \in \mathbb{R}\backslash\{1,-1\}$. Dacă $u = \dfrac{x+2}{x-1}$, $v = \dfrac{x-2}{x+1}$, ecuaţia devine $u^2 + v^2 - \dfrac{26}{5}uv = 0$ şi, cum u şi v nu pot fi simultan egale cu zero, putem nota $t = \dfrac{v}{u}$ şi obţinem că $t^2 - \dfrac{26}{5}t + 1 = 0$, cu soluţiile $t_1 = \dfrac{1}{5}$, $t_2 = 5$. Dacă $v = 5u$, rezultă că $2x^2 - 9x - 4 = 0$, de unde $x_{1,2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{113}}{4}$, iar dacă $u = 5v$, deducem că $2x^2 - 9x + 4 = 0$, deci $x_3 = 4$, $x_4 = \dfrac{1}{2}$. Ecuaţia din enunţ are patru soluţii reale.

VIII.103. *Arătaţi că oricare ar fi* $n \in \mathbb{N}^*$, *există* $m \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât* $n^4 \cdot m + 1$ *este număr compus.*

Lucian Tuţescu şi Ion Vişan, Craiova

Soluţia 1 (*a autorilor*). Pentru $m = n^4 + 2$, avem că $n^4 \cdot m + 1 = n^8 + 2n^4 + 1 = (n^4 + 1)^2$ şi, cum $n^4 + 1 \geq 2$, urmează concluzia problemei.

Soluţia 2 (**Titu Zvonaru**). Dacă $n = 1$, putem lua $m = pq - 1$, cu $p, q \in \mathbb{N}$, $p, q \geq 2$. Dacă $n > 1$, luăm $m = n^{3k-4}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ şi vom avea că $n^4 \cdot m + 1 = (n^k)^3 + 1 = (n^k + 1)(n^{2k} - n^k + 1)$, unde ambele paranteze sunt cel puţin egale cu 2.

VIII.104. *Fie* $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ *astfel încât* $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 3x^2y^2z^2$. *Demonstraţi că* $\dfrac{1}{x^2+x+1} + \dfrac{1}{y^2+y+1} + \dfrac{1}{z^2+z+1} \leq 1$.

Răzvan Ceucă, elev, Iaşi

Soluţie. Problema este oarecum înrudită cu G89 din RecMat2/2005 sau cu VIII.66 din RecMat 1/2006: observând că $x^2 + x + 1 \geq 3x$ şi ţinând seama de faptul că $x > 0$, obţinem că $\dfrac{1}{x^2+x+1} \leq \dfrac{1}{3x}$ şi încă două relaţii analoage. Astfel, membrul stâng este majorat de $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right)$. Folosind inegalitatea dintre media aritmetică şi cea pătratică, $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right) \leq \sqrt{\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2}\right)}$. Însă condiţia din ipoteză se poate scrie sub forma $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2} = 3$ şi de aici urmează inegalitatea din enunţ. Egalitatea se atinge pentru $x = y = z = 1$.

VIII.105. *Determinaţi* $x, y \in \mathbb{N}^*$ *pentru care* $x^3 - y^3 = 3xy + 17$.

Liviu Smarandache şi Ion Vişan, Craiova

Soluţia 1 (*a autorilor*). Cum $3xy + 17 \in \mathbb{N}^*$, rezultă că $x > y$, deci există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x = y + p$. Înlocuind în relaţia din enunţ, obţinem că $3(p-1)y^2 + 3p(p-1)y + p^3 - 17 = 0$. Observăm că $3(p-1)y^2 \geq 0$ şi $3p(p-1)y \geq 0$, prin urmare $p^3 - 17 \leq 0$, adică $p \in \{1, 2\}$. Dacă $p = 1$ se ajunge la contradicţia $-16 = 0$, iar pentru $p = 2$ deducem că $y^2 + 2y - 3 = 0$, ecuaţie a cărei singură soluţie naturală este $y = 1$. Rezultă că $x = 3$, deci soluţia ecuaţiei din enunţ este perechea $(3, 1)$.

Soluţia 2 (*Gheorghe Iurea*). Rezolvăm ecuaţia în numere întregi. Notăm $d = x - y$, $p = xy$, cu $d, p \in \mathbb{Z}$. Cum $x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy(x-y) = d^3 + 3dp$, ecuaţia devine $d^3 + 3dp = 3p + 17$. Rezultă că $3p = \dfrac{17 - d^3}{d-1} = \dfrac{16}{d-1} - d^2 - d - 1$, deci $d - 1$ este divizor al lui 16. Analizând cazurile posibile, determinăm d şi p şi apoi aflăm soluţiile ecuaţiei iniţiale: $(x, y) \in \{(3, 1); (-1, -3)\}$.

VIII.106. *În tetraedul $VABC$, avem $AB = 4cm, BC = 5cm, CA = 6cm$, iar ariile feţelor VAB, VBC şi VCA sunt egale cu $\dfrac{15\sqrt{7}}{4}cm^2$. Calculaţi sinusurile unghiurilor $\widehat{AVB}, \widehat{BVC}$ şi $\widehat{CVA}$.*

Vlad Emanuel, student, Bucureşti

Soluţie. Calculând aria triunghiului ABC cu formula lui Heron, obţinem că aceasta este $\dfrac{15\sqrt{7}}{4}cm^2$, prin urmare tetraedrul $VABC$ este echifacial. Rezultă că $VA = BC = 5cm$, $VB = CA = 6cm$, iar $VC = AB = 4cm$, de unde $\sin\widehat{AVB} = \dfrac{2\mathcal{A}_{VAB}}{VA \cdot VB} = \dfrac{\sqrt{7}}{8}$, $\sin\widehat{BVC} = \dfrac{2 \cdot \mathcal{A}_{VBC}}{VB \cdot VC} = \dfrac{5\sqrt{7}}{32}$, iar $\sin\widehat{CVA} = \dfrac{2\mathcal{A}_{VCA}}{VC \cdot VA} = \dfrac{3\sqrt{7}}{16}$.

VIII.107. *Fie $ABCD$ un tetraedru, iar m_1, m_2 şi m_3 lungimile bimedianelor sale. Demonstraţi că $3(AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 + DB^2) \geq 4(m_1 + m_2 + m_3)^2$.*

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

Soluţie. Se ştie că în orice tetraedru $ABCD$ are loc identitatea $4(m_1^2+m_2^2+m_3^2) = AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+CD^2+DB^2$ (a se vedea, de exemplu, D. Brânzei, S. Aniţa, C. Cocea - *Planul şi spaţiul euclidian,* Ed. Academiei, Bucureşti, 1986). Folosind inegalitatea dintre media aritmetică şi cea pătratică, obţinem că $3(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) \geq (m_1 + m_2 + m_3)^2$, de unde cerinţa problemei. Egalitatea se atinge atunci când $m_1 = m_2 = m_3$.

VIII.108. *Într-un reper cartezian xOy, se consideră punctele $A_{ij}(i, j)$, unde $1 \leq i, j \leq 5$. Determinaţi numărul triunghiurilor care au ca vârfuri trei dintre punctele date.*

Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Cum avem $5 \cdot 5 = 25$ de puncte, putem considera $\dfrac{25 \cdot 24 \cdot 23}{6} = 2300$ de mulţimi formate din câte trei puncte. Pentru a găsi numărul triunghiurilor, trebuie să eliminăm mulţimile formate din puncte coliniare. Punctele A_{i1}, $i = \overline{1, 5}$, generează $\dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 10$ mulţimi de câte trei puncte coliniare; aceeaşi situaţie are loc pe fiecare dintre cele cinci orizontale, cinci verticale, precum şi pe cele două diagonale $A_{11}A_{55}$ şi $A_{15}A_{51}$. Pe fiecare dintre direcţiile $A_{12}A_{45}, A_{21}A_{54}, A_{14}A_{41}$ şi $A_{25}A_{52}$ avem câte 4 mulţimi de trei puncte coliniare, iar pe fiecare dintre direcţiile $A_{31}A_{53}, A_{13}A_{35}, A_{13}A_{31}$, $A_{53}A_{35}$, $A_{11}A_{53}$, $A_{12}A_{54}$, $A_{13}A_{55}$, $A_{13}A_{51}$, $A_{14}A_{52}$, $A_{15}A_{53}$, $A_{11}A_{35}$, $A_{21}A_{45}$, $A_{31}A_{55}$, $A_{31}A_{15}$, $A_{41}A_{25}$ şi $A_{51}A_{35}$, există câte o singură mulţime formată din trei puncte coliniare. Astfel, numărul mulţimilor care trebuie eliminate este $10 \cdot 12 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 16 = 152$. Rămân $2300 - 152 = 2148$ de triunghiuri.

Clasa a IX-a

IX.96. *Determinaţi triunghiurile în care tangentele unghiurilor se exprimă prin numere naturale.* (*În legătură cu X.78 din RecMat 1/2007.*)

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Fie A unghiul cel mai mic al triunghiului; atunci $A \leq \dfrac{\pi}{3}$, deci $\operatorname{tg} A \leq \sqrt{3}$

şi, cum $\operatorname{tg} A \in \mathbb{N}$, rezultă că $\operatorname{tg} A = 1$, adică $A = \dfrac{\pi}{4}$. Mai departe, din $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$, obţinem că $(\operatorname{tg} B - 1)(\operatorname{tg} C - 1) = 2$, de unde $B = \operatorname{arctg} 2$, $C = \operatorname{acrtg} 3$ (sau invers).

IX.97. *Demonstraţi că în orice triunghi are loc inegalitatea* $m_a^2 h_b h_c + m_b^2 h_c h_a + m_c^2 h_a h_b \geq 4S^2 \left(2 + \dfrac{r}{2R}\right)$.

Cătălin Cristea, Craiova

Soluţie. Observăm că $m_a^2 h_b h_c + m_b^2 h_c h_a + m_c^2 h_a h_b = 4S^2 \left(\dfrac{2(b^2+c^2) - a^2}{4bc} + \dfrac{2(a^2+c^2) - b^2}{4ac} + \dfrac{2(a^2+b^2) - c^2}{4ab} \right)$. Prin aplicarea inegalităţii Cebîşev pentru şiruri de monotonii contrare, deducem că $\dfrac{2(b^2+c^2) - a^2}{4bc} + \dfrac{2(a^2+c^2) - b^2}{4ac} + \dfrac{2(a^2+b^2) - c^2}{4ab} \geq \dfrac{1}{3} \cdot 3(a^2+b^2+c^2) \cdot \dfrac{1}{4} \left(\dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ac} + \dfrac{1}{bc} \right) \geq \dfrac{9}{4}$, ultima relaţie obţinându-se cu ajutorul inegalităţii mediilor. Inegalitatea de demonstrat se deduce imediat, ţinându-se seama că $R \geq 2r$.

IX.98. *Aflaţi* $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, *pentru care* $|ax^2 + bx + c| \leq \left(x - \dfrac{1}{a}\right)^2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Marian Ursărescu, Roman

Soluţia I (Paul Georgescu). Pentru $x = \dfrac{1}{a}$, obţinem că $\left| \dfrac{1}{a} + \dfrac{b}{a} + c \right| \leq 0$, de unde $c = -\dfrac{1}{a} - \dfrac{b}{a}$. Substituind în inegalitatea din enunţ, obţinem că $|ax^2 + bx - \dfrac{1}{a} - \dfrac{b}{a}| \leq \left(x - \dfrac{1}{a}\right)^2$, deci $\left| a\left(x - \dfrac{1}{a}\right)\left(x + \dfrac{1}{a}\right) + b\left(x - \dfrac{1}{a}\right) \right| \leq \left(x - \dfrac{1}{a}\right)^2$. Notând $x - \dfrac{1}{a} = y$, obţinem că $|ay^2 + (b+2)y| \leq y^2$, $\forall y \in \mathbb{R}$, de unde $|ay + (b+2)| \leq |y|$, $\forall y \in \mathbb{R}^*$. Rezultă că $b + 2 = 0$ şi $|ay| \leq |y|$, $\forall y \in \mathbb{R}^*$, deci $|a| \leq 1$. Urmează că $a \in [-1, 0) \cup (0, 1]$, $b = -2$, $c = \dfrac{1}{a}$.

Soluţia a II-a (a autorului). Pentru $x = \dfrac{1}{a}$, obţinem că $\left| \dfrac{1}{a} + \dfrac{b}{a} + c \right| \leq 0$, de unde $1 + b + ac = 0$. Conform ipotezei, avem că $ax^2 + bx + c \leq \left(x - \dfrac{1}{a}\right)^2$, deci $(a-1)x^2 + \left(b - \dfrac{2}{a}\right)x + c - \dfrac{1}{a^2} \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Acest fapt se petrece dacă şi numai dacă $a - 1 \leq 0$ şi $\Delta \leq 0$, adică atunci când $a < 1$ şi $(ab+2)^2 - 4(a-1)(a^2c-1) \leq 0$. Înlocuind $b = -1 - ac$, ultima condiţie conduce la $a^2(1+ac)^2 - 4a(1+ac) - 4a^3c + 4a + 4a^2c \leq 0$, prin urmare $a^2(1-ac)^2 \leq 0$, de unde $ac = 1$. Se observă uşor că, în ipoteza $ac = 1$, are loc inegalitatea $ax^2 + bx^2 + c \geq -\left(x - \dfrac{1}{a}\right)^2$ dacă şi numai dacă $a \geq -1$. În concluzie, $a \in [-1, 0) \cup (0, 1]$, $b = -2$ şi $c = \dfrac{1}{a}$.

IX.99. *Fie* $k \in [0, 1), n \in \mathbb{N}^*$ *şi numerele* $\alpha_i \in \mathbb{R}^*$, $\beta_i \in \mathbb{R}, \varepsilon_i \in \{-1, 1\}, i = \overline{1, n}$, *astfel încât* $\varepsilon_1\alpha_1 + \varepsilon_2\alpha_2 + \ldots + \varepsilon_n\alpha_n = 0$. *Rezolvaţi ecuaţia*

$$|\alpha_1 x + \beta_1| + |\alpha_2 x + \beta_2| + \ldots + |\alpha_n x + \beta_n| = k|\varepsilon_1\beta_1 + \varepsilon_2\beta_2 + \ldots + \varepsilon_n\beta_n|.$$

Dumitru Mihalache şi Gabi Ghidoveanu, Bârlad

Soluţie. Cum $\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(\alpha_i x + \beta_i) = x\left(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\alpha_i\right) + \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\beta_i = \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\beta_i$, rezultă că $\left|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(\alpha_i x + \beta_i)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\beta_i\right|$, de unde $\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i x + \beta_i| \geq \left|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\beta_i\right|$ şi atunci $k\cdot\left|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\beta_i\right| \geq \left|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\beta_i\right|$. Dacă $\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\beta_i \neq 0$, obţinem $k \geq 1$, prin urmare ecuaţia nu are soluţii. Dacă $\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\beta_i = 0$, ecuaţia dată este echivalentă cu sistemul $\alpha_i x + \beta_i = 0$, $i = \overline{1,n}$. Acest sistem nu are soluţii dacă $(\alpha_1, a_2, \ldots, \alpha_n)$ şi $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ nu sunt proporţionale şi are soluţia $x = -\gamma$, unde $\gamma = \frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \ldots = \frac{\beta_n}{\alpha_n}$, în caz contrar.

IX.100. *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(b_n)_{n\geq 1}$ *două şiruri de numere reale, cu* $a_n \neq 0, \forall n \geq 1$ *şi* $3\cdot\sum_{k=1}^{n}(a_k b_k^2 - a_k^2 b_k) = \left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^3 - \sum_{k=1}^{n}a_k^3, \forall n \geq 1$. *Demonstraţi că, pentru orice* $n \geq 1$, *există* $\alpha_n \in \{0,1\}$ *astfel încât* $b_n = \alpha_n(a_1 + \ldots + a_n) - (1-\alpha_n)(a_1 + \ldots + a_{n-1})$.

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Pentru $n = 1$, relaţia din enunţ devine $3a_1b_1(b_1 - a_1) = 0$, deci $b_1 = 0$ (şi luăm $\alpha_1 = 0$) sau $b_1 = a_1$ (şi alegem $\alpha_1 = 1$). Pentru $n \geq 2$, scădem din relaţia din enunţ pe aceea obţinută din ea prin înlocuirea lui n cu $n-1$; ajungem la $3(a_n b_n^2 - a_n^2 b_n) = \left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^3 - \left(\sum_{k=1}^{n-1}a_k\right)^3 - a_n^3 \Leftrightarrow 3(a_n b_n^2 - a_n^2 b_n) = 3\left(\sum_{k=1}^{n-1}a_k\right)^2\cdot a_n + 3\left(\sum_{k=1}^{n-1}a_k\right)a_n^2 \Leftrightarrow a_n\left(b_n - \sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(b_n + \sum_{k=1}^{n-1}a_k\right) = 0$. Deoarece $a_n \neq 0$, de aici rezultă fie că $b_n = \sum_{k=1}^{n}a_k$ (deci se poate lua $\alpha_n = 1$), fie că $b_n = -\sum_{k=1}^{n-1}a_k$ (deci putem alege $\alpha_n = 0$), ceea ce încheie soluţia.

Autorul remarcă faptul că este adevărată şi reciproca afirmaţiei din eneunţ.

Clasa a X-a

X.96. *Dacă* a, b, c *sunt numere reale pozitive cu suma* 1, *demonstraţi că* $a^b\cdot b^c\cdot c^a + b^a\cdot c^b\cdot a^c \leq 2(ab + bc + ca)$.

Dorin Mărghidanu, Craiova

Soluţie. Folosim inegalitatea dintre media aritmetică ponderată şi media geometrică ponderată: $p_1a + p_2b + p_3c \geq a^{p_1}\cdot b^{p_2}\cdot c^{p_3}$, $\forall p_1, p_2, p_3 > 0$ cu $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ Considerând $p_1 = b$, $p_2 = c$ şi $p_3 = a$, rezultă că $ba + cb + ac \geq a^b\cdot b^c\cdot c^a$. Luând apoi $p_1 = c$, $p_2 = a$ şi $p_3 = b$, obţinem că $ca + bc + ab \geq b^a\cdot c^b\cdot a^c$. Adunând aceste relaţii, se obţine inegalitatea din enunţ.

X.97. *Fie $a, b, c \in \mathbb{C}^*$ numere complexe distincte astfel încât $(a-b)^3 = (b-c)^3 = (c-a)^3$. Arătaţi că $|2a-b-c| = |2b-c-a| = |2c-a-b|$.*

Dan Nedeianu, Drobeta-Tr. Severin

Soluţie. Condiţia dată este echivalentă cu $\left(\frac{b-c}{a-b}\right)^3 = \left(\frac{c-a}{a-b}\right)^3 = 1$. Cum $a-b \neq b-c$ (altfel $b = \frac{a+c}{2}$ şi, folosind relaţia din enunţ, s-ar deduce că $a = c$), $b-c \neq c-a$ şi $c-a \neq a-b$, găsim că $b-c = z\varepsilon$ şi $c-a = z\varepsilon^2$, unde ε este rădăcină cubică a unităţii, iar $z = a-b$. Deducem că $|2a-b-c| = |2b-c-a| = |2c-a-b| = |z| \cdot \sqrt{3}$.

X.98. *Fie $A_i(z_i), i = \overline{1,3}$ vârfurile unui triunghi din planul xOy şi $P(z)$ un punct din acest plan (z_i şi z sunt afixele punctelor A_i, respectiv P). Să se arate că P este situat în interiorul triunghiului $A_1A_2A_3$ sau pe una din laturile sale dacă şi numai dacă există $\alpha_i \geq 0, i = \overline{1,3}$, astfel încât $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ şi $z = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3$.*

Adrian Corduneanu, Iaşi

Soluţie. Punctul P este situat în interiorul triunghiului $A_1A_2A_3$ sau pe una din laturile sale dacă şi numai dacă există $M \in [A_1A_2]$ cu $P \in [MA_3]$. Deoarece $M \in [A_1A_2] \Leftrightarrow \exists t \in [0,1]$ astfel încât $z_M = (1-t)z_1 + tz_2$ şi $P \in [MA_3] \Leftrightarrow \exists s \in [0,1]$ cu proprietatea $z = (1-s)z_3 + sz_M$, rezultă că $z = (1-t)sz_1 + stz_2 + (1-s)z_3$. Considerând $\alpha_1 = s(1-t)$, $\alpha_2 = st$ şi $\alpha_3 = 1-s$, obţinem $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ şi $z = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3$, ceea ce încheie demonstraţia.

X.99. *Considerăm triunghiurile echilaterale ABC şi $A_1B_1C_1$ şi construim triunghiurile echilaterale $AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2, AB_1A_3$, BC_1B_3, CA_1A_3, AC_1A_4, BA_1B_4 şi CB_1C_4; toate triunghiurile citate sunt orientate pozitiv. Fie punctele $M_2 \in A_2B$, $N_2 \in B_2C$, $P_2 \in C_2A$, $M_3 \in A_3B$, $N_3 \in B_3C$, $P_3 \in C_3A$, $M_4 \in A_4B$, $N_4 \in B_4C$ şi $P_4 \in C_4A$ astfel încât $\frac{M_2A_2}{M_2B} = \frac{N_2B_2}{N_2C} = \frac{P_2C_2}{P_2A} = \frac{M_3A_3}{M_3B} = \frac{N_3B_3}{N_3C} = \frac{P_3C_3}{P_3A} = \frac{M_4A_4}{M_4B} = \frac{N_4B_4}{N_4C} = \frac{P_4C_4}{P_4A}$. Demonstraţi că triunghiurile $M_2N_2P_2, M_3N_3P_3$ şi $M_4N_4P_4$ sunt echilaterale şi au acelaşi centru.*

Cătălin Ţigăeru, Suceava

Soluţie. Notăm afixul fiecărui punct care apare, cu litera mică ce îi corespunde. Scriem condiţiile ca cele 11 triunghiuri care apar în ipoteză să fie echilaterale:

$$\begin{array}{lll} a + \varepsilon b + \varepsilon^2 c = 0; & a_1 + \varepsilon b_1 + \varepsilon^2 c_1 = 0; & \\ a + \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2 = 0; & b + \varepsilon b_1 + \varepsilon^2 b_2 = 0, & c + \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2 = 0; \\ a + \varepsilon b_1 + \varepsilon^2 a_3 = 0, & b + \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 b_3 = 0, & c + \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_3 = 0, \\ a + \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 a_4 = 0, & b + \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 b_4 = 0, & c + \varepsilon b_1 + \varepsilon^2 c_4 = 0, \end{array}$$

unde ε este rădăcina primitivă de ordin trei a unităţii. Demonstrăm că triunghiurile $A_iB_iC_i$, $i = 2, 3, 4$, sunt echilaterale; trebuie verificate relaţiie $a_i + \varepsilon b_i + \varepsilon^2 c_i = 0$, $i = 2, 3, 4$. Vom da justificarea doar pentru $i = 2$:

$$a_2 + \varepsilon b_2 + \varepsilon^2 c_2 = -(\varepsilon a + \varepsilon^2 a_1) - \varepsilon(\varepsilon b + \varepsilon^2 b_1) - \varepsilon^2(\varepsilon c + \varepsilon^2 c_1) =$$

$$= -\varepsilon(a + \varepsilon b + \varepsilon^2 c) - \varepsilon^2(a_1 + \varepsilon b_1 + \varepsilon^3 c_1) = 0.$$

Fie k valoarea comună a rapoartelor egale din enunţ. Obţinem că $m_i = \frac{1}{1+k}a_i + \frac{k}{1+k}b$, $n_i = \frac{1}{1+k}b_i + \frac{k}{1+k}c$, $p_i = \frac{1}{1+k}c_i + \frac{k}{1+k}a$, $i = 2,3,4$. Atunci, $m_i + \varepsilon n_i + \varepsilon p_i = \frac{k}{1+k}\cdot\frac{1}{\varepsilon}(\varepsilon b + \varepsilon^2 c + \varepsilon^3 a) = 0$, $i = 2,3,4$, prin urmare $\triangle M_iN_iP_i$ sunt echilaterale.

Notăm cu G şi G_i, $i = \overline{1,4}$, centrele (de greutate) ale triunghiurilor ABC, respectiv $A_iB_iC_i$, $i = \overline{1,4}$. Observăm că $g_i = \frac{1}{3}(a_i + b_i + c_i) = -(\varepsilon g + \varepsilon^2 g_1)$, $i = 2,3,4$, deci triunghiurile $A_iB_iC_i$, $i = 2,3,4$, au acelaşi centru, fie acesta $\overline{G}$, de afix $\overline{g} = -\varepsilon g - \varepsilon^2 g_1$. Din relaţia $\overline{g} + \varepsilon g + \varepsilon^2 g_1 = 0$, deducem că $\overline{G}, G$ şi G_1 formează un triunghi echilateral. Notăm cu $\overline{G}_i$ centrele triunghiurilor $M_iN_iP_i$, $i = 2,3,4$; avem că $\overline{g}_i = \frac{1}{3}(m_i + n_i + p_i) = \frac{1}{1+k}\overline{g} + \frac{k}{1+k}g$, prin urmare $\triangle M_iN_iP_i$, i=2,3,4, au acelaşi centru $\overline{G}_k$, plasat pe latura $\overline{G}G$ a triunghiului echilateral $\overline{G}G\overline{G}_1$, pe care o împarte în raportul k.

X.100. *Demonstraţi că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea*

$$\frac{1}{\sin^2 A(\sin B + \sin C)^2} + \frac{1}{\sin^2 B(\sin C + \sin A)^2} + \frac{1}{\sin^2 C(\sin A + \sin B)^2} \geq \frac{4}{3}.$$

Marius Olteanu, Rm. Vâlcea

Soluţie. Este cunoscută inegalitatea $\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} \geq \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{xy+yz+zx}$, $\forall x,y,z > 0$ (a se vedea, de exemplu, *Old and New Inequalities* de T. Andreescu, G. Dospinescu, V. Cârtoaje, M. Lascu, apărută la GIL, Zalău, 2004, pg. 22, ex. 114). Înlocuind $x = \sin A \sin B$, $y = \sin A \sin C$, $z = \sin B \sin C$, obţinem că $\sum \frac{1}{\sin^2 A(\sin B + \sin C)^2} \geq \frac{9}{4}\frac{1}{\sin A \sin B \sin C(\sum \sin A)}$. Pe de altă parte, avem că $\sin A \sin B \sin C \leq \left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3}\right)^3$ (inegalitatea mediilor), iar $\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \leq \sin\frac{A+B+C}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (inegalitatea lui Jensen aplicată funcţiei sinus pe $[0,\pi]$). Înlocuind, rezultă concluzia problemei.

Clasa a XI-a

XI.96. *Fie ε rădăcina primitivă de ordin trei a unităţii, iar $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu det$(A + \varepsilon B) = 0$. Demonstraţi că* $\det(A - B) = \det A - \det B$.

Dan Popescu, Suceava

Soluţie. Considerăm polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f(X) = \det(A + XB) = \det A + \alpha X + \beta X^2 + (\det B)\cdot X^3$. Cum $f(\varepsilon) = 0$, rezultă că $\det A + \alpha\varepsilon + \beta(-\varepsilon - 1) + \det B = 0$, de unde $\alpha = \beta = \det A + \det B$. Calculând $f(-1)$ prin cele două modalităţi de scriere ale lui f, obţinem că $f(-1) = \det(A - B) = \det A - \det B$.

XI.97. *Fie $n \geq 3$ un număr natural. Arătaţi că pentru orice $k \in \{2,3,\ldots,n-1\}$, există $A \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$ astfel încât $A^p \neq I_n$, $\forall p \in \{1,2,\ldots,k-1\}$ şi $A^k = I_n$.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Considerăm $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_k(\{0,1\})$. Se constată că, pentru $p \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, avem că $B^p = (b_{ij})$, unde $b_{1,p+1} = b_{2,p+2} = \dots = b_{k-p,p} = 1$, $b_{k-p+1,1} = b_{k-p+2,2} = \dots = b_{k,p} = 1$, iar $b_{ij} = 0$ în rest. În plus, $B^k = I_k$. Atunci, matricea $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}$ verifică cerinţele problemei.

XI.98. *Demonstraţi că funcţia* $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ *este concavă şi, folosind eventual acest lucru, arătaţi că în orice triunghi ascuţitunghic* ABC *are loc inegalitatea* $\frac{1-\cos A}{1+\cos A} \cdot \frac{1-\cos B}{1+\cos B} \cdot \frac{1-\cos C}{1+\cos C} \le \frac{1}{27}$.

Bogdan Victor Grigoriu, Fălticeni

Soluţie. Funcţia f este de două ori derivabilă, iar $f''(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} < 0$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, prin urmare f este concavă. Aplicând inegalitatea lui Jensen, obţinem că $f\left(\frac{A+B+C}{3}\right) \ge \frac{1}{3}[f(A) + f(B) + f(C)]$, deci

$$\ln\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{3}}{1+\cos\frac{\pi}{3}}} \ge \frac{1}{3}\ln\left(\frac{1-\cos A}{1+\cos A} \cdot \frac{1-\cos B}{1+\cos B} \cdot \frac{1-\cos C}{1+\cos C}\right),$$

rezultă imediat din monotonia funcţiei logaritmice.

Nota autorului. În aceeaşi manieră se poate demonstra că, în orice triunghi ABC, are loc inegalitatea $\frac{1-\sin A}{1+\sin A} \cdot \frac{1-\sin B}{1+\sin B} \cdot \frac{1-\sin C}{1+\sin C} \le \frac{1}{(2+\sqrt{3})^6}$.

XI.99. *Studiaţi convergenţa şirului* $(v_n)_{n\ge1}$ *definit prin* $v_{n+1} = \frac{(v_n^c + d)^{1/c}}{v_n}$, $\forall n \ge 1$, *unde* v_1, c *şi* d *sunt numere reale pozitive date.*

Gheorghe Costovici şi Adrian Corduneanu, Iaşi

Soluţie. Vom demonstra că $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = l$, unde $l = \left(\frac{1+\sqrt{1+4d}}{2}\right)^{1/c}$. Dacă $v_1 = l$, se demonstrează prin inducţie matematică faptul că $v_n = l$, $\forall n \ge 1$. În cazul în care $v_1 \in (0, l)$, se arată (tot prin inducţie) că $v_{2n-1} \in (0, l)$ şi $v_{2n} \in (l, +\infty)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, apoi că subşirul $(v_{2n-1})_{n\ge1}$ este strict crescător, în timp ce $(v_{2n})_{n\ge1}$ este strict descrescător. Urmează că există şi sunt finite $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} v_{2n-1}$, $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} v_{2n}$ şi, prin trecere la limită în relaţiile de recurenţă, obţinem că $\alpha = \frac{(\beta^c + d)^{1/c}}{\beta}$, iar $\beta = \frac{(\alpha^c + d)^{1/c}}{\alpha}$. De aici, $\alpha = \left(\frac{\alpha^c + d}{\alpha^c} + d\right)^{1/c} : \frac{(\alpha^c + d)^{1/c}}{\alpha}$, deci $\alpha^c = \frac{\alpha^c + d + d\alpha^c}{\alpha^c + d}$, prin urmare $\alpha^{2c} - \alpha^c - d = 0$, de unde găsim că $\alpha = l$. Asemănător se arată că $\beta = l$. În sfârşit, analog se tratează cazul în care $v_1 \in (l, +\infty)$.

Notă. De fapt, şirul $u_n = v_n^c$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, verifică relaţia de recurenţă $u_{n+1} = \dfrac{u_n + d}{u_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, recurenţă omografică care se studiază în mod uzual.

XI.100. *Demonstraţi că*

$$(x+1)\left(\sin\frac{\pi}{x+1} - \cos\frac{\pi}{x+1}\right) < x\left(\sin\frac{\pi}{x} - \cos\frac{\pi}{x}\right), \forall x \in [2, \infty).$$

Petru Răducanu, Iaşi

Soluţie. Inegalitatea de demonstrat este echivalentă cu $f(x+1) - f(x) < g(x+1) - g(x), x \in [2, \infty)$, unde $f, g : [2, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = t\sin\dfrac{\pi}{t}$, $g(t) = t\cos\dfrac{\pi}{t}$, $\forall t \in [2, \infty)$. Aplicând teorema lui Lagrange funcţiei f pe intervalul $[x, x+1]$, $x \geq 2$, obţinem $c \in (x, x+1)$ pentru care $f(x+1) - f(x) = f'(c) = h\left(\dfrac{\pi}{c}\right)$, unde $h(t) = \sin t - t\cos t$, $t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Observăm că $h'(t) = t\sin t > 0$, deci h este crescătoare, astfel că $h(t) \leq h\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$, $\forall t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Deducem că $f(x+1) - f(x) < 1$, întrucât $\dfrac{\pi}{c} \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Analog se demonstrează că $g(x+1) - g(x) > 1$, $\forall x \geq 2$, ceea ce încheie rezolvarea.

Clasa a XII-a

XII.96. *Rezolvaţi în S_5 ecuaţia* $x^{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Liviu Smarandache şi Ionuţ Ivănescu, Craiova

Soluţie. Notăm $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ şi observăm că ord$\sigma = 5$. Din $x^{11} = \sigma$ rezultă că $x^{55} = e$, prin urmare ord$x|55$, deci ord$x \in \{1, 5, 11, 55\}$. Pe de altă parte, cum ord$S_5 = 120$, atunci ord$x|120$ şi rămâne că ord$x \in \{1, 5\}$. Dacă ord$x = 1$, ar rezulta că $x = e$ şi se ajunge la contradicţie $e = e^{11} = x^{11} = \sigma$. Dacă ord$x = 5$, obţinem că $\sigma = x^{11} = x \cdot x^5 \cdot x^5 = x$, adică singura soluţie a ecuaţiei date este $x = \sigma$.

XII.97. *Fie $a_k \in \mathbb{R}, k = \overline{0, n}$, iar $m \in (0, \infty)$ astfel încât* $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{a_k}{m+k} = 0$. *Să se arate că ecuaţia $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$ admite soluţie în intervalul* $(0, 1)$.

Mihail Bencze, Braşov

Soluţie. Aplicăm teorema de medie funcţiei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) \cdot x^{m-1}$, pentru care $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{m+k} = 0$.

XII.98. *Determinaţi primitivele funcţiei $f : (0, \pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sin^{3n-1} x \cdot \cos^{n-1} x}{\sin^{4n} x + \cos^{4n} x}$, $n \in \mathbb{N}^*$.*

I.V. Maftei, Bucureşti şi Mihai Haivas, Iaşi

Soluţie. Fie $I = \displaystyle\int \frac{\sin^{3n-1} x \cdot \cos^{n-1} x}{\sin^{4n} x + \cos^{4n} x} dx$, $J = \displaystyle\int \frac{\cos^{3n-1} x \cdot \sin^{n-1} x}{\sin^{4n} x + \cos^{4n} x} dx$, unde $x \in (0, \pi)$. Observăm că

$$I + J = \int \frac{\sin^{n-1} x \cos^{n-1} x (\sin^{2n} x + \cos^{2n} x)}{\sin^{4n} x + \cos^{4n} x} dx =$$

$$= \int \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} + \operatorname{ctg}^{n-1} x \cdot \dfrac{1}{\sin^2 x}}{\operatorname{tg}^{2n} x + \operatorname{ctg}^{2n} x} dx = \frac{1}{n} \int \frac{(\operatorname{tg}^n x - \operatorname{ctg}^n x)'}{(\operatorname{tg}^n x - \operatorname{ctg}^n x)^2 + 2} dx =$$

$$= \frac{1}{n\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}^n x - \operatorname{ctg}^n x}{\sqrt{2}} + \mathcal{C}.$$

Analog se obţine că $I - J = \dfrac{1}{2n\sqrt{2}} \ln \left| \dfrac{\operatorname{tg}^n x + \operatorname{ctg}^n x - \sqrt{2}}{\operatorname{tg}^n x + \operatorname{ctg}^n x + \sqrt{2}} \right| + \mathcal{C}$. Adunând membru cu membru cele două relaţii, găsim valoarea lui I.

XII.99. *Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to (0, 1)$ continuă şi descrescătoare şi şirul strict crescător $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere reale pozitive, astfel încât şirul $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n\geq 1}$ este strict descrescător. Definim $I_n = \dfrac{1}{a_n} \displaystyle\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.*

a) *Demonstraţi că $(I_n)_{n\geq 1}$ este un şir descrescător.*

b) *Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.*

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

Soluţie. Din teorema de medie, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, găsim $c_n \in (a_n, a_{n+1})$ astfel că $I_n = \dfrac{1}{a_n}(a_{n+1} - a_n) f(c_n) = \left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) f(c_n)$.

a) Cum $c_n < a_{n+1} < c_{n+1}$ iar f este descrescătoare, urmează că $(f(c_n))_{n\geq 1}$ este descrescător. De asemenea, $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)_{n\geq 1}$ este descrescător, de unde $(I_n)_{n\geq 1}$, este descrescător, ca produs de două şiruri descrescătoare strict pozitive.

b) Cum $(f(c_n))_{n\geq 1}$, este descrescător şi mărginit, el admite o limită finită l. Urmează că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0 \cdot l = 0$.

XII.100. *În raport cu reperul xOy, considerăm punctele $A(a, 0), B(0, b)$ şi $T \in (AB)$, unde $a > 0, b > 0$. Determinaţi parabola $y = \lambda x^2 + \mu$ care este tangentă în T la AB, ştiind că aria suprafeţei determinată de parabolă şi axele de coordonate este maximă.*

Adrian Corduneanu, Iaşi

Soluţie. Ecuaţia dreptei AB este $y = \dfrac{b}{a}(a - x)$, deci T are coordonatele $x_0 \in (0, a)$, $y_0 = \dfrac{b}{a}(a - x_0)$. Din condiţiile de tangenţă $\lambda x_0^2 + \mu = \dfrac{b}{a}(a - x_0)$ şi $2\lambda x_0 = -\dfrac{b}{a}$, rezultă $\lambda = -\dfrac{b}{2ax_0}$ şi $\mu = \dfrac{b(2a - x_0)}{2a}$. Parabola de ecuaţie $y = -\dfrac{b}{2ax_0}x^2 + \dfrac{b(2a - x_0)}{2a}$ va tăia axa Ox în punctul $M(x_M, 0)$, unde $x_M = \sqrt{2ax_0 - x_0^2}$. Aria cerută este $S = \displaystyle\int_0^{x_M} (\lambda x^2 + \mu)dx = \dfrac{\lambda}{3} x_M^3 + \mu x_M = \dfrac{b}{3a}\sqrt{x_0(2a - x_0)^3}$. Se observă că S este maximă pentru $x_0 = \dfrac{a}{2}$, deci parabola cătată are ecuaţia $y = -\dfrac{b}{a^2} \cdot x^2 + \dfrac{3b}{4}$.