Concursul de matematică "Gaudeamus"
Ediţia I, Iaşi, 2009

În perioada 30 octombrie - 1 noiembrie 2009, la Facultatea de Matematică a Universităţii "Alexandru Ioan Cuza" Iaşi, s-a desfăşurat prima ediţie a ***Concursului de Matematică "Gaudeamus"***.

Organizatorii manifestării sunt: *Facultatea de Matematică* şi *Fundaţia Seminarului Matematic "Alexandru Myller"*. Colaboratori: *Inspectoratul Şcolar Judeţean Iaşi* şi *Liceul de Informatică "Grigore Moisil" Iaşi*.

Manifestarea s-a desfăşurat pe două secţiuni: 1)proba scrisă individuală; 2) concursul de proiecte "Matematica în lumea reală".

1) Proba scrisă individuală s-a adresat elevilor claselor a X-a, a XI-a, a XII-a şi a conţinut subiecte din programele şcolare ale anilor anteriori; tematica a fost publicată pe site-ul Facultăţii de Matematică, *www.math.uaic.ro* . Listele cu elevii participanţi, precum şi rezultatele lor, pot fi consultate la aceeaşi adresă internet.

2) Concursul de proiecte "Matematica în lumea reală" s-a adresat elevilor sau echipelor de elevi (maxim patru), fără limitare de vârstă, şi a constat în prezentarea unor soluţii matematice la probleme concrete ale lumii reale. Au fost susţinute 12 proiecte.

Acest concurs doreşte să fie, în primul rând, un mijloc de apropiere între Facultatea de Matematică şi elevii din învăţământul preuniversitar. Numărul de participanţi (aproximativ 150 de elevi din judeţele *Bacău, Botoşani, Neamţ, Vaslui* şi *Iaşi*), precum şi rezultatele obţinute, sunt încurajatoare.

Subiectele propuse la proba scrisă individuală

Clasa a X-a

1. i) Să se arate că, dacă $3 \mid a^2 + b^2$, unde $a, b \in \mathbb{N}$, atunci $3 \mid a$ şi $3 \mid b$.

ii) Să se arate că nu există $(a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4$, $(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$ astfel încât $a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2)$.

2. Se consideră n puncte $S = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ dintr-un plan π şi n numere reale $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ astfel încât $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \neq 0$. Spunem că $A' \in \pi$ este centrul de masă al sistemului (S, Λ) dacă există un punct $O \in \pi$ astfel încât

$$\overrightarrow{OA'} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}\overrightarrow{OA_1} + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}\overrightarrow{OA_n}.$$

i) Să se arate că dacă A' este centrul de masă al sistemului (S, Λ) atunci pentru orice punct $M \in \pi$ are loc

$$\overrightarrow{MA'} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}\overrightarrow{MA_1} + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}\overrightarrow{MA_n}.$$

Pentru un triunghi $A_1A_2A_3$, considerăm $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât $|\lambda_1|$, $|\lambda_2|$ şi $|\lambda_3|$ reprezintă lungimile laturilor $[A_2A_3]$, $[A_3A_1]$ şi respectiv $[A_1A_2]$.

ii) Să se arate că $A' \in A_1A_2$ este piciorul bisectoarei interioare (respectiv exterioare) a unghiului $\widehat{A_3}$ dacă şi numai dacă A' este centrul de masă al sistemului $(\{A_1, A_2\}, \{\lambda_1, \lambda_2\})$, pentru o anume alegere a semnelor scalarilor λ_1 şi λ_2.

iii) Să se arate că $I \in \pi$ este centrul cercului înscris (respectiv centrul unui cerc exînscris) triunghiului $A_1A_2A_3$ dacă şi numai dacă I este centrul de masă al sistemului $(\{A_1, A_2, A_3\}, \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\})$, pentru o anume alegere a semnelor scalarilor λ_1, λ_2 şi λ_3.

3. Fie $n \in \mathbb{N}\backslash 0, 1\}$ şi $a_1, a_2, ..., a_n$ numere reale. Construim: $s_0 = -a_1 - a_2 - ... - a_n$; $s_m = a_1 + a_2 + ... + a_m - (a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_n)$, $\forall m \in \overline{1, n-1}$; $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

Să se arate că există un $m \in \overline{0, n}$ astfel încât $|s_m| \leq \max\{|a_k| \mid k \in \overline{1, n}\}$.

Clasa a XI-a

1. Două sute de elevi participă la un concurs de matematică, la care se propun 6 probleme. După corectare, se observă că fiecare problemă a fost rezolvată corect de cel puţin 120 de elevi (nu neapărat aceiaşi pentru fiecare problemă). Arătaţi că se pot găsi doi participanţi, astfel ca fiecare problemă să fi fost rezolvată de cel puţin unul din cei doi.

2. i) Fie $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\} \subseteq \mathbb{Z}$ şi $f : A \to A$ o funcţie bijectivă. Presupunând că $a_1 < a_2 < ... < a_n$ şi că $a_i + f(a_i) < a_j + f(a_j)$ pentru orice $i < j$, $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, să se arate că $f = 1_A$. ii) Să se găsească o funcţie bijectivă $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ care satisface condiţiile $m + f(m) < n + f(n)$ pentru orice $m < n$, $m, n \in \mathbb{Z}$, şi să fie diferită de $1_{\mathbb{Z}}$.

3. Fie $a \in (0, +\infty)$. Într-un plan π, relativ la un sistem de coordonate carteziene xOy, considerăm dreapta de ecuaţie $(\delta_a) : \ y = ax$. Fie $\Pi = [0, 1) \times [0, 1)$.

a) Definim $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \Pi$, $f(x, y) = (\{x\}, \{y\})$, unde prin $\{ \ \}$ am notat partea fracţionară. Să se arate că f este periodică, adică există $T \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x + T, y + T) = f(x, y)$ pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

b) Considerăm restricţia f_a, a lui f la dreapta (δ_a). Să se arate că dacă $a \in \mathbb{Q}$ atunci f_a este de asemenea periodică.

Imaginea lui (δ_a) prin f_a este o reuniune de segmente paralele cu direcţia lui (δ_a).

c) Pentru $a \in \mathbb{Q}$ să se arate că numărul acestor segmente este finit.

Vom nota cu N acest număr.

d) Pentru $a = \dfrac{10}{2009}$ să se determine N. Cât este N pentru $a = \dfrac{10}{2010}$?

e) Ce se poate spune despre imaginea lui (δ_a) prin aplicaţia f_a când a este număr iraţional (de exemplu $\sqrt{2}$)?

Clasa a XII-a

1. Fie $A, B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ astfel încât $A + B = I_n$, $A^2 = A^3$. Să se arate că:

i) $AB = BA$; ii) $I_n - AB$ şi $I_n + AB$ sunt inversabile.

2. Se consideră funcţia $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 + x}$.

i) Să se scrie ecuaţia tangentei $y = ax + b$ la graficul funcţiei f, în punctul $x_0 = 0$.

ii) Să se determine valoarea a pentru care $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 1 - \frac{x}{2}}{x^a}$ există şi este $\neq 0$.

iii) Arătaţi că, pentru $x \in \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ are loc inegalitatea: $\left|f(x) - 1 - \dfrac{x}{2}\right| \leq \dfrac{x^2}{2\sqrt{2}}$.

iv) Fie N numărul natural cu 2010 cifre, toate egale cu 1, adică $N = \underbrace{1111\ldots11}_{\text{2010 cifre}}$.

Determinaţi primele 2010 zecimale ale numărului $\sqrt{N}$.

3. Se cer valorile lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul

$$\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

are o unică soluţie reală.